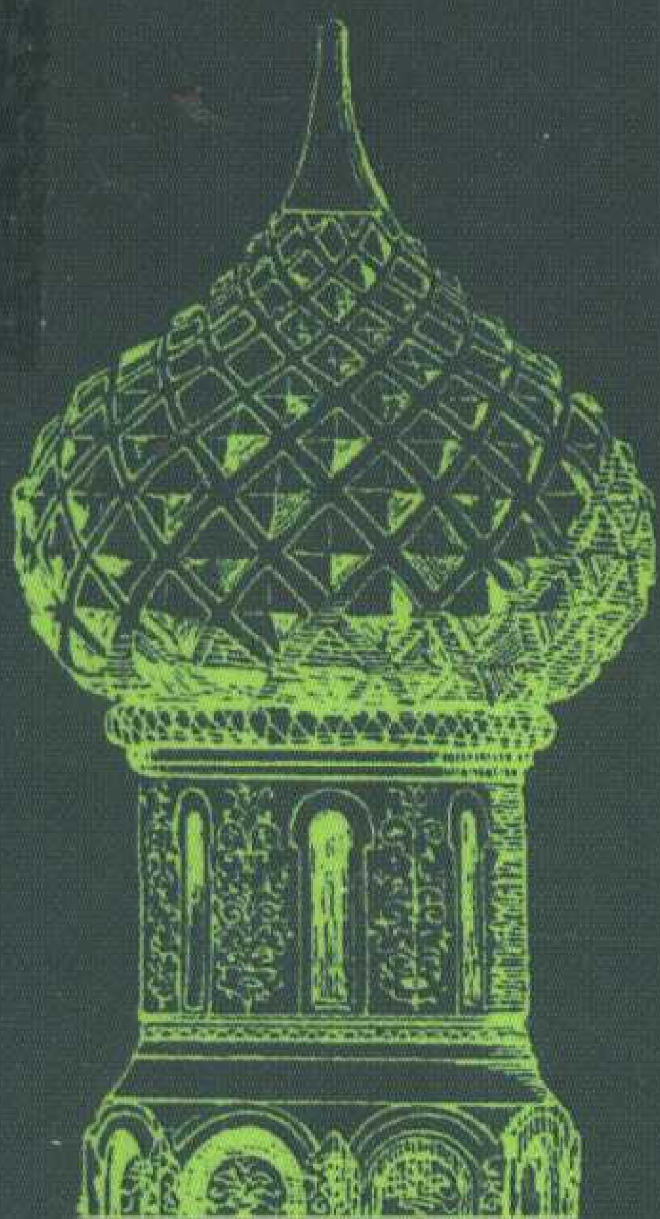


俄罗斯数学
教材选译

随机金融基础(第一卷)

事实·模型

□ A. H. 施利亚耶夫 著
□ 史树中 译



高等教育出版社
Higher Education Press

总 ·策 划：张小萍
责任编辑：赵天夫
封面设计：王凌波

“本书反映了（令人赞叹的）俄国数学风格：阐释理论的起源，通常它通过某些特殊的问题；然后，对于所提出的问题谨慎展开精心制作的数学理论；最后，揭示问题的本质，并生成漂亮的结果。”

——亚马逊网上书店评论

“追随本书的思路，你可以看到作者对金融数学的满腔热情和深刻理解。”

——亚马逊网上书店评论

本书原版自 1998 年出版以来，被认为是“随机金融数学方面最深刻的一本著作”。全书共分两卷，每一卷都包含四章。第一卷的副题为：事实·模型。第二卷的副题为：理论。这两卷的内容既相互联系，又相对独立。读者可把本书看作一本“随机金融数学全书”。

第一卷的第一章有关国际金融市场以及金融理论和金融工程的“事实”。它可看作一位前苏联数学家对西方金融市场和金融理论、金融工程的独特理解。其中作者不但概述了金融市场的基本状况、金融学的基本概念以及 Markowitz 证券组合选择理论、资本资产定价模型（CAPM）、Ross 套利定价理论（APT）、有效市场理论等，甚至还简要介绍了保险业和精算理论。

第一卷的后三章都有关金融学的随机“模型”：离散模型、连续模型和统计模型。作者提出，Doob 分解、局部鞅、鞅变换等概念在价格模型的套利定价讨论中起本质作用；而对于统计模型，除了高观点介绍各种线性模型以外，详尽介绍了近年发展起来的 ARCH 和 GARCH 类模型以及随机波动率模型。同时，还讨论混沌理论、分形理论和各种数据统计分析方法在金融资产价格模型中的应用。关于连续模型的内容远超过一般的金融数学教材和专著。除了用基于 Brown 运动的随机分析来描述的模型以外，还对最一般的半鞅模型作精辟介绍。同时，详细阐述稳定分布和稳定过程、Lévy 过程、双曲分布和双曲过程以至更一般的无限可分分布等重要工具。

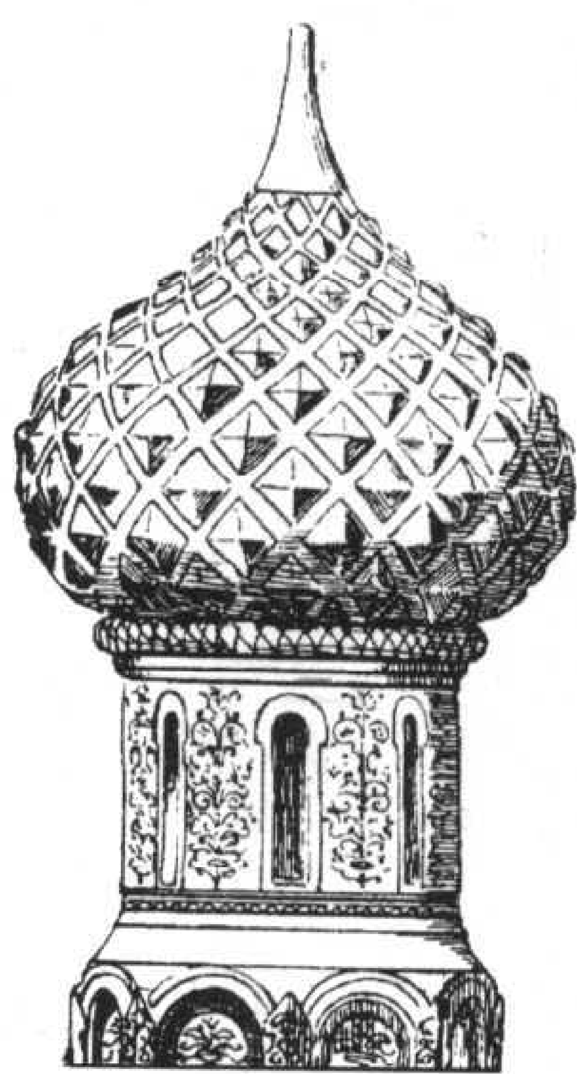
本书的阐述深入浅出，精致透彻，可供高等院校应用数学和金融工程专业的教师、学生以及广大金融工作者参考使用。

■ 学科类别：金融数学、金融工程
academic.hep.com.cn

ISBN 978-7-04-022634-8



定价 59.00 元



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

随机金融基础(第一卷)

事实·模型

□ A. H. 施利亚耶夫 著
□ 史树中 译



高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01–2007–3240 号

Ширяев А. Н.

Основы стохастической финансовой математики.

Том 1: Факты. Модели. 1998

Том 2: Теория. 1998

Originally published in Russian in the title

Essential of stochastic finance I: Facts. Models

Essential of stochastic finance II: Theory

By A. N. Shiryaev

图书在版编目（CIP）数据

随机金融基础．第1卷，事实．模型／（俄罗斯）施利亚耶夫著；史树中译．—北京：高等教育出版社，2008.1

ISBN 978－7－04－022634－8

Ⅰ．随… Ⅱ．①施…②史… Ⅲ．随机过程－应用－金融学－高等学校－教材 Ⅳ．F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 191608 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **特约编辑** 张冰峰
封面设计 张申申 **责任绘图** 尹 莉 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http：//www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http：//www.hep.com.cn
		网上订购	http：//www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http：//www.landraco.com.cn
印　　刷	北京外文印刷厂	**畅想教育**	http：//www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	25.25	**印　　次**	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	510 000	**定　　价**	59.00 元

物料号　22634－00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

译者前言

阿尔伯特・尼古拉也维奇・施利亚耶夫 (Альберт Николаевич Ширяев, Albert Nikolaevich Shiryaev, 1934—) 为俄罗斯概率论学派当前的领军人物. 1957 年毕业于莫斯科大学数学力学系; 1961 年获得副博士学位; 1967 年获得博士学位. 1970 年成为莫斯科大学教授. 1997 年当选为俄罗斯科学院通讯院士. 曾经获得国内外许多重要奖项和欧洲科学院院士、纽约科学院院士等荣誉称号, 以及荣任 Bernoulli 学会、Bachelier 金融学会等国际学术团体的主席.

施利亚耶夫的导师是 20 世纪最伟大的数学大师之一、概率论公理体系的提出者柯尔莫戈洛夫 (A. H. Колмогоров, A. N. Kolmogorov, 1903—1987). 柯尔莫戈洛夫有许多杰出的学生, 其中好几位像他一样荣获奖励终生成就的数学最高奖 —— 沃尔夫奖. 但像施利亚耶夫那样完全以概率论为专业研究方向、并且在概率统计的众多领域中都有卓越贡献的学生并不多. 因此, 我们不妨说, 施利亚耶夫是以柯尔莫戈洛夫为代表的俄罗斯概率论学派的 "嫡传正宗". 事实上, 他不但在概率统计的各个领域发表了 150 多篇研究论文, 并且还出版了多部在国际上影响很大的教科书和专著. 他的《概率》教程自 1980 年出版以来, 已经再版多次, 并且还有英文版和德文版. 2004 年又扩展为两卷本, 中文版已由高等教育出版社正式出版. 他的主要专著有《统计序贯分析》(俄文版 1969, 英文版 1978, 并改名为《最优停止法则》),《随机过程的统计》(与 R. Sh. Liptser 合著, 1977, 有英文版和波兰文版),《鞅论》(与 R. Sh. Liptser 合著, 1986, 有英文版),《随机过程的极限定理》(与法国数学家 J. Jacod 合著, 英文版 1987, 俄文版 1994, 英文第二版 2003),《临近性和统计不变原理》(与 P. Greenwood 合著, 1985),《统计试验和决策》(与 V. Spokoiny 合著, 2000),《最优停止和 Stephan 问题》(与 G. Peskir 合著, 2004) 等.

本书是施利亚耶夫关于随机金融数学的一本力作. 正如作者在序言中所说, 本书是为新加坡世界科技出版社 (World Scientific) 主编《统计科学和应用概率论高级丛书》的 Ole E. Barndorff-Nielsen 教授在 1995 年初向他约稿的. 因此, 本书的英文版与俄文版几乎同时问世. 可能是由于作者向世界科技出版社提供的仅仅是俄文手稿, 最后使得两种版本的内容并不完全一致. 除了俄文版的书名为《随机金融数学基础 (Основы Стохастической Финансовой Математики)》, 英文版的书名为《随机金融精华 (Essentials of Stochastic Finance)》以及英文版的译者在翻译时不完全拘泥于原来的表达以外, 它们的不一致中, 有些似乎是俄文版在编辑校订时的增删, 有些似乎是英文版的编译者自行加入的补充. 本书的翻译主要根据俄文版出版者ФАЗИС所提供的俄文影印稿, 但同时也参考了世界科技出版社的英文版. 如果两者在内容上有出入时, 我们干脆 "兼收并蓄"; 只要一种版本上有的, 我们都译出收入. 总体来说, 英文版上有的、俄文版上没有的内容较多, 尤其是有关背景资料. 但俄文版上有的、英文版上没有的内容也有一些. 对这些有差别的地方我们都加了 "译者注". 在翻译过程中, 我们也发现了少量印刷错误. 有的英文版已经更正, 但多半英文版仍保持原样. 我们对一些较重要的印刷错误更正也都加了 "译者注". 此外, 我们还加了少量说明性和资料性的 "译者注". 出于目前国内熟悉俄文的读者较少, 而英文则比较普及, 在我们中译本最后的术语对照索引中, 我们只采用英中对照, 而略去了俄中对照. 对于西文人名, 按照数学专业书籍的常规, 通常不作音译, 而用原人名的拉丁字母标出. 这里我们完全遵照英文版的拉丁字母拼写, 而不是如同原版那样用俄文拼写来表示. 但是我们保留了四个例外, 即对 Brown, Gauss, Poisson, Wiener 这四位学者的姓氏直接译为: 布朗、高斯、泊松、维纳. 这是因为这四个姓氏的音译已经普及, 同时它们又经常变为形容词, 而变为 "布朗运动"、"高斯分布" 等等. 这样在行文时似乎比较自然.

作为一位在前苏联环境下成长起来的数学家, 施利亚耶夫不可能十分熟悉西方的金融市场. 事实上, 作者自己也曾经对人说过①, 在他着手写作本书时, 他对金融理论和实务几乎一无所知. 对此, 本书的每一位读者都一定会感到十分惊讶. 本书中有关全球金融市场和金融学基本理论的叙述非常到位, 很难想象这是一位对金融 "几乎一无所知" 的人的手笔. 当然, "几乎一无所知" 是施利亚耶夫自谦之词. 其实他在当时与丹麦奥尔胡斯的数学研究中心和分析金融中心的关系十分密切. 当他发现他的概率论专长在金融中有那样深刻广泛的应用时, 他一定以极大的热情学习金融知识. 或许我们可以说, 本书中有关金融的许多背景材料正是一位带着深邃严谨的眼光的前苏联数学家看待金融业界的纪要. 对于今天一上来就学萨缪尔森经济学的年青人来说, 可能会感到这样的陈述有点唠叨. 而对于译者这样的学生时代学过苏联版政治经济学的读者来说, 却感到它相当贴切地为你补上了对欧美金融市场了解的不足. 尤其是作者在使用某些术语上的 "旧痕迹", 并不会使你感到突兀, 反而

①这是最近邀请施利亚耶夫到香港访问的香港中文大学教授周迅宇告诉译者的.

有点“似曾相识感”. 一个典型的例子是“资本 (капитал)”这个术语. 在本书中, 它专门指一个证券组合的价值. 在英文文献中, 对它适用的术语是“价值 (value)”, “资金 (fund)”, “财产 (wealth)”等等. 但是没有人会用 capital (资本). 英文版把它全改成了 value 或 fund. 而我们仍然把它译成“资本”. 其实它并不会引起误解, 但却是本书的某种“特色”. 至于其他术语的翻译, 我们尽量采用 1993 年全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》中所刊载的名词, 以及参考了一些已出版的专业书籍. 但偶而也有一些我们自作主张的翻译. 证券市场术语的翻译在国内还没有统一. 例如, call 作为期权, 在国内有“买入期权”、“买权”、“看涨期权”等多种翻译. 在本书的俄文版中, 对这样的术语常常会有音译和意译两种翻译. 而其意译刚好是“买入期权”, 于是我们当然也采用“买入期权”, 而不用“看涨期权”等等. 这或许也是俄文版给我们带来的某种便利.

尽管作者可能原来对金融业界确实是“几乎一无所知”, 但是从数学视角来看, 世上大概谁也比不上作者对随机金融数学全部领域更为全面精通. 这或许也说明了为什么从 1990 年代初起, 作者全身心地投入了金融数学研究, 并在俄罗斯带领出一支精锐的金融数学和精算数学的研究队伍. 事实上, 我们从上面列出的施利亚耶夫的专著中就可看到, 虽然这些专著分属概率统计学科的许多相当不同的领域，却又几乎都是在随机金融数学中得到深刻应用的强有力的工具. 这里不但是“鞅论”已经成为表达金融学核心的“资产定价基本定理”的基本语言, “随机过程的统计”、“统计试验和决策”是实证金融分析的基本手段, “随机过程的极限理论”是连续时间金融学的理论基础, “最优停止法则和 Stephan 问题”是美式期权定价的基本模型, 即使是很专门的“临近性和统计不变原理”也被施利亚耶夫及其学生用来为原来不够严谨的 Ross 的 APT (套利定价理论) 提供了更确切的理论描述. 这使得作者在本书中叙述随机金融数学的理论时, 比任何其他专著更为全面透彻、淋漓尽致.

本书共分两卷. 每一卷都包含四章. 第一卷的副题为: 事实, 模型. 第二卷的副题为: 理论. 这两卷的内容既相互联系, 又相对独立. 事实上, 读者完全可把本书当作一本“随机金融数学全书”来读. 每一位读者都可只挑其中自己最感兴趣的部分来精读, 而对其他部分暂时泛读, 甚至不读.

第一卷的第一章是有关国际金融市场以及金融理论和金融工程的“事实”. 正如我们前面已经提到, 这短短几十页可看作一位前苏联数学家对西方金融市场和金融理论、金融工程的理解. 其中作者不但概述了金融市场的基本状况、金融学的基本概念以及 Markowitz 证券组合选择理论、资本资产定价模型 (CAPM)、Ross 的套利定价理论 (APT)、有效市场理论等等, 甚至还简要地介绍了理论上关系不大、但观念上密切相关的保险业和精算理论, 使读者对金融市场和金融理论有更广泛的了解. 对于非金融专业的读者来说, 这一章是非常难得的尽快进入金融领域的入门读物. 而即使是对于熟悉金融市场和金融学的读者来说, 也能从这一章中看到一位前苏联数学家独特的眼光. 其中尤其值得注意的是作者对有效市场的定义是与众不同的. 他

认为, 一个带有限种基本证券的金融市场称为对某信息流有效, 是指其中存在一种"折现"证券 (通常它就是无风险证券, 但并不限于此) 和某"局部等价" (这一概念比"等价"要弱) 概率测度, 使得所有基本证券关于这一"折现"证券的折现价格过程都关于这一概率测度成为鞅. 这样的定义不但比经典的"随机游走假设"之类或三种有效市场形式的定义更一般, 也比 Ross 提出的"有效市场就是无套利市场"说法在理论上更确切、更精细.

第一卷的后三章都有关金融学的随机"模型". 第二章阐述离散模型. 其中首先讨论金融资产价格的离散动态理论模型, 并且开门见山地提出, 在套利定价的框架中, Doob 分解、局部鞅、鞅变换等概念在价格模型的讨论中起本质作用; 接着讨论具体的价格演变的统计模型, 除了介绍已经广泛流传的移动平均模型、自回归模型及其各种组合的线性模型以外, 作者还相当详尽地介绍近 20 年发展起来的 ARCH 和 GARCH 类模型 (如所周知, 其主要倡导者 R. F. Engle 因此荣获 2003 年诺贝尔经济学奖) 以及随机波动率模型等非线性模型. 尤其是作者对它们在很大程度上都统一在高斯模型和条件高斯模型的观点上来进行分析. 此外作者还以相当大的篇幅来介绍混沌模型在金融资产价格模型中的应用. 由此也可看到作者的学术视野几乎无所不包, 他完全不把自己的立足点局限于他所精通的概率统计领域. 第三章阐述连续模型. 在这一章中我们同样可发现它所包含的内容远超过一般的金融数学教材和专著. 通常的基于布朗运动的随机分析以及由此派生的各种用扩散过程来描述的模型自然必不可少. 但作者把它放在第三、四节中来介绍, 其中也包括一些对常用的利率期限结构模型的叙述. 而它的更深刻的推广、目前多半还只在研究文献中讨论的半鞅模型则在第五节中作很精辟的介绍. 本章的第一节却是相当详细地介绍了稳定分布和稳定过程、Lévy 过程、双曲分布和双曲过程 (它们正是 Barndorff-Nielsen 于 1977 年所提出的), 以至更一般的无限可分分布等重要工具, 而第二节则介绍了在金融数学应用中独树一帜的分形布朗运动. 这一切都可能使得原来只熟悉用通常的布朗运动来为金融市场价格建模的读者大开眼界. 它们不但使读者在为金融市场实际建模时可使用的工具大大增加，并且在观点上也更上一层楼. 例如, 由此可以了解, 在连续时间金融学中作为起点模型的几何布朗运动, 只是 Lévy 过程以至一般的稳定过程、双曲过程等等的特例, 而这些更一般的过程及其分布则可能用来描述金融市场中的"厚尾"之类的"异常"现象. 通常的布朗运动也仅仅是一般的分形布朗运动的特例. 后者不但同样可用来描述某些"异常"现象，还是一个很难变成鞅的过程, 从而由它就能形成有套利机会的无效金融市场模型的例子. 第四章则又讨论金融数据的统计分析. 作者介绍了各种常用的金融统计方法: 金融数据的搜集和分析, 汇率、指数、"标记"等金融指标的统计分析, 一维分布的"正态异常指标" ("峰度"、"厚尾"等等) 的刻画, 有关波动率的各种分析, 还有起源于分形几何和混沌研究的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析等等. 这里不但罗列了所有常用的金融数据分析的方法, 并且还都有作者独特的见解. 例如, 关于波动率分析, 作者是这样开始的: "在金融数学中, 没有

一个概念像波动率概念那样引起众说纷纭, 争论不休, 真令人遗憾. ” 这一语就足以为许多读者拨开文献中的迷雾.

第二卷有关 “理论” 的四章的标题都很明确: “随机金融模型中的套利理论” 或 “定价理论”; 先是 “离散时间”, 再是 “连续时间”. 所有的讨论都是在所谓 (B, S)-市场的模型框架中讨论的. 这里的 (B, S) 并非 Black-Scholes, 而是 Bank account (银行账户)-Stock (股票). 作者没有用常用的 “证券市场” 这一术语, 似乎既要造成 Black-Scholes 的错觉, 又要强调 “银行账户” 作为无风险证券的作用.

所谓 “套利理论”, 就是指所谓资产定价的第一和第二基本定理; 粗糙地说, 即, 市场无套利机会等价于存在等价概率鞅测度, 使得所有证券的折现价格过程为鞅 (第一定理), 并且当市场完全时, 这样的鞅测度是唯一的 (第二定理). 这样的资产定价基本定理的雏形出现在 1978 年 Ross 的一篇论文中①. 在那里, 虽然其数学叙述还不够严谨, 但作者已经正确地提出需要运用凸集分离定理. 明确的资产定价基本定理是 1979 年在 Harrison-Kreps [214] 和 Harrison-Pliska [215] 中提出的, 但对离散时间只能对有限状态的情形证明; 对连续时间更是不知怎样严格陈述其条件. 对于离散时间的严格的资产定价第一基本定理的证明是 1990 年 Dalang-Morton-Willinger [92] 提出的. 其证明中用到相当艰深的 “可测选择存在定理”. 后来有不少改进的证明, 但仍然都不太容易理解. 对于连续时间半鞅模型的资产定价第一基本定理的严格叙述则是在 Delbaen 和 Schchermayer 的一系列研究中完成的 (参见 [97]–[101]; 也参见他们的新书: F. Delbaen and W. Schachermayer, 2006, The Mathematics of Arbitrage, Series: Springer Finance, Springer). 其中所应用的数学技巧更为细腻. 要向一般读者介绍这样重要而又十分深奥的定理, 对于任何写作金融数学专著或教材的作者来说, 都是莫大的挑战. 大部分作者对此都不得不采取含糊带过的态度. 而像本书作者那样原原本本地不回避任何一个难点 (尽管有时也要省略一些证明) 来进行透彻叙述的实在是绝无仅有. 不但如此, 作者更是高瞻远瞩, 抓住要害, 以他的统一观点来概述这方面的各种最新成果. 对于离散时间情形, 他指出文献中曾经出现过的各种 “无套利机会” 的定义以及各种鞅测度的存在条件实际上都是等价的 (第五章 §2e 定理 A*); 对于连续时间情形, 由于对于离散时间情形的简单推广已经不成立, 他对文献中所出现的对各种半鞅模型的各种 “无套利机会” 的修正定义以及各种鞅测度的修正存在条件, 都作了细致的讨论, 使最后结果一目了然 (第七章 §2b 定理 1–3 及其推论和反例). 在第一基本定理的证明上, 作者着眼于鞅测度的构造. 通常的金融数学著作中, 多半会叙述关于布朗运动情形的 Girsanov 概率测度变换定理, 而在这里, 我们更能读到 Girsanov 定理的离散版本和半鞅版本; 同时, 还能读到最早用于精算数学中的 Esscher 变换定理的各种版本. 而在第二基本定理的证明上, 作者强调的是局部鞅的表示定理. 这种表示定理有明显的金融意义. 由此作者也得到离散时间情

①Ross, S. A., 1978, A simple approach to the valuation of risky streams, *Journal of Business*, **51**, 453–475.

形下的非常一般的版本 (第五章 §4f 定理 B*); 然而, 在连续时间情形下, 虽然也能讨论局部鞅的各种表示, 但简单的第二基本定理的推广已经变得很困难. 作者对此也提出了一些值得探索的研究设想.

所谓 "定价理论"① 是指通过投资策略进行风险对冲来对未定权益进行定价的理论. 它其实是 Black-Scholes 期权定价理论原来的思想. 作者通过 "(对冲) 上价格" 和 "(对冲) 下价格" 的概念给出了离散时间的对冲定价公式, 并指出了它们与等价概率鞅测度之间的联系. 但对于连续时间情形, 这里很难再对一般的半鞅模型来进行讨论. 作者对此只限于对经典的 Black-Scholes 模型得到一些经典结果. Black-Scholes 原来的通过偏微分方程来求解的讨论对于严谨的数学家来说是不能完全令人满意的 (为什么期权价格是光滑函数等等). 作者指出, 有了 "鞅方法", 有关的问题都可迎刃而解. 在有关 "定价理论" 的两章中, 作者还详尽地讨论了美式期权的定价理论. 这里当然就要涉及最优停止问题和 Stephan 问题的研究. 此外, 在这两章中还有有关各种特种期权和债券市场的定价问题讨论.

由此可见, 本书的内容极为丰富多彩, 讨论极为全面彻底. 正如亚马逊网上书店 (http://www.amazon.com) 的一篇网上书评所说: "本书反映了 (令人赞叹的) 俄国教学风格: 阐释理论的起源, 通常它通过某些特殊的问题; 然后, 对于所提出的问题谨慎展开精心制作的数学理论; 最后, 揭示问题的本质, 并生成漂亮的结果." "追随本书的思路, 你可以看到作者对金融数学的满腔热情和深刻理解." 每一位对随机金融数学有兴趣的本书读者, 即使只读了其中的一小部分, 都会感到获益匪浅. 当然, 本书的篇幅较大, 对概率论、随机过程等方面的数学预备知识要求较高. 这可能会对阅读本书带来一定的困难. 但是本书的上述叙述风格使人不得不叹服作者的思绪周密清晰而引人入胜. 一些很艰深的内容常常在充分的铺垫下, 即使不追究那些参考文献的证明细节, 也都变得相当容易理解. 这使得每一个有兴趣的读者都会感到这是一本值得时时参考, 反覆咀嚼的必备书. 译者自从 2000 年起开始阅读本书的英文版以来, 对此有过许多深切的感受.

本书的翻译期间正是国家科技部 973 项目《金融风险控制中的定量分析与计算》(项目编号：2007CB814900) 的立项期间. 现在这一项目已经立项. 而本书译者作为该项目及其子项目《金融创新产品的设计和定价》(课题编号：2007CB814902) 的成员, 也已获得该项目的资助. 我们项目组的同仁们都感到本书的翻译出版将对本项目开展研究有很大的促进. 因此, 本书的翻译出版应该作为该项目的一项成果. 译者在此特别声明这点, 并对项目资助表示感谢. 当然, 由于本书的涉及面非常广, 而译者的学识又相当有限, 尤其是金融学和概率论都并非译者原来的 "科班" 专业, 这使得译者在翻译本书时常有捉襟见肘之感. 再加上多年来很少用俄文, 而本书作者

①俄文原文为 "теория расчетов", 它的本意为 "计算理论", 其中并没有明确的 "pricing (定价)" 的含义. 但这里我们还是采用了英文版的翻译 (theory of pricing), 把它译成 "定价理论".

又惯用带一些说明语括号的复杂俄文长句子, 一时里曾使译者不知怎样把它表达为易读的中文[①]. 译文的不当之处在所难免, 敬请本书的读者和有关领域的专家批评指正.

史树中
2007 年 9 月
于北京大学光华管理学院

[①] 译者后来才慢慢适应作者的这种表达风格. 为接近作者的这种表达方式, 译者也用类似的带说明语括号的中文来翻译. 这种长句的特点在于, 如果不计那些括号, 它已经是一个完整的句子; 而把括号去掉, 它就变成一个表达得更清楚、但读起来会感到拗口的很长的句子.

前　言

作者的意图在于:

- 挑选和阐述那些对于在不确定条件下运行的金融市场模型中所涉及的随机分析和计算来说必要的、并且可能有益的材料;
- 介绍随机金融数学的基本概念、观念和结果;
- 给出在随机金融工程中的各种计算上的应用.

作者也随时考虑那些在分析市场风险时强调概率统计观念和随机分析方法的“金融数学与金融工程”专业教师的查询需要.

副标题“事实. 模型. 理论”并不能更好地反映作者所形成的叙述特征和风格,它在很大程度上是作者(在莫斯科、苏黎世、奥尔胡斯等地的)一系列讲演的听众“反馈”结果.

例如,学数学的听众总是表明他们不仅对“理论”的纯粹数学问题感兴趣,并且也对有关现实金融市场及其运行“事实”感兴趣. 正是由于这种情况,促使作者把第一章用于描述这种市场中出现的关键对象和结构,确定金融理论和金融工程的目标和任务,以及讨论在分析金融市场时某些概率统计观念体系的历史和形成的问题.

另一方面,熟悉比如证券市场和证券交易的听众,对于在构造金融指标(价格、指数、汇率等等)的动态模型时所运用的(或者可能有用的)各种随机过程以及(对风险、对冲策略、合理期权价格等等)进行这样那样的计算,显示出很大的兴趣.

第二章和第三章就以此为目标,讲述各种随机“模型”,既有离散时间情形,也有连续时间情形.

作者认为,这两章中的有关随机过程理论的材料对于广大的读者群都是有益的,

而不仅只与金融数学有关.

这里我们想特别强调, 在离散时间情形下, 我们描述随机序列的演变通常从它的分解为可料成分和鞅成分的*Doob*分解出发. 这就说明了, 为什么人们通常把所考察的方法称作 "鞅方法", 以及为什么 "鞅论" 在金融数学和金融工程中是自然而有用的数学工具.

渗透在我们今后的整个叙述中的 "可料性" 和 "鞅性" 概念从经济学视角来看也是非常自然的. 例如, 诸如证券组合和对冲那样的经济学概念, 在数学上干脆就汲取 "可料性" 概念来定义. 而诸如金融市场中的有效性和无套利性那样的概念, 则可汲取鞅和鞅测度的概念来求得其数学表现 (资产定价第一基本定理; 第五章, §2b).

基于 Doob 分解的随机序列的描述方法, 在连续时间情形下, 使人们以极为清晰而合乎逻辑的方式转向 (非常广的) 半鞅类 (第三章, §5a). 作为一个随机过程, 半鞅可表示为有界变差过程 ("缓慢变化" 成分) 和局部鞅 (它在许多情形下是 "快速变化" 成分, 例如, 在布朗运动情形下, 就是那样) 之和; 这使它具有这样的引人注目的性质: 对它同样可定义随机积分, 从而用这样的过程来为金融指标建模时开辟了广泛应用随机分析的途径.

第四章 ("统计章") 期待对金融数据的经验分析中必定会遇到的现实统计 "原材料" 形成一些观念.

基于主要有关外汇交易 (它们的金融市场带有国际特征, 并且是最大的金融市场之一, 每天的交易量达到几千万亿美元) 的统计数据, 我们指出, "收益" 随机变量 (参见第二章 §1a 中的 (3)) 有带 "厚尾" 的分布密度, 并且在中心区域有强 "峰度". 在这些量随时间变化的性态中可观察到具有 "聚集性" 和 "强后效性" (形象地说, "价格记得过去"). 我们揭示 "收益" 量波动率 (变化率) 的一系列特征的分形结构.

当然, 为恰当反映金融指标的实际动态变化, 在建立模型时应该考虑所有这一切; 尤其是当目的在于预言它们的未来运动时, 这点就变得非常本质.

"理论", 尤其是套利理论, 专门在第五章 (离散时间) 和第七章 (连续时间) 中介绍.

这里的中心点是第一和第二资产定价基本定理.

"第一定理" (带某种保留条件) 断言, 金融市场无套利当且仅当存在所谓鞅 (风险中性) 概率测度, 使得 (折现) 价格关于它形成鞅. "第二定理" 描述满足完全性的无套利市场, 它保证人们有可能构建证券组合, 使得其资本复制偿付索求.

这两条定理事实上都值得冠以基本, 因为它们在 (成熟发展的) 鞅论框架中, 对 "无套利" 这一经济概念有可能赋以精确的数学含义.

第六章和第八章献给根据第一和第二基本定理的计算. 这里, 如同传统, 对各种 (欧式或美式) 期权 的合理价值计算和对冲策略计算的介绍占有很大篇幅; 期权就是所谓衍生金融工具, 它具有最为成熟的定价理论, 并且以此为例, 可更好地完整理解无套利市场上定价的一般原理和方法.

作者面临的问题自然不仅是所阐述的"有代表性的"材料的挑选, 并且还有阐述方式的挑选.

八章内容的上述叙述可给出一种衡量所挑选材料的广度的尺度. 然而, 尽管本书已经那样庞杂, 我们还是留下了金融理论及其应用的许多方面 (例如, von Neumann-Morgenstein 和 Arrow-Debreu 的经典理论, 它们的考虑"效用函数"最大值的投资者行为的最新版本, 以及还有对于应用来说重要的计算成果).[①]

读者将察觉, 作者经常采取以讲演者的姿态, 作出"什么—何地—何时 (what-where-when)"式的说明. 在离散时间情形下, 本质上引入了所有基本结果的证明. 在连续时间情形下, 通常限于 (鞅论、随机分析等等的) 许多结果的自身陈述, 并引用能找到证明的相应文献.

为世界科技出版社 (World Scientific) 写一本有关金融数学的书的建议是 Ole E. Barndorff-Nielson 教授在 1995 年初向作者提出的. 尽管作者接受了这一建议, 却只能在 1995 年中期开始草拟本书; 起初, 他曾经以为只需叙述离散时间情形. 然而, 随着本文著作的推进, 作者越来越相信, 不触及连续时间情形, 关于金融数学和金融工程的表达远不是完整的. 结果, 书中既给出了离散时间的叙述, 也给出了连续时间的叙述.

本书由两卷组成. 第一卷 ("事实. 模型") 包含第一章到第四章. 第二卷 ("理论") 由第五章到第八章所组成.

基本文稿本身的写作大致花费了作者两年时间. 有几个月时间花在书的样本的计算机打印、编辑和准备上; 这些工作是由俄罗斯科学院数学部的信息—出版部的 И. Л. Легостаева, Т. Б. Толозова 和 А. Д. Изаак 做的. 作者首先衷心感谢他们高度专业而又无比投入的协助; 同时, 还要感谢他们的宽宏大量: 当作者不断更改已经打印编辑好的本文, 向他们再次提出"最后"版本时, 他们每一次都不厌其烦.

作者感谢他在俄罗斯国内外的朋友和同行的帮助; 还要感谢莫斯科的精算和金融中心 (Актуарно-финансовый центр, АФЦ)、德国的 VW-项目 (Volkswagen-project)、丹麦奥尔胡斯的数学研究中心 (Mathematical Research Center, MCAA) 和分析金融中心 (Centre for Analytical Finance), 以及巴黎和莫斯科的 INRIA (法国国立信息和自动化研究所)-МГУ (国立莫斯科大学、略普诺夫 (А. М. Ляпунов) 研究所) 合作项目的大力支持和热情接待.

A. 施利亚耶夫 (А. Ширяев)
俄罗斯科学院斯捷克洛夫 (В. А. Стеклов) 数学研究所
莫斯科国立罗蒙诺索夫 (М. В. Ломоносов) 大学
1995—1997 于莫斯科

[①] 这一段落只有英文版中有, 在俄文版中已经删除. —— 译者注



施利亚耶夫

Альберт Николаевич Ширяев

(1934—)

俄罗斯科学院通讯院士(1997)，莫斯科大学功勋教授(2004)，莫斯科大学数学-力学系概率论教研室主任(1996)，俄罗斯科学院数学研究所随机过程统计实验室主任(1986)。

施利亚耶夫是现代概率论奠基人、前苏联科学院院士、著名数学家 A. H. 柯尔莫戈洛夫的学生。施利亚耶夫的科学活动，涉及概率论、数理统计和金融数学及其各种不同领域，出版了 20 多部书，150 多篇学术论文。本书被认为是随机金融数学方面最深刻的一本著作。

施利亚耶夫的社会科技、国际学术活动非常活跃，多次在重要的国际学术会议上作学术报告，参与许多学术研讨会的组织工作。曾担任：国际伯努利学会主席(1989—1991)，国际巴施里叶金融学会主席(1998—1999)，俄罗斯精算协会主席(1994—1998)。1985 年当选为大不列颠皇家统计学会荣誉成员。1990 年当选为欧洲科学院院士。1997 年当选为纽约科学院院士。

目 录

第一卷

事实. 模型

第一章　基本概念、结构和工具. 金融理论和金融工程的目标和任务

1. 金融结构和金融工具

按照现代观点 (参见, 例如, [79], [334] 和 [345]), 金融理论和金融工程要求研究金融结构的性质, 以及利用各种金融工具和金融运作, 考虑时间、风险和 (通常是随机的) 周围环境特征等因素, 力求以最合理的方式配置金融资源.

时间、动态变化、不确定性、随机性: 正是因为有这些元素, 使得 "概率统计" 理论, 诸如,

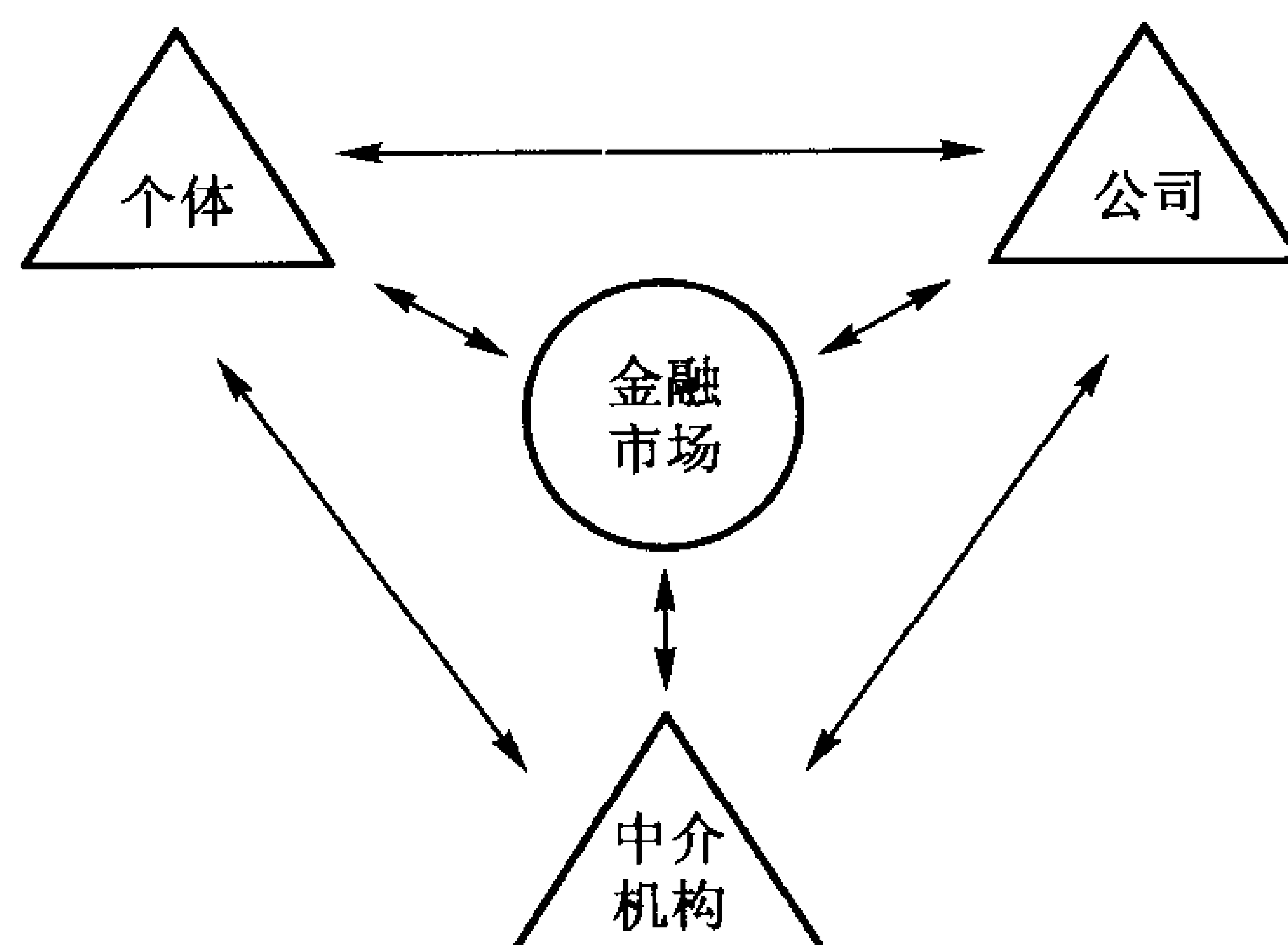
- 随机过程,
- 随机分析,
- 随机过程统计,
- 随机最优化

形成了本书中所运用的适合金融理论和金融工程需要的数学工具.

§1a. 关键对象和结构

1. 我们可区分出下列涉及金融理论的关键对象和结构, 它们被用来定义和说明金融论题的特性, 以及金融数学和金融工程的目标和工具:

- 个体,
- 公司,
- 中介机构,
- 金融市场.



所画出的框图指出, 在金融的理论和实务中, 对上述四种结构之间, 就如上图那样, 赋以金融市场中心地位, 并且它是随后叙述的金融的数学理论首先关注的结构.

2. 个体: 他们的金融活动服从于 "消费—投资" 问题的求解. 个体既作为消费者 ("是现在消费得多些") 又作为投资者 ("还是现在投资使将来钱更多? ") 的双重行为, 导致一个最优化问题的研究, 它在数理经济学上被陈述为消费—储蓄问

题 (consumption-saving) 和投资组合决策问题 (portfolio decision making). 在效用和偏好理论的框架下, 第一个问题依靠 (von Neumann-Morgenstein) 关于在不确定条件下个体的理性行为的公理来处理, 它通过定量比较, 例如, 通过求效用函数 (utility functions) 的均值, 给出某种类型的最偏好行为. 个体面临的"投资组合决策"问题可粗略地描述为金融手段 (考虑可能的风险) 的最优 (投资) 配置, 这里的金融手段比如包括不动产、黄金、证券 (债券、股票、期权、期货等等) 之类. 建立投资组合中的分散化观念 (参见 §2b) 是诸如"不要把鸡蛋放在一个篮子里 (Don't put all your eggs in one basket)", "毫无风险就毫无收益 (Nothing ventured, nothing gained)"之类的流传格言的体现. 下面, 我们将描述个体在一个证券市场中所面临的各种机会 (取决于其初始资本量).

公司 (企业、厂商等等): 具有诸如"土地"、"工厂"、"机器"之类物理上可触摸的贵重物, 也具有"组织机构"、"市场"、"专利"等等类型的贵重物; 它运营业务机构, 实施业务协作, 开展技术生产治理. 为增加发展生产的投资, 公司时时要发行股票, 而有时也发行债券 (就如政府那样). 公司的治理活动应该由股票持有者和债券所有者的利益的最大满足来导向.

中介机构 (金融中介机构): 它们是银行、(共同基金 (mutual funds) 类的) 投资公司、养老基金、保险公司等等. 从事期权、期货合约等等交易的交易所 (exchanges) 也可归为中介机构.

举世闻名 (1997 年) 的交易所诸如 NYSE (New York Stock Exchange, 纽约股票交易所), AMEX (American Stock Exchange, 美国股票交易所), NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automated Quotation System, 全国证券交易商自动报价系统协会, The NASDAQ Stock Market, 纳斯达克股票交易所), NYFE (New York Futures Exchange, 纽约期货交易所), CBOT (Chicago Board of Trade, 芝加哥商品交易所) 等等, 它们全在美国.[1)]

3. 金融市场是货币和外汇市场、贵金属市场、包括证券在内的金融工具市场的总称.

在金融工具市场中, 通常可区分为

- **基本** (一级) 工具,
- **衍生** (二级) 工具;

后者是在 (更初等的) 基本工具的基础上构造的复杂金融工具.

基本金融工具包括下列证券:

[1)] 以后我们将经常完全面向在美国的金融机构及其进行的金融活动. 其主要原因在于美国的金融市场有着根深蒂固的传统 ("华尔街"!); 也就是说, 有许多金融创新与这个市场相联系. 同时, 对于美国市场有浩瀚的文献和无数的日常出版物, 以及众多的专著、教科书、参考书等等来研讨它. 对此, 读者容易通过书末所引的文献来核对.

- 银行账户,
- 债券,
- 股票.

衍生金融工具包括下列证券:

- 期权,
- 期货合约,
- 权证,
- 掉期,
- 组合期权,
- 价差期权,
- 复合期权等等.

我们注意到, 金融工程常常被定义为衍生金融工具的制作 (目的是为了增加资本和降低风险, 后者是由未来市场状况的不确定性所引起的).

我们现在来描述金融市场的若干基本要素.

§1b. 金融市场

1. 货币的起源要追溯到人们学习 "物物交换" 的时代, 即把人们的 "所有物" 换为 "想要物" 的时代. 这种相互关系体系至今仍然有效: 我们在商品交换中用货币去买我们想要的货品, 而出售者又转而用所得到的货币去购买别的物品; 与此同时, 货币也是服务的支付手段.

现代技术在货币流通的方式上有一场革命. 当前在美国流通的全部美元量中只有 8% 以银行票据和现钱作为支付手段. 主要货币支付是通过电子通信用支票和信用卡来传输的.

货币除了它的 "流通介质" 功能以外, 它还扮演重要的 "价值度量" 和 "储存手段" 的角色 ([108]).

2. 外币: 作为其他国家的货币 (其定量取决于汇率等等), 它是要求用 "外国货币" 来实现的国际经济联系的支付手段; 它的储备量是国民经济繁荣昌盛的重要指标.

经济全球化促成了多个不同国家的货币联盟, 承诺一起协调她们的货币和信贷政策以及调节她们之间的汇率关系.

著名的布莱顿森林 (Bretton-Woods) 货币信贷体系就是一个例子. 1944 年, 在美国新罕布什尔州 (New Hampshire) 布莱顿森林举行了一次国际贸易主要参与者的会议. 在这次会议上, 一致同意维持一个以 "布莱顿森林体系" 著称的货币体系, 其中货币汇率只能在一个非常狭窄的范围中偏离其官方宣布的水平: 每边不超过 1%. 同时, 这些平价汇率都是用美元来计算的, 而为起动和管理这一体系, 有关国家建立

了国际货币基金组织 (International Monetary Foundation, IMF).

然而, 由于触犯主要货币 (美元、德国马克、日元) 的 1973 年的货币金融危机, 布莱顿森林体系被认为已经耗尽其作用, 而被浮动货币汇率所取代.

1979 年 3 月, "共同市场" (欧洲经济共同体 (European Economic Community, EEC) 的大多数成员国创立了欧洲货币体系. 这个体系规定参加国的货币汇率的变化通常必须落在官方中心平价率的 $\pm 2.25\%$ 的范围内. 这时, 如果某些国家的汇率被认为处于离开这一 "走廊" 的危险, 那么这些国家的中央银行必须各自进行相互干涉, 以防止这一事件的继续进展和保证这些国家之间的汇率的稳定性. (这种状况说明, 为什么类似的体系也称为 "校正浮动汇率体系".)

另外的货币联盟的例子是加勒比沿海、中南美洲、东亚等各种国家群体之间的协调, 它们把本国货币的汇率紧盯某些强有力的 "领导货币". (详情参见 [108; 459–468 页].)

3. 贵金属 (锭): 黄金、白银、白金以及其他贵金属 (其中包括铂属元素: 铱、锇、钯、铑、钌), 它们在国际货币信贷系统中曾在以前 (尤其是在 19 世纪和 20 世纪初) 起着重要作用, 并且至今还在继续起作用.

在专著 [108] 的 "金本位" 一节 (459–460 页) 中, 关于黄金的作用叙述如下: "几乎在整个 19 世纪和部分 20 世纪中, 黄金在国际货币信贷体系中起着中心作用. 金本位纪元起始于 1821 年, 当时正是拿破仑战争结束不久, 大英帝国宣称, 英镑可兑换为黄金. 美利坚合众国立即紧随其后, 宣称美元也能兑换黄金. 从 1880 到 1914 年, 金本位就四处开花, 但在第一次世界大战以后, 再也没有恢复到当年的盛况. 1971 年它的痕迹完全消失, 当时美国国库最终宣布废除以固定价格买卖黄金."

当然, 黄金在国际货币体系中继续起着重要作用. 例如, 政府广泛运用黄金储备通过中央银行来偿付外债.

由上述可得, 目前人们可清晰地把在外币市场中调节中央银行活动的国际货币信贷体系的发展, 区分为三个阶段: "金本位" 、"布莱顿森林体系" 和 "校正浮动汇率体系".

4. 银行账户可看作债券型证券 (参见下面的第 5 点), 其本质在于, 银行有义务对人们的账户支付确定的利息. 在以后的讨论中, 银行账户不止一次地出现, 在许多情况下, 它是各种证券价格方便的 "度量单位".

通常要区分两种计算利息的基本方式:

- 一年 m 次 (单利),
- 连续计算 (复利).

如果你在一家银行开启一个以利率 $r(m)$ 一年支付 m 次利息的账户, 那么当你

的初始资本为 B_0 时, N 年以后, 你的总值就变为

$$B_N(m) = B_0 \left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{mN}, \tag{1}$$

而在 $N + k/m$ (一个分数值, 其中 $0 \leqslant k \leqslant m$) 年时, 你的资本将为

$$B_{N+k/m}(m) = B_0 \left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{m(N+k/m)}.$$

在以利率 $r(\infty)$ 连续计算利息的情形下, 初始资本 B_0 在 N 年后, 将等于

$$B_N(\infty) = B_0 e^{r(\infty)N}. \tag{2}$$

显然, 随着 $r(m) \to r(\infty)$ 和 $m \to \infty$,

$$B_N(m) \to B_N(\infty).$$

如果连续计息的利率 $r(\infty) = r$, 那么对应它的 "一年支付 m 次的利率" $r(m)$ 由下列公式来确定:

$$r(m) = m(e^{r/m} - 1), \tag{3}$$

由此可得, 按照 $r(m)$ 所对应的等价连续利率 $r = r(\infty)$ 可由下列公式求得:

$$r = m \ln \left(1 + \frac{r(m)}{m}\right). \tag{4}$$

在 $m = 1$ 的特殊情形下, 对于 $\widehat{r} = r(1)$ 和 $r = r(\infty)$, 我们得到对于这些利率的下列相互转换公式:

$$\widehat{r} = e^r - 1, \qquad r = \ln(1 + \widehat{r}). \tag{5}$$

除了通告 "年利率 $\widehat{r}$" 以外, 银行还可能通告 "年贴现率 $\widehat{q}$" 的值, 它意味着人们必须在账户中存入 $B_0 = B_1(1 - \widehat{q})$, 才能在一年后得到总量 $B_1 = B_1(1)$. $\widehat{r}$ 和 $\widehat{q}$ 之间的关系显然为

$$(1 - \widehat{q})(1 + \widehat{r}) = 1,$$

因此,

$$\widehat{q} = \frac{\widehat{r}}{1 + \widehat{r}}.$$

可能提出这样的问题: (假定连续计息利率为 $r = a/100$) 要使你的资本加倍, 需要多少 N 年? 很明显, N 由下列关系式来确定:

$$2 = e^{aN/100},$$

即,

$$N = \frac{\ln 2 \cdot 100}{a} \approx \frac{70}{a}.$$

在实际中 (比如每年计息两次), 人们经常运用所谓**72 法则**: 如果利率是 $a/100$, 那么经过 $72/a$ 年后资本加倍.

为使读者对各种方式的利息计算 ($m = 1, 2, 3, 4, 6, 12, \infty$) 的资本增长有一个印象, 对于 $t = 0, 1, \cdots, 10$, $B_0 = 10000$ 以及 $r(m) = 0.1$, 我们引入对应于所有 m 的值 $B_t(m)$ 的表:

$t \diagdown m$	1	2	3	4	6	12	∞
0	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
1	11000	11025	11034	11038	11043	11047	11052
2	12100	12155	12174	12184	12194	12204	12214
3	13310	13401	13433	13449	13465	13482	13499
4	14641	14775	14821	14845	14869	14894	14918
5	16105	16289	16353	16386	16419	16453	16487
6	17716	17959	18044	18087	18131	18176	18221
7	19487	19799	19909	19965	20022	20079	20138
8	21436	21829	21967	22038	22109	22182	22255
9	23579	24066	24238	24325	24414	24504	24596
10	25937	26533	26743	26851	26960	27070	27183

5. 债券: 这是政府或银行、企业、股份公司以及其他金融机构以积累资本为目的所发行的债务契约.

债券在许多国家都是非常普及的, 并且在债券上的存款的绝对数量要超过在股票或其他证券上的投资. 它们的主要吸引力 (尤其是对于保守的投资者来说) 在于: 对于债券来说, 清帐是在预定利率规范基础上支付的, 并且确保在规定的时间偿还全部借款. 当然, 人们不能确凿地肯定政府债券或公司债券是无风险金融工具. 比如某个濒临破产的公司在支付利息时违约的风险当然总是存在的. 在这一含义下, 政府债券比公司债券的风险要小, 不过, 公司支付的利息也要比政府支付的利息要高.

债券购买者自然渴望知晓他想购买的债券的发行公司的风险程度. 人们可在一系列出版物 (例如 "标准普尔债券指南 (Standard & Poor's Bond Guide)") 上找到各种债券发行金融机构的评级. 风险越小的公司 (即, 评级较高的公司) 支付的利息越少. 而相应的是, 评级较低的公司发行债券就要通过支付较高的利息来吸引购买者.

我们可用几个数值参数 ((i)–(vii)) 来刻画在时刻 $t = 0$ 发行的每一种债券:

(i) 面值 (par value, face value) $\mathsf{P}(T, T)$, 即在到期日向债券持有者支付的总额;

(ii) 到期日 (债券到期的年份, the year the bond matures) T, 其中 T 是债券的生命期 (maturity) (对于短期债券的生命期通常是一年或更短, 对于中期债券是 2–10 年, 而对于长期债券 $T \geqslant 10$ 年);

(iii) 债券利率 (息票收益率) (bond's interest rate, coupon yield) r_c 决定红利, 它是由

债券发行者向债券持有者支付的量, 并等于 "$r_c\times$ (面值)";

(iv) 在时刻 $t=0$ 发行的 T 年到期的债券的*原始价格* (the original price of bond) $\mathsf{P}(0,T)$.

如果在时刻 $t=0$ 发行的债券比如 $T=10$ 年到期, 面值为 \$1000, 息票利率 $r_c=6/100$ (=6%), 那么以 \$1000 (原始价格) 购买的债券, 将在十年内获得 \$600 盈利, 它是下列各项之和:

面值		\$ 1000
+		
10 年利息	$1000\times6\%\times10=$	\$ 600
−		
购买价格		\$ 1000
....	....	
=		\$ 600

在时刻 $t=0$ 购买、T 年到期的债券的持有者当然可在这 T 年中都持有它, 以获得债券利息和 (在时刻 T) 获得债券面值. 然而, 其实他也可认为把债券持有到到期日 T 是无利可图的, 例如, 如果*通货膨胀率* $r_{\text{inf}}\geqslant r_c$. 在这种情形下, 债券持有者可运用他的权利 (一般来说, 可在任何时刻 t, $0\leqslant t\leqslant T$) 出售 (偿还期在时刻 T 的) 债券, 其价格为其在时刻 t 的

(v) *市值* $\mathsf{P}(t,T)$.

显然, $\mathsf{P}(0,T)$ 是债券在发行时刻的 (原始) 价格, 而 $\mathsf{P}(T,T)$ 是它的面值. (在上述例子中, 两者都等于 \$1000.) 虽然在原则上, 市值 $\mathsf{P}(t,T)$ 有可能高于面值 $\mathsf{P}(T,T)$, 但在一般情况下, 总有不等式 $\mathsf{P}(t,T)\leqslant\mathsf{P}(T,T)$.

现在假定债券持有者在债券发行两年后出售债券, 债券对于 $t=2$, $T=10$ 的市值 $\mathsf{P}(2,10)$ 变为 \$800. 于是他购买债券并持有两年的盈利如下:

市值		\$ 800
+		
利息	$1000\times6\%\times2=$	\$ 120
−		
购买价格		\$ 1000
....	....	
=		−\$ 80

这样, 他的盈利实际上是*负的*, 即其损失为 \$80. 另一方面, 以市值 $\mathsf{P}(2,10)=$ \$ 800 购买债券的投资者将在以后的 8 年中盈利:

面值	$ 1000
+	
利息	$1000 \times 6\% \times 8 =$ $ 480
−	
购买价格	$ 800
·········	···························
=	$ 680

我们强调, 确定息票支付量的债券利率 r_c 在债券的整个生命期中是不变的. 然而, 债券市值 $\mathsf{P}(t,T)$ 是随时间波动的. 这个值是多重经济因素作用叠加的结果: 需求和供给, 其他证券的收益率, 投机活动等等. 把 $\{\mathsf{P}(t,T)\}$ 看作随时刻 t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 演变的随机过程, 我们看到, 这是一个在下列含义下的条件过程: $\mathsf{P}(T,T)$ 的值是固定的, 并等于债券的面值.

图 1 画出了市值 $\mathsf{P}(t,T)$ 在时间区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上可能有的随 t 变化的波动, 而它在到期日 T 的值则 "达到" 预定的面值 $\mathsf{P}(T,T)$.

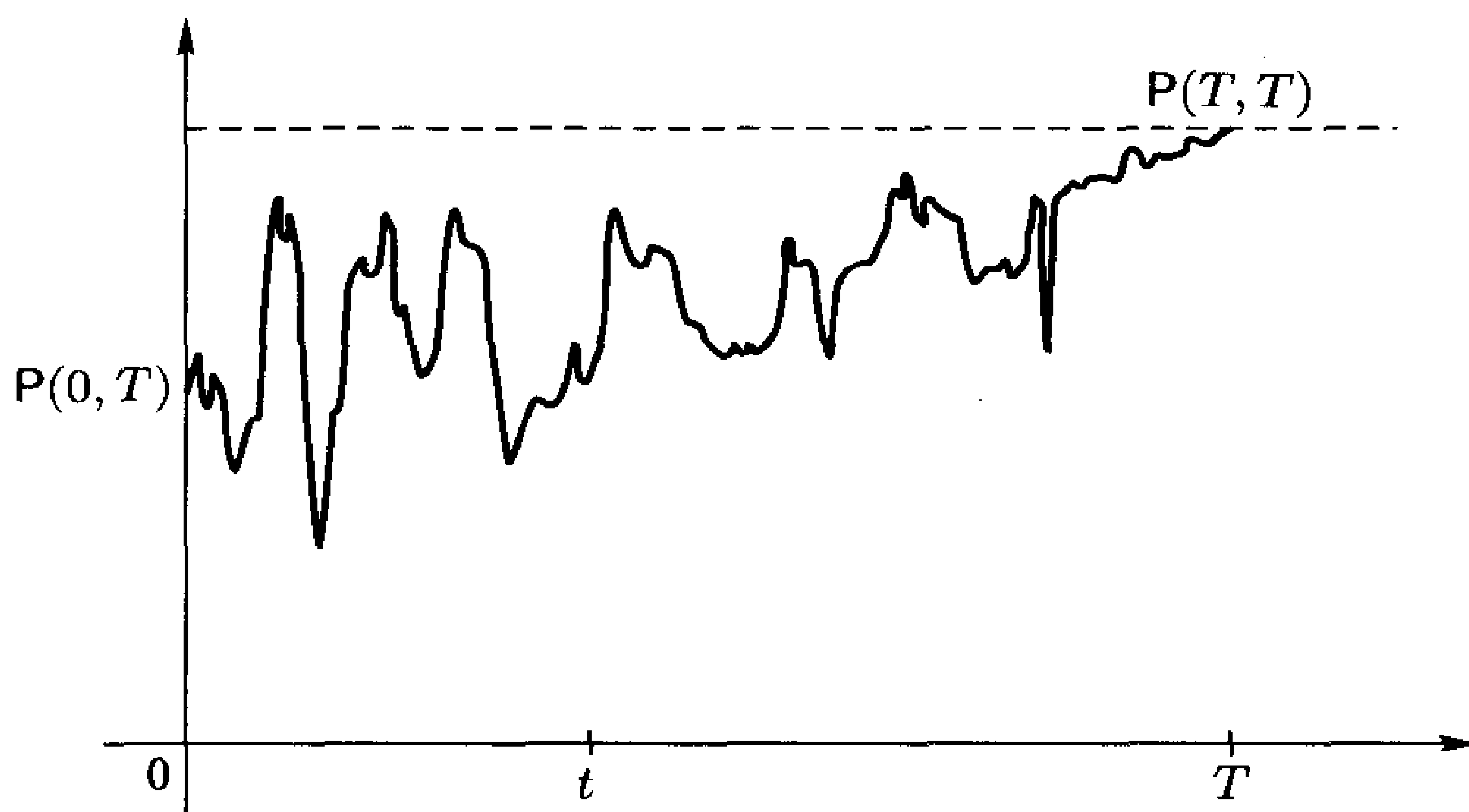


图 1 债券市值 $\mathsf{P}(t,T)$ 的演变

还有一个常用的债券特征为

(vi) 当前利率 (the current yield) $r_c(t,T)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, 它确定为 "年利息" 与 (当前) 市值之比,

$$r_c(t,T) = \frac{r_c \cdot \mathsf{P}(T,T)}{\mathsf{P}(t,T)}, \qquad 0 < t < T, ①$$

它使得不同的债券之间有可能进行相互比较. (在上述例子中, $r_c(0,10) = r_c = 6\%$, $r_c(2,10) = 6\% \cdot 1000/800 = 7.5\%$.)

此外, 还有下列大概是最重要的债券特征, 它能够使人们既考虑利息支付、又考虑到期日偿还的 (到余下的有效期的) 盈利, 并由此给出了另一个比较不同债券的可能性; 这一特征就是

① "$0 < t < T$" 是英文版加上的. —— 译者注

(vii) 到期盈利 (用百分比度量) (the yield to maturity) 或盈利率

$$\rho(T-t,T)$$

(这里 $T-t$ 是债券余下的生命期); 它使得在区间 $(t,T]$ 上的利息支付的折现值与面值之和等于债券的当前市值; 这样一来, 盈利率定义为下列方程的根 $\rho = \rho(T-t,T)$:

$$\mathsf{P}(t,T) = \sum_{k=1}^{T-t} \frac{r_c \mathsf{P}(T,T)}{(1+\rho)^k} + \frac{\mathsf{P}(T,T)}{(1+\rho)^{T-t}}. \tag{6}$$

(这里的度量单位为一年, $t = 1, 2, \cdots, T$.)

在市值 $\mathsf{P}(t,T)$ 总是与面值 $\mathsf{P}(T,T)$ 重合的情况下, 由这一定义得到 $\rho(T-t,T) \equiv r_c$.

在图 2 中画出了典型的"盈利曲线", 其中 $\rho(s,T)$ 的曲线图像是作为余下时间 $s = T-t$ 的函数来画出的.

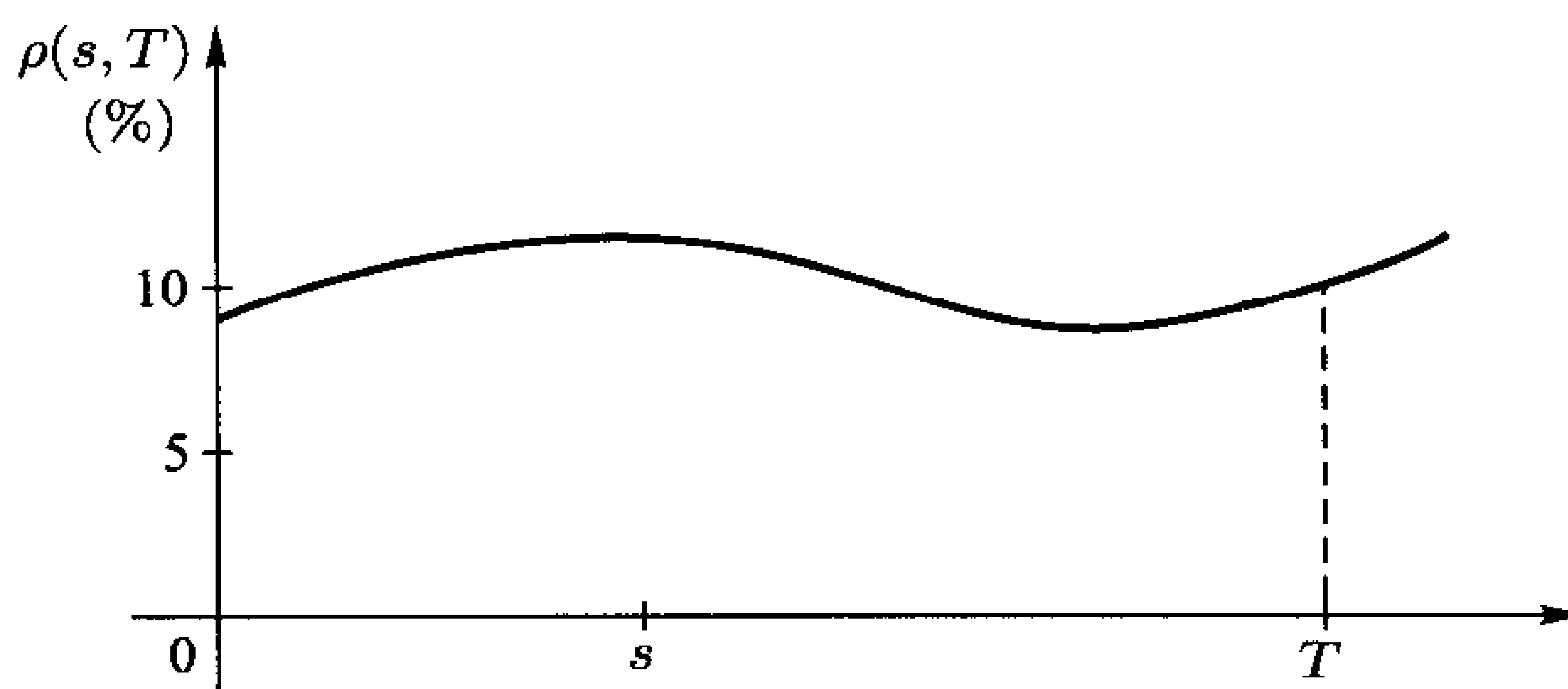


图 2 作为 $s = T-t$ 的函数的盈利率 $\rho = \rho(s,T)$ 的曲线

在上述叙述中, 我们没有触及市场价格 $\{\mathsf{P}(t,T)\}$ 的结构问题, 比如, 在概率论框架中来考察的结构问题. 对于这样一个相当不简单的问题, 我们将在第三章中进一步讨论.

这里我们仅注意到, 价格 $\{\mathsf{P}(t,T)\}$ 的结构和动态变化的概率描述通常采用下列两种方式:

a) 直接规定价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 的时间演变 (基于价格的方式, a price-based approach);
b) 间接规定, 其中, 首先规定的不是价格 $\mathsf{P}(t,T)$, 而是盈利率 $\{\rho(T-t,T)\}$ 的时间结构, 或者是"利率"型类似特征的时间结构 (期限结构的方式, a term structure approach).

我们还察觉到, 债券价格和盈利率之间互相换算的联结公式 (6) 是按照"单利"模式来构造的 (比较 $m = 1$ 的 (1)). 也不难给出"复利"模式下的相应公式 (比较 (2)), 即在连续计息情形下的相应公式.

正如我们已经注意到, 债券是由各种金融机构为了各种目的而发行的.

> *公司债券* (corporate bonds) 的发行目的是为发展生产、现代化、支付运营费用等等积累资本.
>
> *政府债券* (government bonds) 用于各种政府规划, 偿还外债等等. 在美国, 政府债券就是国库券、中期国债、公债 (U.S. Treasury bills, notes, bonds),[①] 它们可通过联邦储备银行或经纪商来购买.
>
> *地方债券* (municipal bonds) 可被州政府、市政府等等用于支付各种项目 (道路、学校、桥梁等等的建设), 补充预算等等.

有关公司债券及其特征的信息可在许多出版物中找到 (例如, 参见 "纽约股票交易所 (New York Stock Exchange)" 中的 "纽约交易所债券 (New York Exchange Bonds)" 分册, 或 "美国股票交易所 (American Stock Exchange)").

关于债券信息的某种方式的表示可能以下列形式来获得:

`IBM-JJ15-7% of '01,`

它意味着所提到的债券是由 IBM 公司发行的, 利息在 1 月 (January) 15 日和 7 月 (July) 15 日支付[1)], 利率为 $r_c = 7\%$, 到期日是 2001 年.

当然, 在这些出版物中也有债券的面值及其当前市值的信息. (详情参见例如, 书 [469].)

6. 股票 (stock, stocks): 这是由公司、企业、厂商 (如同在债券情形下一样) 为增加资本而发行的*股份证券*. 股票基本上可分为两种样式: *普通股* (common stock) 和*优先股* (preferred stock), 持有它们在红利支付和风险程度上都有所不同.

普通股的持有者获得红利作为他对公司的利润 (收益) 份额, 其数量取决于公司的经营成果. 在公司破产的情形下, 投资者丧失其全部投资. 优先股则在失去其全部投资上的风险程度较小; 其红利发放是有保证的, 尽管一般来说, 红利的幅度不会随着公司的利润增加而增加.

还有其他样式的股票, 它们涉及参股的份额, 发放红利的特殊方式等等.

许多购买股票的投资者并非是被红利 (对应债券情形下的利息) 所吸引, 而是由于股票价格的波动, 他可通过比别人超前地低买高卖而有机会 "赚钱".

根据某些估计, 5 千多万美国人持有股票. (1992 年末, 2 418 447 名投资者持有 AT&T 公司的股票, 其股票总数为 1 339 916 615 股; 参见 [357].)

为买卖股票, 人们需要去找一家经纪行 (brokerage house), 这是成为股票交易所 (stock exchange) 会员的投资公司. 应该注意到, 尽管个体股民数在增长, 个体所持有

[①] bill, note, bond 的区别就在于债券的期限, 它们也可明确地译为: 短期国债、中期国债和长期国债. —— 译者注

[1)] 在欧洲利息通常一年发放一次, 但在美国是两次, 每隔 6 个月发放一次.

的实际股份数却在下降; 这是因为个体投资者通常不直接参与证券市场的活动, 而是通过 "机构投资者" (institutional investors), 其中包括共同基金 (mutual funds)、养老体系、保险公司、银行等等, 它们是包括股市在内的证券市场上的基本 "局中人".

股票交易是在各国的交易所中进行的. 最早的交易所看来是早在 17 世纪出现的阿姆斯特丹证券交易所 (1602), 其交易对象是股份公司的股票. 在传统上, 欧洲的 (证券) 交易所处于银行的有力控制之下. 与此同时, 美国的证券交易所是与银行系统分隔的 ([482; 第 10 页]).

(1997 年前后) 两个最大的美国交易所是 NYSE (New York Stock Exchange, 纽约股票交易所, 成立于 1817 年; 1987 年有 1366 个 "席位" (seats)) 和 AMEX (American Stock Exchange, 美国股票交易所, 它是在 1842 年创建的纽约路边交易所 (New York Curb Exchange) 的基础上于 1921 年形成的). 一家公司为了使自己的股票能在交易所上市, 它必须满足某些要求 (它的规模、利润等等). 例如, NYSE 这样要求公司: 税前所得 (计税前的利润, pre-tax earnings, pre-tax profit) 必须 2500 万美元以上, 股份数必须 110 万份以上; 市值必须 1800 万美元以上. 尤其是, 只有著名的大公司的股票才能在该交易所交易 (1993 年有 2089 家上市公司)①. 在 AMEX 交易的基本上是中等规模公司的股票; 在那里上市的公司有 841 家②.

NASDAQ (纳斯达克, National Association of Securities Dealers Automatic Quotations) 交易所是美国的另一家股票交易的大机构; 各种规模的上市公司有 4700 家, 其中有大公司, 有中公司, 也有迅速发展的小公司.

参与 OTC (Over-the-counter, 场外) 证券市场的公司数 (40 000 家左右, [357]) 引人注目. 这个市场如同 NASDAQ 那样, 没有类似 NYSE, AMEX 等等那样的中心场所. 交易是由经销商通过计算机电子通信来进行的, 而经销商就在自己的账户上买卖股票. 这种交易包括形形色色、五花八门的证券: 普通股与优先股、公司债券、美国政府发行的各种证券、地方债券、期权、权证、海外证券.

转向 OTC 的基本原因或者因为是小公司、新公司, 或者因为是公司股份数不多; 这就是说, OTC 对于公司的资本规模等等实际上没有要求 (或者说只有最起码的要求).

另一方面, 那些符合其他交易所要求的公司也经常转向 OTC, 只要 OTC 的 "交易谈判" 风格比 "组织良好的交易所" 系统所要求的更方便. 还可能有别的原因来转向 OTC 系统, 比如, 有的公司难以按 "大" 交易所的要求来披露其财务状况.

当然, 无论对于 "大" 投资者, 还是对于 "小" 投资者来说, 重要的是关于进行股票交易的公司状况、股票报价及其演变的信息. 同样重要的是还有有关 "整体" 经济状况、证券市场状况的信息, 它们都以某种 "综合" 指数、"一般化" 指数来表达.

从经济 "整体" 状况的信息的视角来看, 最著名的是道琼斯 (Dow Jones) 平均指

①截止到 2006 年底, NYSE 的上市公司为 2764 家. —— 译者注

②截止到 2007 年 6 月, NYSE 的上市公司为 859 家. —— 译者注

数和道琼斯指数. 平均指数有四种:

- 道琼斯工业平均指数 (Dow Jones Industrial Average, DJIA, 它取自 30 家工业公司);
- 道琼斯运输平均指数 (Dow Jones Transpotation Average, 它取自 20 家航空、铁路和运输公司);
- 道琼斯公用事业平均指数 (Dow Jones Utility Average, 它取自 15 家煤气、电力和能源公司);
- 道琼斯 65 综合平均指数 (Dow Jones 65 Composite Average, 它取自包括在上述三种平均指数内的 65 家公司).

注意, 比如, 通常就称为道 (Dow) 指数的 (综合) 指数 DJIA, 它由 30 家大型 ("蓝筹 (blue-chip)") 公司所构成, 但它并非是一个简单的算术平均指数, 而是根据有较高市值的公司的股票在综合指数中有较大的权重来形成的. 这样一来, 少数公司的股票价格的大变化可引起指数整体值的强烈变化 (就如经济的 "工业" 状况指标那样)[310].

(关于 Dow 的历史. 1883 年, Charles H. Dow 开始列出九家铁路公司和两家制造业公司的 "收盘价" 平均值表. 这些表被广泛流传运用, 并且为 Dow 及其同伙 Edward H. Jones 于 1889 年一起创建《华尔街日报 (The Wall Street Journal)》奠定了基础. 参见例如, [310].)

除了道琼斯指数以外, 广泛流传的指数有:

- 标准普尔 500 指数 (Standard & Poor's 500 Index, S&P500),
- NYSE 综合指数 (The NYSE Composite index),
- NASDAQ 综合指数 (The NASDAQ Composite index),
- AMEX 市值指数 (The AMEX Market Value index),
- Value Line,
- Russel 2000,
- Wilshire 5000,
- ······

标准普尔 500 指数 (不同于 "道琼斯") 目前是由大量公司来构成的 (总数为 500 = 400 工业公司 + 20 运输公司 + 40 公用事业 + 40 金融公司); NYSE 指数包括所有在纽约股票交易所上市的公司的股票, 如此等等.

(关于标准普尔 (Standard & Poor) 的历史. Henry Varnum Poor 自 1860 年起开始每年发布《公司统计的普尔手册 (Poor's Manual of Corporate Statistics)》, 比道琼斯公司首次每日发布 "收盘价" 平均值还要早 20 年. 1941 年, 普尔金融服务公司 (Poor's Finance Services) 与标准统计公司 (Standard Statistic Company) 合并, 后者是另一个金融信息搜集发布方面的领军公司. 这一联盟的结果使得所创建的标准普

尔公司变为金融统计的大型信息服务发布商 (参见, 例如, [310].)

除了上述类型的各种出版物以外, 人们还可通过 "NASDAQ" 电子系统获得 5000 多家参与 OTC 交易的公司的股票的 "买卖" 价格 ("bid price" 和 "ask price") 的即时信息①. 通过经销商, 经纪商可在任何时刻知晓其他经销商所报的买卖价格. 然后, 经纪商可直接与价格上看来对他更有吸引力的某个经销商进行 "交易接触".

经济全球化导致人们有必要不仅要知道本国公司的状况, 还要知道其他国家公司的状况. 相应的出版物也存在 (在美国采用这样的术语用法: 术语 "世界 (World)"、"世界范围 (Worldwide)" 或者 "全球的 (Global)" 是指包括美国市场在内的所有市场; 而术语 "国际的 (International)" 只指美国以外的外国市场).

关于 16 家国际 (International) 主要交易所的状况可从《华尔街日报 (The Wall Street Journal)》上得知, 它在其 "股票市场指数 (Stock Market Indices)" 版上登载这些交易所的每日收市指数及其与上一日相比的相对和绝对变化.

每个人都根据许多出版物 (甚至在日常报纸上) 熟知, 股价和各种金融指数值都总是以诡异混沌的方式变化.

这里我们以表明 DJIA 指数变化的图像为例 (见图 3).

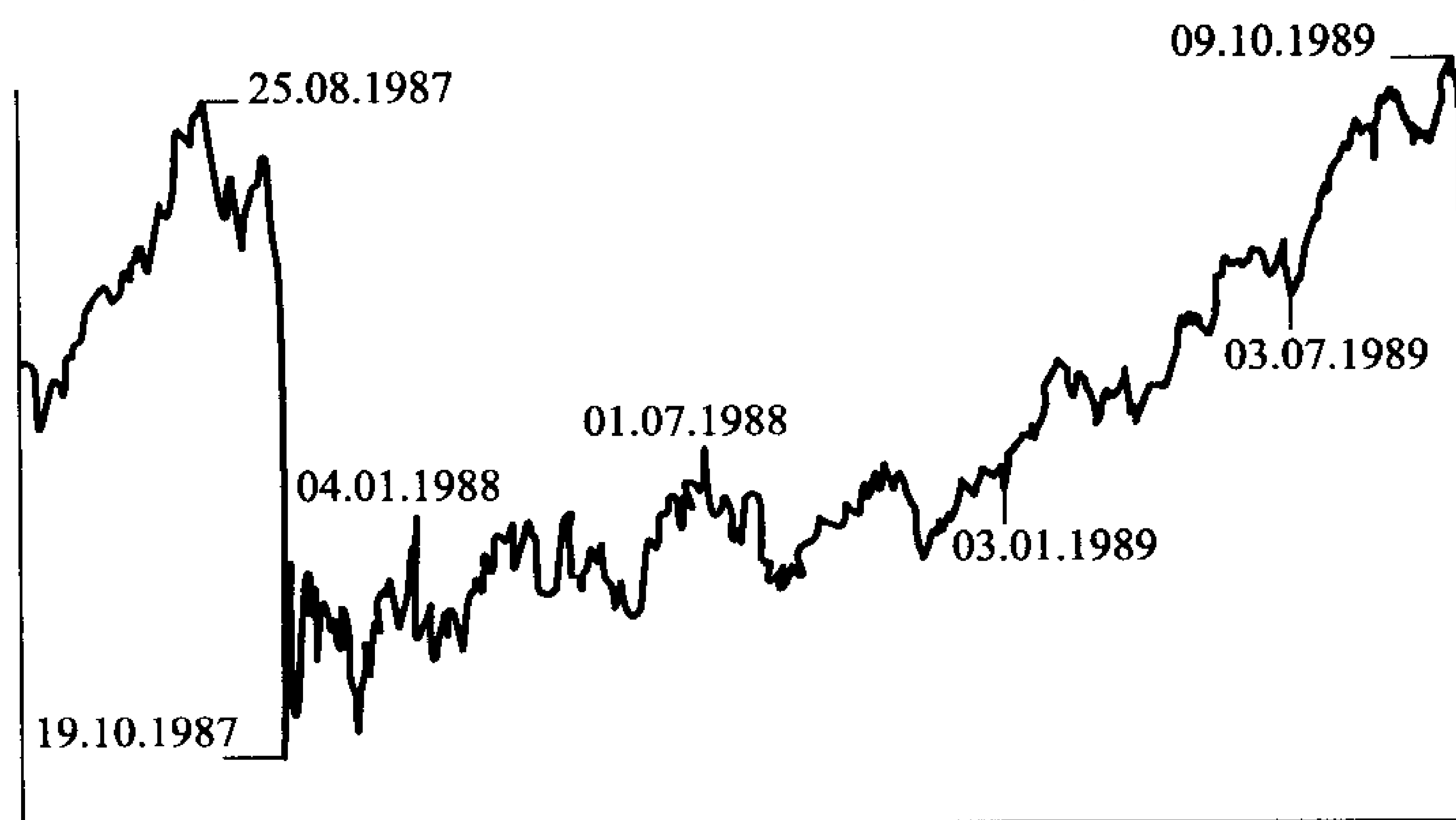


图 3 道琼斯工业平均指数 (DJIA, Dow Jones Industrial Average) 的演变. 1987 年 10 月 19 日, 在这个崩盘日, DJIA 下跌 508 点.

在图 4 上, 画出了 S&P500 指数在 1982—1988 年期间的日变化 $S = (S_n)$. 由再下一个图看来很明显, 从研究指数中所蕴含的 "随机" 状态的视角来看, 更为方便的不是量 $S = (S_n)$, 而是量 $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$; 后者可解释为 "收益率"、"回报率" 或 "对数收益率" (参见第二章, §1a). 它们的性态比 $S = (S_n)$ 呈现得更 "均匀". 对应的 $h = (h_n)$ 的值的图像在图 5 中画出.

在图 3 和图 4 中清晰可见的 1987 年末的急剧下跌, 有关著名的十月崩盘; 当时

①英译本在这里还加上可通过下列系统获得金融信息: 路透 (Reuter)、彭博 (Bloomberg)、Knight Ridder、Telerate.
—— 译者注



图 4 1982—1988 年期间的 S&P500 指数

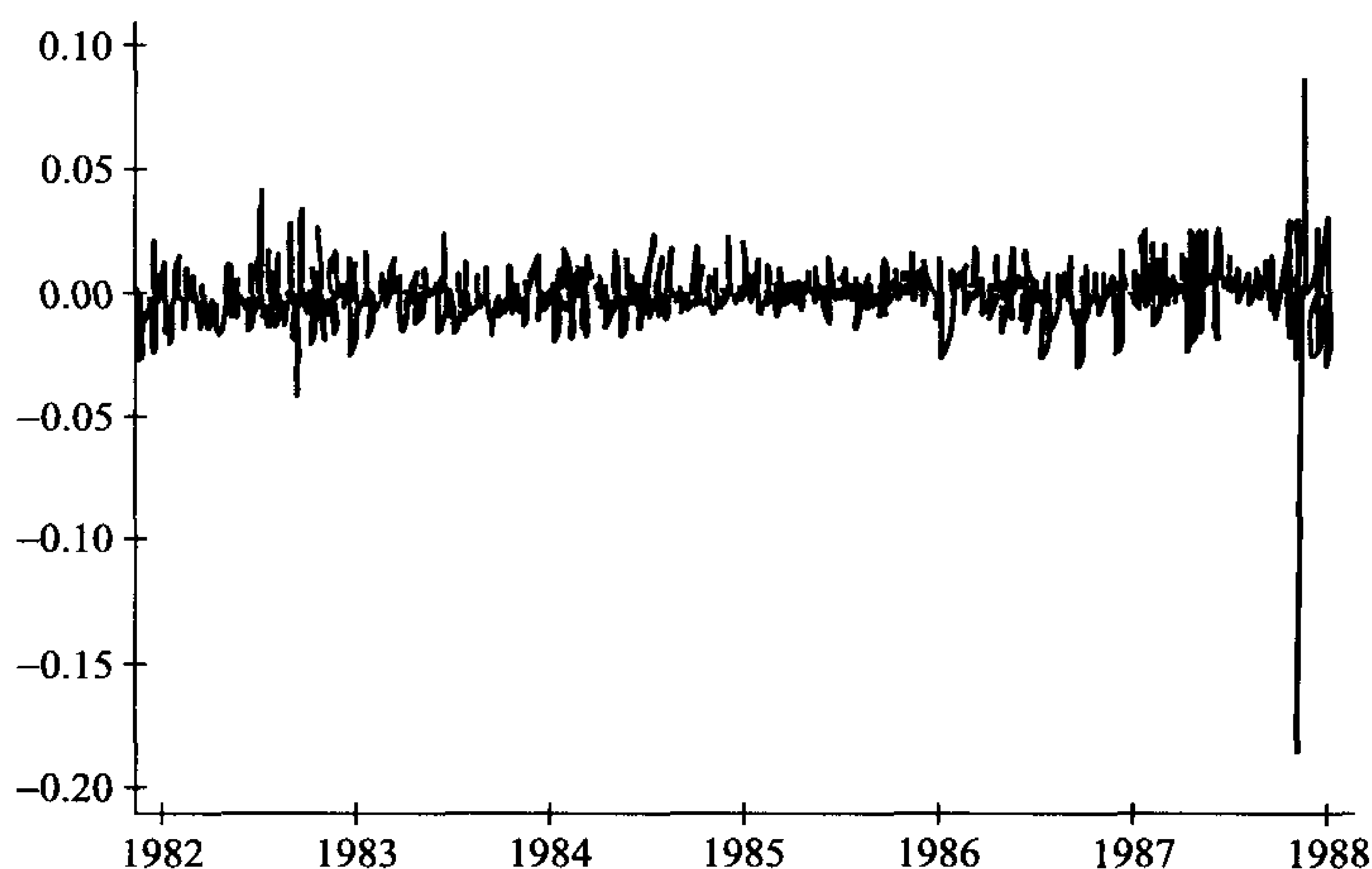


图 5 根据图 4 的数据所构造的 S&P500 指数的 $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ 的每日值

股价突然狂跌, 而投资者怕 "全盘损失", 赶紧抛售股票. 股票的大量抛售引起人们情绪和心理上的极大恐慌, 并造成市场上股票出售价一泻而下. 例如, 在 NYSE, 1987 年整个 1 月, 只有 3 亿股转手, 而在崩盘日 10 月 19 日有 6 亿零 4 百万股转手, 到 10 月 20 日, 这个数目又增加到 6 亿零 8 百万股.

在崩盘日, AT&T 股票的开盘价为 \$30, 而收盘价为 $\$23\frac{5}{8}$. 这样一来, 该公司损失了 21.2% 的市值.

整体来说, 在 1987 年 10 月 19 日, DJIA 比 1986 年 12 月 31 日下跌了 22.6%. 用绝对数值表达, 它意味着 5 千亿美元.

另一个著名的经济危机是在 1929 年, 同样发生在十月. NYSE 交易所在 (危机前) 10 月 24 日转手了 1290 万股, 而在崩盘日 10 月 29 日则转手 1640 万股. 与此相应的是, DJIA 指数在 10 月 29 日比 1928 年 12 月 31 日下跌了 12.8%, 用绝对数值表达, 它意味着 140 亿美元.

在图 3–5 中我们可清楚地看到 DJIA 指数和 S&P500 指数在一个几年的时期中游弋不定的波动特征. 作为补充, 在图 6 中, 我们还直观表明 DEM/USD 汇率在一个交易日 (即 1993 年 8 月 19 日, 星期四) 中是怎样变化的.

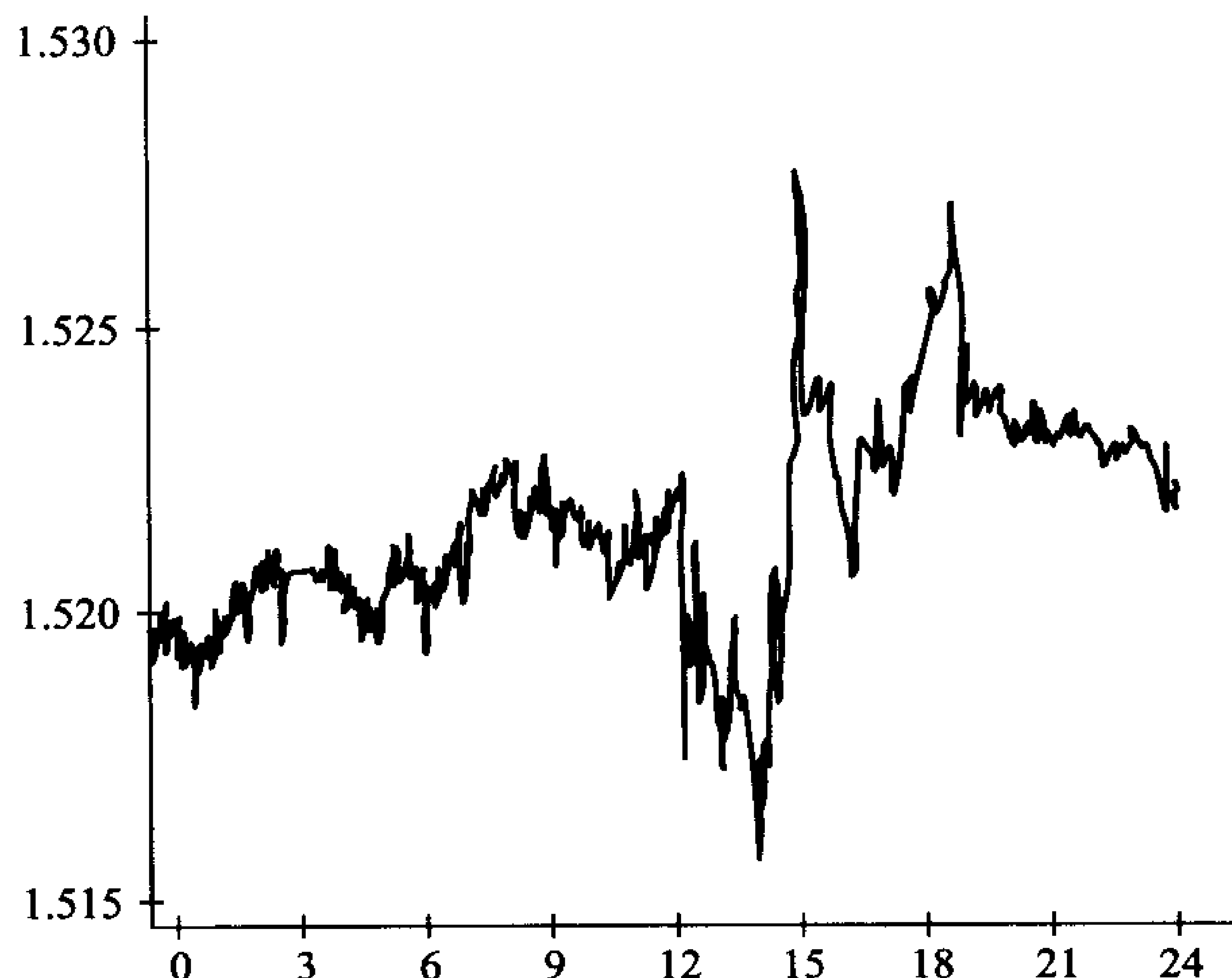


图 6 汇率 DEM/USD ("买卖" 差价之间) 的平均值在 1993 年 8 月 19 日一整天的动态变化 (0 点对应格林威治时间 0:00)

首先试图依靠概率论概念来对 (巴黎市场的) 股价的演变 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 进行数学描述的是 Louis Bachelier (1870.03.11—1946.04.28) 在他的博士论文《投机理论 (Théorie de la spéculation)》中作出的; 该文发表于《高师科学纪要 (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure)》第 17 卷 (1900), 21–86 页, [12], 其中 Bachelier 把 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 看作一个随机过程.

在分析价格的经验数据 $S_t^{(\Delta)}$, $t = 0, \Delta, 2\Delta, \cdots$ (时间间隔为 Δ) 时, 他察觉 $S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}$ 的均值 (在统计意义下) 为零, 并且起伏 $|S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}|$ 是 $\sqrt{\Delta}$ 阶的.

有同样性质的例如有随机游走 $S_t^{(\Delta)}$, $t = 0, \Delta, 2\Delta, \cdots$,

$$S_t^{(\Delta)} = S_0 + \sum_{k\leqslant [\frac{t}{\Delta}]} \xi_k^{(\Delta)},$$

其中 $\xi_k^{(\Delta)}$ 是以概率 $\frac{1}{2}$ 取两个值 $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$ 的独立同分布随机变量.

$\Delta \to 0$ 的极限过渡 (在相应的概率意义下) 导致随机过程

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, \qquad t \geqslant 0,$$

其中 $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ 无非就是 Bachelier 考察的布朗运动 (或者以 N. Wiener (维纳) 的名义称为维纳过程, 1923 年维纳在 [476] 中构造了这种过程, 并对它发展了严格数学理论; 也参见后面的第三章, §3a).

从布朗运动出发, L. Bachelier 给出了数学期望公式 $\mathbb{C}_T = \mathsf{E} f_T$, 这里 $f_T = (S_T - K)^+$; 从现代观点来看, 它给出了 (在假定银行账户的利率 $r = 0$ 以及 $B_0 = 1$ 的条件下) ①购买一个标准买入期权的合理 (公平) 价格 (权利金), 它是标准买入期权 (call option) 购买者应该向期权发行者支付的钱, 后者承诺在到期日 (maturity time) T 以执行价格 (strike price, exercisc price) K 出售股票 (参见下面的 §1c). (如果 $S_T > K$, 那么期权购买者有综合利润为 $S_T - K = \mathbb{C}_T$, 因为他能够以价格 K 来买入股票, 再以较高的价格 S_T 来卖出; 而当 $S_T < K$ 时, 购买者只需不把期权提交执行, 并且他的损失等于所支付的权利金 $\mathbb{C}_T$.)

Bachelier 求得的公式 (参见第八章, §1a)

$$\mathbb{C}_T = (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right), \tag{7}$$

其中

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy,$$

事实上是对于标准买入期权合理价格的著名的*Black-Scholes* 公式 (参见第八章 §1b) 的前驱; 对于后者假定 $S = (S_t)$ 用几何 (或经济) 布朗运动来描述:

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t}, \tag{8}$$

这里 $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ 是布朗运动.

在假定银行账户利率 r 等于零和 $B_0 = 1$ 的条件下, Black-Scholes 公式给出下列对于标准买入期权的合理价格 $\mathbb{C}_T = \mathsf{E}(S_T - K)^+$ 的表达式:

$$\mathbb{C}_T = S_0\Phi(y_+) - K\Phi(y_-), \tag{9}$$

其中

$$y_{\pm} = \left[\ln\frac{S_0}{K} \pm \frac{\sigma^2 T}{2}\right] \Big/ \sigma\sqrt{T}. \tag{10}$$

(至于 $r \neq 0$ 和 $B_0 > 0$ 情形下的一般 Black-Scholes 公式, 参见第八章, §1b.)②

值得注意的是, 根据 (7), 当 $K = S_0$ 时,

$$\mathbb{C}_T = \sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}},$$

①这里和以后的关于 $B_0 = 1$ 的条件都是英译本加上的. —— 译者注
②"$B_0 > 0$" 和 "§1b" 是英译本加上的. —— 译者注

它给出了合理期权价格随 "执行时间" T 的增长而增长的表示式.

"正确" 描述这样那样的股价类金融指数 $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ 的动态变化的问题, 还远没有完全研究清楚, 并且它是多项概率论和统计特征研究的对象 (以后的第二、三、四章都讨论这类问题). 正如我们早已说明 (见第 4 点), 类似的 (但大概更为困难的) 问题也在联系债券市场价格 $\mathcal{P} = \{\mathsf{P}(t,T)\}$ 的随机演化描述时发生, 后者作为随机过程 $(0 \leqslant t \leqslant T < \infty)$ 在 "右端终点" (即 $t = T$) 有固定条件. (这些问题将在下面的第三章中讨论.)

§1c. 衍生证券市场. 金融工具

1. 1970 年代初, 世界各国对证券市场的兴趣都陡然大增. 人们自然试图理解, 1970 年代初发生了什么, 它们对经济的新发展, 尤其是对证券市场, 产生怎样的冲击.

金融市场 (既包括资本市场: 长期证券市场, 也包括货币市场: 短期证券市场) 在 1960 年代以非常低的*波动率* (变化率) 而著称, 利率非常稳定, 而汇率是固定的. 从 1934 年到 1971 年美国奉行以每盎司 (=28.25 克) 35 美元的固定价格买卖黄金. 美元被看作黄金的等价物, "贵如黄金". 尤其是, 黄金的真实价格不是由市场力量来决定的, 而是以人为方式来决定的.

这样的一般市场状况限制了投资的主动性, 也阻碍了引进金融新技术.

另一方面, 1970 年代发生了几起导致金融市场结构巨大变化和波动率大为增长的事件. 我们列举其中最重要的一些 (参见 [345], [108], 也参见 §1b 的第 2 点).

1) (1973 年) 许多国家群体放弃固定汇率, 而转向 "浮动" 汇率 (使某些货币在某个确定的 "带子" 内浮动); 由此特别是提出了关于中央银行怎样最优干预这一有趣而重要的问题.

2) 美元 (相对于黄金) 的贬值: 1971 年尼克松政府放弃了 1 盎司黄金 35 美元这一固定价格. 这导致在 1970 年代以美元计算的黄金价格急剧上涨: 在 1980 年它已涨到 1 盎司 570 美元, 1984 年回落到 308 美元; 从 1984 年起金价多半浮动在 300 到 400 美元之间.

3) 由于石油卡特尔 OPEC 的政策而引起的全球石油危机开始成为国际市场上石油价格的基本规律之一. (OPEC (Organization of the Petroleum Exporting Coutries, 石油输出国组织) 建立于 1960 年, 旨在统一和协调该组织成员的石油政策, 以保护她们的利益; 目前, 它的成员是阿尔及利亚、安哥拉、印度尼西亚、伊朗、伊拉克、科威特、利比亚、尼日利亚、卡塔尔、沙特阿拉伯、阿联酋、委内瑞拉.)[①]

4) 股票销售活动的衰落. (在美国, 这一衰落按其实际价值计算超过在 1930 年代大衰退时期的衰落.)

[①]译者在这里加入了 2007 年开始参加的成员国: 安哥拉. 另外, 厄瓜多尔和加蓬也曾经是成员国. 英文版在这里略去了对 OPEC 的说明. —— 译者注

5) 世界各国处于 (特别是考虑到第二次世界大战的破坏) 不同的经济状态.

在这样的条件下, 传统的 "单凭经验的方法 (拇指法则)" (the old "rules of thumb") 和简单的回归模型开始不能充分反映经济状态, 其中包括金融业务.

事实上, 市场对于投资者来说, 迅猛地展现了新的机会, 使他们的投机活动 (不是在这个词的贬义下来理解, 而是在它的原来意义下来理解: "投机 (speculation)": 预想, 思辨构想, 沉思) 获得了广阔天地. 各地开始建立起期权、债券期货的交易所. 1973 年 CBOE (Chicago Board Options Exchange, 芝加哥期权交易所) 开张, 它是专门从事标准期权合约交易的交易所. 投资者对这一新的更具有活力的机会立即作出响应. 在开张日 4 月 26 日, 出售了 911 个 16 种股票的买入期权合约; 一年以后, 日交易量达到 2 万多合约; 三年以后达到每日 10 万; 1987 年则是每日 70 万. 如果再考虑到每张合约都涉及买卖 100 股股票, 那么, 这就是说, 在 1987 年的日转手率是每日 7 千万股. (详情参见 [353].)①

同样在 1987 年, 纽约股票交易所 NYSE (New York Stock Exchange) 的日转手率为 1900 万股.

1973 年令人瞩目并非仅仅是建立了第一家有组织的标准期权合约的交易所. 与此同时的是两篇著作的发表: F. Black and M. Scholes. *The pricing of options and corporate liabilities* (期权定价和公司债务), [44], 以及 R. C. Merton. *The theory of rational option pricing* (理性期权定价理论), [346]; 这两篇著作可以毫不夸张地说在金融资产定价的方法论上引起了彻底革命. 看来很难指出在金融学文献中还有别的理论研究在金融资产定价的实务中那么快地找到应用, 并且还成为更复杂的期权以及其他形式的衍生证券的各种各样研究的源泉.

2. 在金融工程师作为工具来运用的衍生证券中, *期权合约*和*期货合约*处于最显著的地位. 通常认为, 这两者和另一些衍生证券都有很高的风险; 但与此同时, 它们及其各种各样的组合不仅被用来成功地获得 (投机) 利润, 并且也为价格的剧烈变化*提供了保护手段*.

> **期权** (option): 这是由公司、银行和其他金融机构发行的证券 (合约), 它赋以购买者按预定的条件在今后某一个期间或时刻来购买或出售某种确定的有价品 (例如, 股票、债券、外汇) 的*权利*.

与给出购买或出售*权利*的期权不同,

> **期货或期货合约** (futures): 这是在未来的某个确定的时刻按照在签约时刻承诺的 (*期货*) 价格来购买或出售某种确定的有价品 (例如, 黄金、谷物、外汇) 的*承诺义务*.

①2005 年, CBOE 的期权交易总量为 468 249 301 个合约, 比上年增加 30, 这些合约的总值超过 12 万亿美元. —— 译者注

α) 期货对于形形色色的商品和有价品的购买者和出售者来说都有实际意义.

例如, 操心在未来以 "好" 价钱出售其谷物、而又担心价格会突然 "下跌" 的精明的农夫乐于与磨坊主 (面包师) 签订一个 "适当的" (尚未成熟的) 谷物供应合约, 以取代等到谷物成熟以后再以未来市场上 (谁也不知道!) 的价格来出售.

从磨坊主 (面包师) 的方面来看, 也同样对以 "适当的" 价格来购买谷物感兴趣, 以避免谷物在未来可能大幅上涨.

最终, 对双方来说, 都有同样的使市场上未来价格的不确定性所引起的风险最小化这一目标. 在这一含义下, 期货合约是利益双方可能建立的共同协议的形式.

在转向期货合约的内容讨论以前, 先来讨论另一种相近的协议形式是有益的; 这就是所谓远期合约.

β) 正如在期货合约的情形中那样,

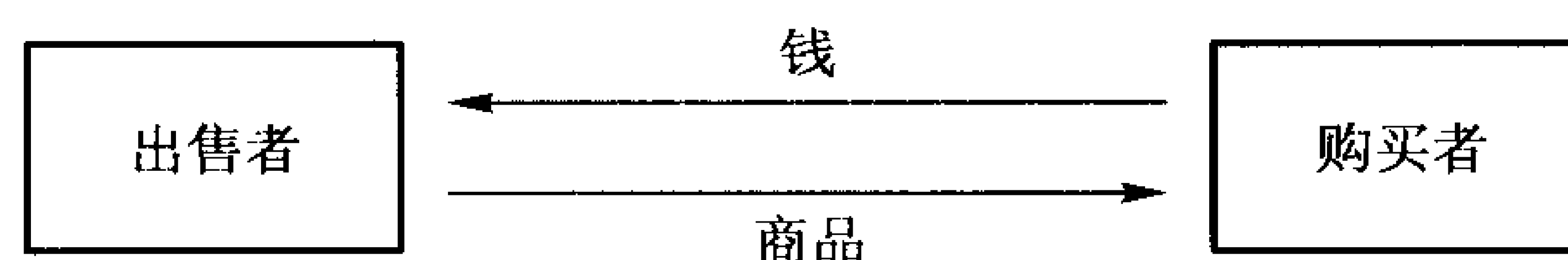
> **远期合约**或**远期**也是某种有价品或商品的在未来按照预先约定的 (远期) 价格来买卖的协议.

期货合约与远期合约之间的区别在于, 远期通常是在没有任何中介的双方之间签约的. 期货合约则是在有组织的交易所中签约的, 并且交易双方可能互相完全不认识, 而由专门的结算系统来处理合约的某个亏本方.

通常, 想买入的一方称为 "持有多头 (long position)". 而承担提货的一方称为 "持有空头 (short position)".

远期合约和期货合约的根本问题在于设定所谓 "远期价格" 和 "期货价格", 它们事实上 (在定价时刻) 可能不同于交易商品的市场价格.

远期合约的运作模式大致如下:



这里商品的理解是广义的. 例如, 它可能是外币. 这时, 比如你想要用美元 (USD) 来购买瑞士法郎 (CHF), 那么假设关于远期的信息大致如下:

当日价格 1 USD=1.20 CHF,

(即用 1 USD 可购买 1.20 CHF);

30 日远期 1 USD=1.19 CHF;

90 日远期 1 USD=1.18 CHF;

180 日远期 1 USD=1.17 CHF.

这里出现的局面在下列含义下是典型的: 随着 (所提出的期限) 时间间隔的*增加*, 你用 1 美元来买瑞士法郎所得到的将*越来越少*, 也就是说, 如果你想要在 6 个月以后

有 10 000 瑞士法郎, 那么这将需要支付

$$\frac{10\,000}{1.17} = 8547\ (\text{美元}).$$

而如果你现在就需要 10 000 瑞士法郎, 那么这只要支付

$$\frac{10\,000}{1.20} = 8333\ (\text{美元}).$$

很明显, 10 000 CHF 的实际市场价值经过 6 个月以后可能不同于 8547 USD. 它可多可少, 取决于 6 个月以后的汇率 CHF/USD 的状况.

正如已经注意到, 远期协议是双方的协议, 并且在原则上存在其潜在的不现实的危险. 为此经常很难找到你想要的商品的卖主, 或者相反, 很难找到感兴趣的买主.

(关于期货的背景材料.① 根据 N. Apostolu 编著的 "期权和期货投资精要 (Keys to investing in options and futures, Barron's Educational Series, 1991)", "美国的第一家有组织的商品交易所是芝加哥期货交易所 (Chicago Board of Trade, CBOT), 1848 年创建于芝加哥. 这个交易所原本是为了作为引导现金谷物交易的中心市场, 但直到 1865 年才在那里开始有第一笔期货交易. 今天, 芝加哥商品交易所是世界上最大的期货交易所, 全美国的期权合约几乎有一半在这里进行交易.

金融期货是直到 1970 年代才开始引进的. 1976 年, 国际货币市场 (International Monetary Market, IMM) 作为芝加哥商品交易所 (Chicago Mercantile Exchange, CME) 的一个分部, 开始经营 90 天国库券 (Treasury bill) 期货合约交易. 下一年, CBOT 发起公债 (Treasury bond) 期货合约交易. 1981 年, 创立欧元期货合约.

1982 年出现了金融期货的重要里程碑, 那就是堪萨斯期货交易所 (Kansas City Board of Trade) 推出基于 Value Line 股票指数的股票指数期货合约. 紧随着这一创举, 很快就有芝加哥商品交易所推出 S&P500 指数期货合约, 以及纽约期货交易所上交易的纽约股票交易所综合指数. 所有这些合约所提供的都是现金交割而不是证券交割.

期货交易所的交易量在最近的 30 年里飞速增长: 从 1960 年的 3900 万个合约上升到 1989 年的 26 700 个合约. 在其简短的历史中, 金融期货已经变成期货市场中的占优势的因素. 1989 年, 所有进入交易的期货合约的 60% 是金融期货. 迄今为止, 交易最为活跃的期货合约是在 CBOT 交易的公债期货合约.")

γ) 表面上看来, 也就是这些情况导致在交易所中以特殊的结算机理进行交易的期货合约的产生, 其一般图景可用下列方式来描述.

假定, 3 月 1 日你向你在交易所的经纪商发出指令, 比如 (以某种展望的价格) 购买一定数量的小麦. 经纪商在交易所中递交了这一订单, 然后交易所又把这一订单转交给交易所的交易商之一. 交易商寻求适当的价格, 并且在他找到适当价格的

①这段背景材料在俄文版中没有. 但背景材料前面的一小段被英文版略去. —— 译者注

情形下, 向其他交易商发出信号, 他想按这一价格购买期货合约. 如果某个交易商同意, 那么买卖就成功了. 如果买卖没有发生, 那么交易商就通知经纪商, 而他再转告你商品要有更高的价格, 你就必须采用这样或那样的决策.

假设, 最终合约签成了, 于是你, 购买者, 就持有*多头*, 而出售者就持有*空头*.

再令 Φ_0 是双方协商的 (期货) 价格, 小麦将在 10 月 1 日 (按价格 Φ_0) 交割. 现在, 合约已经实际上签署, 每一方都要向交易所的专门账户交纳一定的所谓*初始保证金* (initial margin) (Φ_0 的 2%–10%, 取决于客户的信誉). 然后进入一定的结算系统, 在每天末以如下方式进行结算.

假设, 在 (执行) 时刻 $t = 0$, $\Phi_0 = \$10\,000$ 是在时刻 $T = 3$ (即三天以后) 交割的小麦的 (期货) 价格. 而在下一天 ($t = 1$) 之末在时刻 $T = 3$ 交割的小麦的市场期货价格开始变为 \$9900. 在这一情形下, 交易所的结算所就要向供应者 (即农户) 的账户转账 \$100 (= 10 000 − 9900). 这样一来, 农户获得利润, 并且它开始影响合约, 使得现在它的期货价格等于 \$9900, 而不再是 \$10 000.

注意, 如果在第一天之末按这一新的期货价格 \$9900 来进行交割, 那么农户所获得的总额恰好就等于期货价格 Φ_0, 因为 \$ 100+\$ 9900= Φ_0.

自然, 这 \$100 是结算所从购买者的账户中扣除的, 而购买者必须在他的保证金账户中再补充 \$100. 然而, 也可能有这样的局面: 仅当保证金账户跌到某个确定的水平 (*维持保证金* (maintenance margin)) 以下时, 才要求补充交纳.

假设在时刻 $t = 2$ 时发生类似的事 (参见图 7). 这时农户在自己的账户中得到 \$200 进款, 而在购买者的账户中扣除同样的款项.

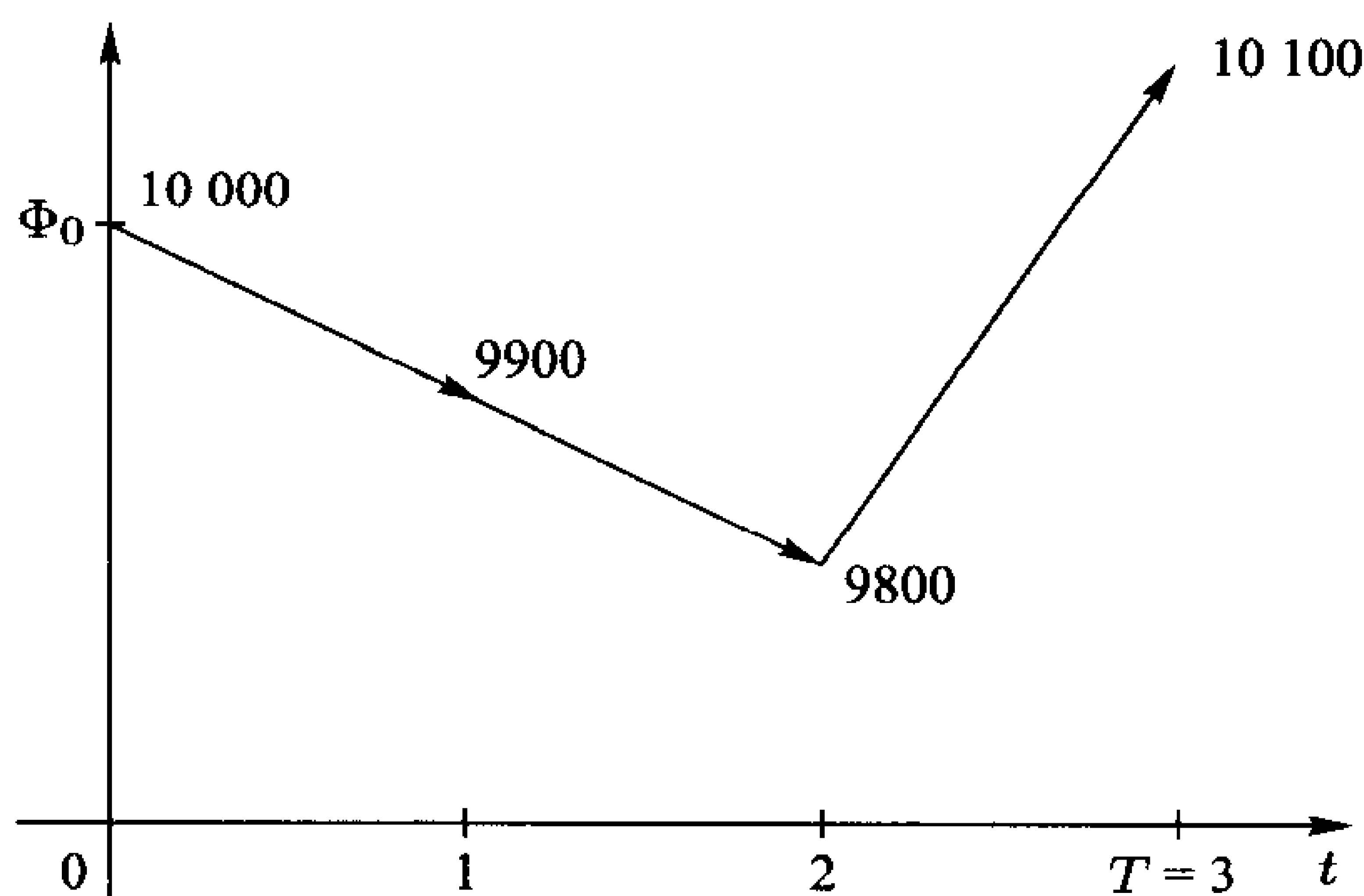


图 7 期货价格的演变

但是如果在时刻 $t = 3$ 交割的期货价格 (= 实际价格) 变为 \$10 100, 那么农户的账户中将扣除 \$300 (= 10 100 − 9800), 因而, 他总共失去 \$100 (= 300 − 200), 而购买者获得这 \$100.

我们察觉, 如果到了时刻 $T = 3$, 购买者决定在时刻 $T = 3$ 购买小麦 (当即交割), 那么他必须支付 \$10 100 (= 该时刻的实际价格). 但是考虑到购买者已经在他的

账户中获得 \$100, 对于他来说, 交割的实际价格是 (\$) $10\,100 - 100 = 10\,000$, 即刚好重合于协商价格 Φ_0.

对于农户的情况也是类似的: 交割时实际上得到的付款恰好等于 \$10 000, 因为在时刻 $T = 3$, 他得到的现实价格为 \$10 100, 但考虑到在他的账户中扣除 \$100, 这又恰好等于 \$10 000.

由上面的叙述中可以看出, 结算所在其中起着明显的 "看门狗 (watchdog)" 作用; 它跟踪全部实现的换算和保证金状况, 以确保在最终的账户中, 合约实际上 "起作用".

正如已经在上面注意到, 远期合约和期货合约的定价理论的最重要问题之一是求出对应价格的 "公平" 价值.

以后, 在第六章的 §1e 中将指出, 怎样通过考虑与鞅方法相联系的 "无套利性", 来给出包括时刻 t 和执行交割时刻 $T > t$ 在内的远期合约价格和期货合约价格的公式.

δ) 期权. 在期权作为衍生金融工具的理论和实际中, 有其自己的概念和一定的专门术语, 由此可使早期已经知道的有关它的研究变得有意义. 尤其重要的是衍生证券的数学分析的大部分在以后都正是与某种状况引起的期权有关.

首先, 期权的数学理论发展最快, 并且以它为例, 有利于研究证券运作的基本原理, 特别是对公平价格的定价原理和对冲 (即, 防范) 策略的研究.

其次, 期权在市场上的实际交易量数以百万计, 因而对它有 "很好的统计资料", 有可能来检验期权价格演变的概率统计模型的质量.

尽管期权作为金融工具早就已知 (参见, 例如书 [312]), 看来是 L. Bachelier 首先于 1900 年在他的今天已名誉天下的博士著作 "投机理论 (Théorie de la spéculation)" [12] 中, 给出了期权价值的第一个数学分析, 并论证了期权投资的合理性. 但是, 正如上面已经注意到的, 直到 1973 年以前期权还没有有组织的交易 (参见 §1c).

(*关于期权的背景材料.*① 根据 N. Apostolu 编著的 "期权和期货投资精要 (Keys to investing in options and futures, Barron's Educational Series, 1991)", "自从 1973 年创立芝加哥期权交易所 (CBOE) 以来, 股票期权的交易量已经得到引人注目的增长. 上市的期权已经变成机构和个体为寻求金融利润或金融防范的实际投资工具. CBOE 是世界上最大的期权交易场所, 也是国内的第二大证券交易所. 期权交易也在美国股票交易所 (AMEX)、纽约股票交易所 (NYSE)、太平洋股票交易所 (Pacific Stock Exchange, PSE) 和费城股票交易所 (Philadelphia Stock Exchange, PHLX) 中进行. 期权并不限于普通股票, 也有关于对债券、外币和各种指数的期权. CBOE 交易上市公司和场外公司的股票期权, 标准普尔 100 和 500 市场指数的期权, 美国公债和国库券的期权, 长期和短期利率的期权以及 7 种不同国家的外币期权.")

①这段背景材料在俄文版中没有. —— 译者注

ε) 为了使下面有关期权的叙述确定起见, 假定, 金融活动发生在时刻

$$n = 0, 1, \cdots, N,$$

并在时刻 N 完成了每项活动.

我们将假定, 在提及建立在股票上的期权时, 股票的价值由下列随机序列来描述:

$$S = (S_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}.$$

根据通用的术语用法, 期权分为两类:

- 买入期权 (call option);
- 卖出期权 (put option).

买入期权赋予*购买权利*.

卖出期权赋予*出售权利*.

从金融工程的视角来看, 重要的是这些金融工具 "在不同的方向上起作用": 当其中之一的盈利增加, 另一个的盈利就减小. 也就是说, 这种状况说明, 为什么运用各类可能的期权与其他证券相组合来进行*分散化*实务得到广泛传播.

根据执行时间, 期权可分为两种类型: *欧式*和*美式*.

如果期权提交执行的时间仅仅是*预定*的确定时刻 N, 那么就说 N 是执行时刻, 而期权是*欧式期权*.

如果期权提交执行的时间可以是任意的 (随机) 时刻 $\tau \leqslant N$, 那么就说它是*美式期权*.

在实务中, 大多数可交易的期权是美式期权, 它们使购买者有更多的自由, 来*选择*执行时刻 τ. 而在欧式期权的情形下, 这个预定的时刻是确定的 ($\tau \equiv N$). 注意, 有可能存在美式期权和欧式期权 "重合" 的情形 (在这样的含义下, 美式期权的 "最优" 时刻 τ 等于 N). 详情参见第六章 (§5b) 和第七章 (§3c).

为了确定起见, 现在考察执行时刻为 N 的*标准欧式买入期权* (call option). 这样的期权由它的执行时的*固定*购买价格 K 来刻画, 期权购买者可按照这一价格购买比如股票, 而后者在时刻 N 的实际价值为 S_N, 它在本质上是不同于 K 的.

如果 $S_N > K$, 那么这种局面是对购买者有利的, 因为对于他来说, 根据合约的条件, 他有权按价格 K 来购买股票, 使得他可立即买入再立即按市场价格 S_N 卖出. 在这种情形下, 他在这一运作下的盈利等于 $S_N - K$.

而如果 $S_N < K$, 那么给定的 (按价格 K 的) 购买权利对他来说毫无用处, 因为他可在市场上以更低的价格 (S_N) 来购买股票.

联系这两种情形, 可以说, 在时刻 N 的购买者的盈利 f_N 可用下列公式来确定:

$$f_N = (S_N - K)^+,$$

其中 $a^+ = \max(a, 0)$.

当然, 购买这样的金融工具必须支付某种权利金 $\mathbb{C}_N$. 这样一来, 买入期权购买者的纯盈利将等于

$$(S_N - K)^+ - \mathbb{C}_N,$$

也就是说, 它等于

$$\begin{aligned}(S_N - K) - \mathbb{C}_N, \text{当 } S_N > K,\\ -\mathbb{C}_N, \text{当 } S_N \leqslant K.\end{aligned}$$

相应的出售者盈利将等于

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_N - (S_N - K), \text{当 } S_N > K,\\ \mathbb{C}_N, \text{当 } S_N \leqslant K.\end{aligned}$$

由这些讨论显然可见, 买入期权的购买与股票价值上涨的期待相联系. 还要强调的是, 期权的价值 $\mathbb{C}_N$ 当然不仅依赖于 N, 并且也依赖于 K. 这里很清楚, K 越小, $\mathbb{C}_N$ 的价值越大.

注. 有一些专门的术语来描述上涨和下跌. 根据 [65]:

"牛市 (bull)": "证券交易所、外币市场或商品市场上的经销商预期价格上涨. '牛市' 就是这样的市场: 在牛市中, 经销商将以较大的概率购买, 而不是出售, 并且他可能超出自有的账户来购买, 以开辟 '牛市' 头寸. 开辟 '多头' 的 '牛市' 头寸期望向更高的价格推进, 直到有了更高的行市, 经销商就出售."

"熊市 (bear)": "证券交易所、外币市场或商品市场上的经销商预期价格下跌. '熊市' 就是这样的市场: 在熊市中, 经销商将以较大的概率出售, 而不是购买. 他甚至出售他并不占有的证券、外币或商品. 这样的运作称为 '卖空' 或者 '建立熊市头寸'. '熊市' 期待通过以比他出售时要低的价格来购买证券、外币或商品, 以关闭 (或冲销) 自己的空头'. 购买价格与原来的出售价格之间差价就是 '熊市' 利润".

初始价格 S_0 与期权的执行价格 K 之间的关系把期权分为三类: 价内 (in-the-money)、平价 (at-the-money) 和价外 (out-of-money). 在买入期权的情形下, 这样的分类对应下列三种关系: $S_0 > K$, $S_0 = K$ 和 $S_0 < K$.

由此立即可注意到, 购买者和出售者的立场有极大的不同.

买进期权的购买者只是等待执行它的时刻 N 的迫近, 并且他还可能作为观察者, 静观价格 S_n $(n \geqslant 0)$ 的变化特征.

期权出售者的角色要复杂得多, 因为他必须想到执行合约的必要性, 迫使他不能静观价格 S_n $(n \geqslant 0)$ 的运动, 而且还要动用他的各种金融手段来构成保证支付 $(S_N - K)^+$ 的证券组合.

这里关键的是下列两个问题: 什么是期权买卖的 "公平" 价格 $\mathbb{C}_N$, 以及期权出售者应该怎样做才能执行合约条件.

在执行时刻为 N 的标准欧式卖出期权 (put option) 情形下, 购买者有 (在时刻 N) 以固定价格 K 出售股票的权利. 因此, 如果股票在时刻 N 的真实价格等于 S_N,

并且 $S_N < K$, 那么按价格 K 出售就能盈利 $K - S_N$. 考虑到购买这样的期权的权利金 $\mathbb{P}_N$, 纯盈利将等于

$$(K - S_N) - \mathbb{P}_N.$$

如果 $S_N > K$, 那么把期权提交执行没有意义, 因为合约规定的出售价格 K 小于市场价格 S_N.

这样一来, *卖出期权购买者的纯盈利*将等于 $(K - S_N)^+ - \mathbb{P}_N$.

正如与买入期权的情形一样, 这里也发生关于既对期权出售者、又对期权购买者设置的价格的 "公平" 价值 $\mathbb{P}_N$ 的问题.

η) 我们来观察一个说明买入期权作用的例子.

设想你购买了 10 份股票期权合约. 每份合约通常包括 100 股股票. 这样一来, 实际涉及购买 1000 股股票. 假定每股股票的市场价格为 S_0 等于 30 (比如, 美元), $K = 35$, $N = 2$, 所有 10 份合约的权利金等于 \$250.

又设想在时刻 $n = 2$ 的市场价格 S_2 变为 \$40. 在这一情形下, 期权就会提交执行, 并且对这种局面所相应的纯盈利将是*正的*:

$$(40 - 35) \times 1000 - 250 = 4750\ (\text{美元}).$$

如果市场价格 $S_2 = \$\,35.1$, 那么因为 $S_2 > K = \$\,35$, 期权还是要提交执行, 并且对应这一局面的纯盈利将是*负的*:

$$(35.1 - 35) \times 1000 - 250 = -150\ (\text{美元}).$$

当然, 很明显, 如果

$$(S_2 - K) \times 1000 = 250\ (\text{美元}),$$

即, 由于 $K = \$\,35$, $S_2 = \$\,35.25$, 那么盈利将为零.

这样一来, 每当股票价格 S_2 低于标价 \$35.25 时, 这种期权的购买者就会亏本.

现在假定所考察的是有可能在 $n = 1$ 或 $n = 2$ 时刻提交执行的美式买入期权. 如果设想在时刻 $n = 1$, 股票价格急剧升高, 比如 $S_1 = \$\,50$, 那么这一买入期权的购买者有权在时刻 $n = 1$ 提交执行, 而得到高额盈利:

$$(50 - 35) \times 1000 - 250 = 15\,000 - 250 = 14\,750\ (\text{美元}).$$

然而, 很明显, 这样的期权的权利金一定不是 \$ 250, 而应大大提高, 因为 "挣钱机会越大, 付钱应该越多". 而实际上, 美式期权的*实际价格*高于欧式期权. 参见以后的第六章和第八章.

上面的例子是从购买者的立场上来考察的. 现在转向出售者.

对于他来说, 原则上, 有两种可能性: 出售他已经占有的股票 (这种情形称为 "卖出仓存股票 (writing covered stock)"), 或者出售他并不占有的股票 (这种情形称为 "卖出无仓存买入期权 (writing naked call)").

后一种可能性风险很大, 它甚至会导致倾家荡产, 因为如果期权提交执行 (当 $S_2 > K$), 那么出售者必须实际去购买股票, 而再为了执行买入期权的条件, 以价格 K 卖给购买者.

比如, $S_2 = \$\,40$, 那么需要支付 \$ 40 000 才能购买 1000 股股票.

权利金全部只有 \$ 250, 因而, 总亏损等于

$$40\,000 - 35\,000 - 250 = 4750 \text{ (美元)}.$$

应该注意到, 在这两种所考察的情形下, 出售者的纯盈利都不超过 \$ 250. 而如果他真的得到这一盈利, 那么这纯粹是 "在股票价格震荡上" 的投机盈利, 并且在 "卖出无仓存买入期权" 的情形下, 获得这一盈利的方式是有很大风险的. 这也就是说, 这里重要的是 "*出售者的盈利是对他承担的风险的补偿*".

3. 在现实世界中, 有巨大金融机会、并以减少风险为目标的 "大" 投资者在各种各样的证券 (股票、债券、期权等等)、原材料等等的市场上广泛采用分散化、对冲等投资手段. 在这方面, 富有教益的是 G. 索罗斯的书 [451], 其中作者在一系列地方 (参见例如 [451; §§11,13]) 描绘了他所领导的 "量子基金 (Quantum Fund)" 的 (从 1968 年到 1993 年) (由各种各样的金融资产所构成的) 证券组合结构的每日演变. 例如, 1986 年 8 月 4 日 (参见 [451, 第 243 页, 俄译本第 283 页]), 组合包括股票、债券、原材料商品.

可以坚信地说, 从金融工程的视角来看, 索罗斯的书对于那些在证券市场中从事实务的人来说是一本光辉的指南.

4. 说到欧式**买入期权**, 正如我们已经看到的, 它们由下列两个因素来刻画:

1) 执行时间 N,

2) 偿付函数 f_N.

- *对于标准买入期权*

$$f_N = (S_N - K)^+.$$

- *对于有后效的标准买入期权*

$$f_N = (S_N - K_N)^+,$$

其中 $K_N = a \cdot \min(S_0, S_1, \cdots, S_N)$; $a = \text{Const.}$[①]

---

①常数 a 是英文版加入的. 俄文版中没有. —— 译者注

- 对于算术平均亚洲买入期权

$$f_N = (\overline{S}_N - K)^+, \qquad \overline{S}_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k.$$

应该注意到, 在比如标准期权的偿付函数 $f_N = (S_N - K)^+$ 中的量 K 称为执行价格 (strike price), 它通常接近于值 S_0. 在 S_0 与 K 两个值之间的差距很大的期权照例是不交易的.

在**卖出期权**的情形下,

- 对于标准卖出期权

$$f_N = (K - S_N)^+.$$

- 对于有后效的标准卖出期权

$$f_N = (K_N - S_N)^+, \quad K_N = a \cdot \max(S_0, S_1, \cdots, S_N), \ a = \text{Const.}$$①

- 对于算术平均亚洲卖出期权

$$f_N = (K - \overline{S}_N)^+, \qquad \overline{S}_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k.$$

还有许许多多有着非常特异的名称的期权 (参见, 例如 [414], 以及以后的第八章的 §4a, b). 在第六章 §4e 也引入了某些基于期权的策略形式 (组合、价差、配置).

对于期权的购买者来说, 吸引他们的是, 期权不那么贵, 尽管佣金也可能是很可观的. 为了对怎样计算期权价值 (也就是权利金, 或者说为购买期权所支付的不能退回的支付) 有一个观念, 我们考察下列某些理想化的局面.

设股票的价值 S_n, $0 \leqslant n \leqslant N$, 如下:

$$S_n = S_0 + (\xi_1 + \cdots + \xi_n),$$

其中 $S_0 > N$ 是整数, 而 (ξ_k) 是独立同分布的随机变量序列, 其概率

$$\mathsf{P}(\xi_k = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

于是显然有 $S_n > 0, 0 \leqslant n \leqslant N$.

假定, 我们所支配的还同时有一个银行账户 $B = (B_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$, 其中 $B_n \equiv 1$, 即, 利率 $r = 0$. 我们将考察有偿付函数为 $f_N = (S_N - K)^+$ 的欧式标准买入期权.

我们要指出, 为购买这样的期权的合理 (即, 公平、互利) 价格 $\mathbb{C}_N$ 由下列公式确定:

$$\mathbb{C}_N = \mathsf{E}(S_N - K)^+,$$

①常数 a 是英文版加入的. 俄文版中没有.　—— 译者注

即权利金等于购买者的增益的平均值.

我们将在以后多处来讨论价格 $\mathbb{C}_N$ 的形式定义和它的计算方法 (参见第五章). 在所考察的情形下, 公式 $\mathbb{C}_N=\mathsf{E}(S_N-K)^+$ 可用下列方式来建立.

假定, 出售者制定的价格 $\widetilde{\mathbb{C}}_N>\mathsf{E}(S_N-K)^+$, 而期权购买者也同意按这个价格来购买. 我们指出, 在这样的情形下, 出售者显然有无风险盈利, 等于 $\widetilde{\mathbb{C}}_N-\mathbb{C}_N$.

事实上, 期权购买者懂得他必须同意某个价格, 以使得出售者有可能执行在期权交易签约时所规定的条件. 当然, 很明显, 这个价格不能 "太低". 但是购买者也懂得, 他不应该多付钱, 而只应该支付让出售者足以执行合约条件的最低价格.

这就需要指出, 获得权利金 $\mathbb{C}_N=\mathsf{E}(S_N-K)^+$ 以后, 期权出售者就有可能支配它 (这里理解为他的**投资**) 来执行可能发生的合约条件.

为了简单起见, 假定 $N=1$, $K=S_0$. 于是 $\mathbb{C}_1=\mathsf{E}\xi_1^+=\frac{1}{2}$. 我们指出, 期权出售者 (= 发行者) 怎样支配这笔权利金来确保执行合约条件.

我们把 $\frac{1}{2}$ 表示为下列形式:

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{S_0}{2}\right)+\frac{S_0}{2}\qquad(=\beta_0\cdot 1+\gamma_0\cdot S_0).$$

如果记 $X_0=\beta_0\cdot 1+\gamma_0\cdot S_0$ $(=\frac{1}{2})$, 那么可以指出, 所得到的权利金形成发行者的 (初始) 资本, 它在银行账户中的量为 β_0, 而所买股票数为 γ_0. 于是, 在所讨论的情形下 β_0 是负的, 它仅仅意味着向银行账户借款 (借债), 它当然必须在以后归还.

点对 (β_0,γ_0) 正如通常所说, 形成出售者在时刻 $n=0$ 的证券投资组合.

这个证券组合到时刻 $n=1$ 给出了怎样的资本? 如果记这一资本表示为 X_1, 那么将有

$$\begin{aligned}X_1&=\beta_0\cdot B_1+\gamma_0\cdot S_1=\beta_0+\gamma_0(S_0+\xi_1)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{S_0}{2}\right)+\frac{1}{2}(S_0+\xi_1)=\frac{1+\xi_1}{2}\\&=\begin{cases}1, & \text{当 } \xi_1=1,\\0, & \text{当 } \xi_1=-1.\end{cases}\end{aligned}$$

由于

$$\xi_1^+=\frac{1+\xi_1}{2},$$

则我们可看到

$$X_1=f_1\qquad(=(S_1-K)^+).$$

换句话说, 组合 (β_0,γ_0) 确保可得到资本 X_1, 它恰好等于偿付函数 f_1, 使得出售者有可能执行合约条件, 并且同时归还借款.

事实上, 如果 $\xi_1=1$, 那么股票将值 $\frac{1}{2}(S_0+1)$. 由于

$$\frac{1}{2}(S_0+1)=1+\left(\frac{S_0}{2}-\frac{1}{2}\right),$$

故我们看到由股票所得到的足以归还借款 $\left(\frac{S_0}{2}-\frac{1}{2}\right)$, 并向购买者支付 $(S_1-K)^+=(S_1-S_0)^+=\xi_1^+=1$.

如果 $\xi_1=-1$, 那么股票将值 $\frac{1}{2}(S_0-1)$. 在这一情形下, 购买者不把期权提交执行 (这是因为 $S_1=S_0+\xi_1=S_0-1<S_0=K$), 因而一切都归发行者, 它被用来归还借款, 这笔借款等于 $\frac{1}{2}(S_0-1)$, 它刚好等于在这种情形 $(\xi_1=-1)$ 下由股票所得到的.

这样, 如果出售者规定期权出售价格是 $\widetilde{\mathbb{C}}_1>\mathbb{C}_1=\mathsf{E}(S_1-K)^+$, 那么这时他将在执行合约的所有条件中有无风险盈利 $\widetilde{\mathbb{C}}_1-\mathbb{C}_1$.

现在指出, 规定权利金 $\widetilde{\mathbb{C}}_1<\mathbb{C}_1\ (=\frac{1}{2})$ 就使发行者没有可能 (毫无损失地) 执行期权条件.

事实上, 选取组合 (β_0,γ_0), 我们得到

$$X_0=\beta_0+\gamma_0S_0$$

以及

$$X_1=\beta_0+\gamma_0(S_0+\xi_1)=X_0+\gamma_0\xi_1.$$

如果 $\xi_1=1$, 那么按照期权条件, 发行者必须向购买者支付 1 以及还要支付 $-\beta_0$, 即在这种情形下由于股票价格的变化, 他必须有

$$\gamma_0(S_0+1)=1-\beta_0.$$

在 $\xi_1=-1$ 的情形下, 同样由股票价格的变化, 他必须有

$$\gamma_0(S_0-1)=-\beta_0.$$

这样一来, 必须设

$$\gamma_0=\frac{1}{2},\qquad \beta_0=\frac{1}{2}-\frac{S_0}{2}.$$

但是对于这些值来说, $\beta_0+\gamma_0S_0=\frac{1}{2}$, 因而, 等式 $X_0=\beta_0+\gamma_0S_0$ 使 $X_0<\frac{1}{2}$ 不可能.

于是, 公式 $\mathbb{C}_N=\mathsf{E}(S_N-K)^+$ 对于 $N=1$ 和 $S_0=K$ 成立. 在一般情形下, 它可借助于类似的论述来证明. 我们现在不准备这样做, 因为以后 (在第五章) 这个公式将由一般的讨论而得到.

注意, 如果 $S_0=K$, 那么

$$\mathbb{C}_N=\mathsf{E}(\xi_1+\cdots+\xi_N)^+,$$

并由中心极限定理不难断定

$$\mathbb{C}_N\sim\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\cdot\sqrt{N}.$$

这样一来, 随着时间 N 的增长, 期权价值如同 $\sqrt{N}$ 那样增长. 这个结果与在 §1b 末所引入的对于 $\mathbb{C}_T$ 的 Bachelier 公式 (当 $S_0 = K$ 时) 所得到的结果完全一致; 根据那个公式

$$\mathbb{C}_T = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \sqrt{T}$$

(当 $\sigma = 1, S_0 = K$).

5. 正如已经所注意到, 可交易的期权极为多种多样.

例如, 在美国, 指数期权流传很广, 其中包括在 CBOE 交易的 S&P100 和 S&P500 的指数期权. (S&P100 的期权是美式期权, 而 S&P500 的期权是欧式期权.) 由于波动率很大, 这些期权的运作期是很短的.

在期货期权的情形下, 期货价格 (Φ_n) 起着价格 (S_n) 的作用. 在债券期权的情形下, 债券价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 当作价格 (S_t). 关于其他类型的期权参见第八章的 §4a.

2. 不确定条件下的金融市场. 金融指数动态变化的经典理论, 以及对它们的批评和修正. 新古典理论

这里仅仅是在接触金融市场理论和实务时所自然发生的若干问题:

- 在不确定条件下金融市场是怎样运作的,
- 怎样构成和描述价格, 而它又是怎样随时间动态变化,
- 在计算时, 应该依靠怎样的概念和理论,
- 能否预测价格的未来运动,
- 这样那样的金融工具有怎样的风险.

在描述价格的动态变化和例如为衍生金融工具定价时, 我们将持市场上无套利机会的视角. 从数学的视角来看, 这个经济学上清晰的概念按其实质导致存在所谓鞅 (风险中性) 概率测度, 对于它来说, (规范) 价格是鞅, 并转而有可能运用高度发展的 "随机分析" 工具来研究它们的演变和各种计算.

这里我们不以详述已有的金融市场理论和各种概念为目标; 我们以后仅限于那些在精神上完全接近于本书所采用的叙述的有关部分, 其中基本的 (概率) 重点在于金融数学与金融工程中的 "随机分析" 和 "统计". (我们指出若干教科书和专著: [79], [83], [112], [117], [151], [240], [268], [284], [332]–[334], [387], [460], 其中可找到金融市场的形形色色、方方面面的讨论: 确定性条件下和不确定性条件下的经济学思想、概念、理论, 均衡模型, 最优性, 效用, 证券组合, 风险, 金融决策, 分红, 衍生证券等等.)

简而言之, 我们注意到, 1920 年代是金融理论的萌芽时期, 其基本兴趣主要是与资金的管理和增值问题相联系, 而其 "高等数学" 实质上归结为复利的计算.

进一步的发展在两个方向上: 假定 (价格、需求、头寸等) 完全确定以及假定带不确定性条件.

在第一种情形下, I. Fisher 的著作 ([159]) 以及 F. Modigliani 和 M. Miller 的著作 ([356], [350]) 起着决定性的作用, 其中分别考察了个体和厂商的最优决策问题. 从数学视角来看, 它们归结为带约束的多元函数的最大化问题.

在第二种情形下, 首先应该注意到 H. Markowitz 1952 年的著作 ([332]) 和 M. Kendall 1953 年的著作 ([269]).

为证券组合 (portfolio) 选择理论奠定基础的 H. Markowitz 的著作是有关在不确定性条件下投资决策最优化问题的. 相应的概率分析就是所谓均值—方差分析 (mean-variance analysis), 它揭示了价格之间的协方差起着极为重要的作用, 这一协方差在决定所建立的证券组合 (选择) 的 (非系统) 风险 上是关键要素. 正是在 H. Markowitz 的著作中, 人们才完全意识到构造证券组合时分散化思想对于降低非系统风险的作用; 这一作用对于 W. Sharpe ([433]) 在 1964 年和 S. Ross ([412]) 在 1976 年所建立的下列两种经典理论有其特有的影响:

- *CAPM* —— *Capital Asset Pricing Model* (资本资产定价模型) [433],
- *APT* —— *Arbitrage Pricing Theory* (套利定价理论) [412].

这两种理论阐述了某种证券 (比如, 股票) 的收益是怎样形成的和由什么确定的; 其中 *CAPM* 理论认为它依赖于该证券所在的 "整体市场" 的状态, *APT* 理论指出这种收益依赖于怎样的因子, 而在金融计算时应该由怎样的概念出发. H. Markowitz 理论以及 *CAPM* 和 *APT* 理论的基本状况将在下面的 §§2b–2d 中叙述.

由这段简短的叙述已经很清楚, Markowitz 理论以及 *CAPM* 和 *APT* 理论都有关金融市场中的降低风险问题.

说到风险[①], 应该指的是在金融理论中通常要区分它的两种形式:

- 非系统风险 (unsystematic risk, 它也称为可分散风险 (diversifiable risk), 剩余风险 (residual risk), 专有风险 (specific risk), 异质风险 (idiosyncratic risk) 等等), 它可通过分散化来降低, 即投资者可通过自己的行动来影响它的风险,
- 系统风险 (systematic risk, 它也可称为不可分散风险 (undiversifiable risk)), 或者专门称为市场风险 (market risk).

与比如利率、股市指数的随机特性相联系的风险就可看作系统风险的例子, 对于这种风险来说, ("小") 投资者不可能通过自己的行动来影响它们. 当然, 这并不意味着不能与这种风险作 "斗争". 就实质而言, 正是以控制可能的系统风险为目标, 以拟定合理金融决策为目标, 以规避大风险和灾难风险 (例如在保险中) 为目标, 人们对统计数据的搜集及其处理建立了相当复杂的系统, 以预测市场中价格的可能运动. 诸

[①] 关于风险, 一般来说, 也包括保险中的风险, 参见后面的 §§3a, 3b.

如期货合约、期权、组合、价差、配置等等的衍生金融工具正是用于这个目标. 为此发展起来的 (比分散化要求更复杂的) 对冲技术也正是用于这个目标; 对冲技术考虑在未来的价格运动中的概率变化, 并以降低这些变化随后可能发生的不良后果所产生的风险为其追求的目标. ("对冲" 及其相应的定价理论将在第六章中详细讨论.)

1953 年 M. Kendall 在英国皇家统计学会 (Royal Statistical Society) 的会议上所作的报告 [269] 则是有关另一方面的问题, 它在一定的更为原始的意义下, 提出*市场上的价格有怎样的性态*, 用怎样的随机过程来描述这些价格的动态变化. 这一著作的重要性在于其中提出的问题最终导致 "*有效市场理论* (Efficient Capital Market Theory, ECM-theory)" 的建立; 我们将在下一节叙述这一理论, 同时也叙述它的各种细化和推广.

§2a. 随机游走假设和有效市场概念

1. 1930 年代出现了若干研究, 其中都进行了各种金融指标的经验分析, 试图回答一个根本性的大问题: *价格、价值等等的运动是可预测的吗?* 在这些用统计来描述的研究中, 首先应该提到 A. Cowles [84] (1933) 和随后的 [85] (1944), H. Working [480] (1934), A. Cowles and H. Jones, [86] (1937). A. Cowles 处理的是股票市场的数据, 而 H. Working 处理的是商品价格.

虽然这些著作都包含丰富的统计资料以及一些有趣的、出乎意料的结论: 价格 S_k $(k \geqslant 1)$ 的对数增量 $h_k = \ln \dfrac{S_k}{S_{k-1}}$ 是独立的, 但是无论是经济学家, 还是实务工作者, 都没有对这些研究引起应有的重视.

正如在 [35; 93 页] 中所注意到的, 这大概可以这样来解释: 一方面, 经济学家把价格动态变化的问题看作经济系统中的某种第二位 (sideshow) 的问题, 而另一方面, 当时还没有这样的经济学家有相应的数学背景以及掌握统计技术.

至于实务方面, 这些研究的结论在于, 序列 $(H_k)_{k\geqslant 1}$ (其中 $H_k = h_1 + \cdots + h_k$) 带有 "随机游走" (即它是独立随机变量之和) 的特征与当时在实务中流行的见解是不一致的, 他们认为价格遵循某种*节奏、周期、趋向*等等, 似乎只要揭示这一切, 就有可能给出价格运动预测的基础.

在这些著作以后, 一直到 1953 年, 当上面已经提到的 M. Kendall [269] 发表时, 它开创了金融特征演变研究的现代阶段, 而任何这方面的原理性的研究就其实质而言, 在当时还不存在.

M. Kendall 的研究出发点是试图揭示股票 (stocks) 和商品 (commodities) 的价格性态中的*周期性*. 通过分析现实的统计数据 (1928 年到 1938 年期间的 19 种股票价格的周数据, 1883 年到 1934 年在芝加哥市场上的小麦月平均价格以及 1816 年到 1951 年在纽约商品交易所 (New York Mercantile Exchange) 上的棉花月平均价格), 他惊奇地发现, 它们既无节奏、又无趋向, 更无周期; 尤其是他引出这样的结论, 所观察到的一系列数据像是 "$\cdots$ *the Demon of Chance drew a random number* $\cdots$ *and*

added it to the current price to determine the next ··· *price* (··· 机遇之魔掷出一个随机数 ··· 把它加到当前价格上以决定下一个 ··· 价格)". 换句话说, 价格 $S = (S_n)$ 的对数是随机游走, 即如果 $h_n = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$, 那么

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \qquad n \geqslant 1,$$

其中 H_n 是独立随机变量 $h_1, \cdots, h_n$ 之和.

这里有益的是再次重提往事 (比较 §1b): 其实用 "随机游走" 来描述价格演变的想法是 (上面提到的 A. Cowles 和 H. Working 的研究以前) L. Bachelier 在他 1900 年的学位论文 "Théorie de la spéculation (投机理论)" [12] 首先提出的. L. Bachelier 认为, 价格 $S^{(\Delta)} = (S_{k\Delta}^{(\Delta)})$ (顺便说一下, 不是价格的对数) 在时刻 $\Delta, 2\Delta, \cdots$, 改变自己的值, 并且使得价格

$$S_{k\Delta}^{(\Delta)} = S_0 + \xi_\Delta + \xi_{2\Delta} + \cdots + \xi_{k\Delta},$$

其中 $(\xi_{i\Delta})$ 是独立同分布的随机变量, 并且以概率 $\frac{1}{2}$ 取值 $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$. 尤其是,

$$\mathsf{E} S_{k\Delta}^{(\Delta)} = S_0, \qquad \mathsf{D} S_{k\Delta}^{(\Delta)} = \sigma \cdot (k\Delta).$$

正如上面已经注意到, 令 $k = \left[\dfrac{t}{\Delta}\right]$, $t > 0$, L. Bachelier 通过形式上的极限方法得到极限过程 $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$, 其中 $S_t = \lim\limits_{\Delta \to 0} S_{[\frac{t}{\Delta}]\Delta}^{(\Delta)}$ (极限应该在某种适当的概率意义下来理解) 有下列形式 (参见 §1b 第 6 点):

$$S_t = S_0 + \sigma W_t,$$

这里的 $W = (W_t)$ 现在通常称为标准布朗运动 ($W_0 = 0, \mathsf{E} W_t = 0, \mathsf{E} W_t^2 = t$), 或者维纳过程, 即有独立高斯 (正态) 增量和连续轨线的随机过程. 详情参见第三章中的 §§3a, 3b.

2. M. Kendall 的著作以后, 对于金融指标的动态变化更全面的研究以及构造各种概率模型来解释所观察到的诸如聚集性那样的可观察效应, 人们的兴趣急剧增加. 在这方面我们注意到 1950 年代末的两项研究: H. Roberts [405] (1959) 和 M. F. M. Osborne [371] (1959).

H. Roberts 的研究追随 H. Working 和 M. Kendall 的想法, 是直接针对金融业实务的, 并且包含有利于随机游走假设的启发性的论述. 天体物理学家 M. Osborne 的著作则以 "股市中的布朗运动 (Brownian Motion in the Stock Market)" 的标题问世, 其中以其自己的语言 (参见 [35; 103 页]) 表达了对诸如股价那样的现实数据来肯定运用他的物理和统计技巧的愿望. 在事先不知晓 L. Bachelier, H. Working 和 M. Kendall 的著作的情况下, M. Osborn 实质上导致同样的结论, 并且正确地注意到 (这

点对于以后很重要), 不是 (L. Bachelier 所运用的) 价格 S_t 本身, 而是它的对数才遵循 (带漂移的) 布朗运动. 这一思想也在随后的 P. Samuelson 的著作 ([420]) 中得到发展, 并在金融理论和实务中引入几何 (或者如他所说, 经济) 布朗运动

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t}, \qquad t \geqslant 0,$$

这里 $W = (W_t)$ 是标准布朗运动.

3. 不能说描述价格演变的随机游走假设立刻被经济学家们所接受, 但是正是由于它, 导致经典的理性运作 (或者如同通常所说的有效) 市场的概念; 其中的基本原始目标在于求得捍卫概率论思想应用的论证, 以及在它的框架内论证随机游走假设以及更一般的鞅假设的自然而然.

从直观的视角来看, 这里的 "有效性" 意味着理性响应新 "信息" 的市场; 其含义在于在市场上:

1) 随时产生正确的价格, 它们的建立看来是在 "均衡" 状态之下而变为 "公平" 的, 并且不为市场参与者留下套利机会的空间, 即不能通过价格中的差别来获得利润;
2) 市场的参与者 (交易者、投资者等等) 一致地解释所接受的信息, 同时基于信息的更新随时校正自己的决策;
3) 市场参与者在确立其目标时是一致的, 他们的运作带有 "集体理性" 的特征.

从形式的视角来看, 有效性的概念应该根据所面临的市场及其参与者的特征与信息之间的关系和相互依存上来考察.

通常要区分下列三种接受信息的形式:

1° 包含在过去价格值中的信息;
2° 不仅包含在过去价格值中、并且也包含在可公开获取的来源 (报纸、公告、电视等等) 中的信息;
3° 所有可能发生的信息.

对于这里所运用的 "信息" 概念的精确化将来自市场上所发生的 "不确定性", 它可以描述为某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 框架中的 "随机性". 如常所述, 这里

$\Omega = \{\omega\}$ 是结局空间, 或基本事件空间,

$\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集的 σ-代数,

P 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的概率测度.

有用的是在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上补充 σ-代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$, 它由 σ-子代数 $\mathscr{F}_n$ 组成, 并且当 $m \leqslant n$ 时, $\mathscr{F}_m \subseteq \mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}$.

我们把 $\mathscr{F}_n$ 中的事件解释为在时刻 n 以前 (包括 n) 可接受的 "信息".

4. 注. 我们把 $\mathscr{F}_n$ 中的集合在形式上与时刻 n 以前可观察的"事件"概念相联系, 要注意下列情况.

在实验活动 (包括观察价格) 中, 我们通常不仅是对怎样的具体结局成立感兴趣, 并且还对它是否属于所有结局的某个子集感兴趣.

这种集合 $A \subseteq \Omega$ 按实验条件可能回答两种类型的结局之一: "结局 $\omega \in A$" 或者 "结局 $\omega \notin A$" ; 这就解释了 (可观察的) 事件的意义. 这样, 如果 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, 这里值 $\omega_i = +1$ 解释为在时刻 i 价格 "上涨", 而 $\omega_i = -1$ 解释为在该时刻价格 "下跌", 那么 (在这个三步模型中) 所有可能发生的结局的空间就由 8 个点所组成

$$\Omega = \{(-1,-1,-1), (-1,-1,+1), \cdots, (+1,+1,+1)\}.$$

如果我们有可能记录所有 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的值, 那么比如集合

$$A = \{(-1,+1,-1), (+1,-1,+1)\}$$

就是一个 "事件", 因为对于 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 来说, 所有的三个值 ω_1, ω_2, ω_3 都记录在案, 我们可确凿无误地来说 "$\omega \in A$" 或者 "$\omega \notin A$".

然而, 如果没有可能在时刻 $i = 2$ 记录结果 ω_2, 即没有关于这个值的 "信息", 那么这时集合 A 就不再是 "事件", 因为我们只有 ω_1 和 ω_3, 不可能回答 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 是否属于集合 A 这一问题.

5. 带有分化 σ-代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)$ 的空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F} = (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ 在随机分析中通常称为*渗透概率空间*. 在金融数学的框架下, 我们将也称 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)$ 为*信息流*. 借助于这一概念, 市场*有效性*的各种形式可如下定义.

设在 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 中分化出三个 σ-代数流

$$\mathbb{F}^1 = (\mathscr{F}_n^1), \qquad \mathbb{F}^2 = (\mathscr{F}_n^2), \qquad \mathbb{F}^3 = (\mathscr{F}_n^3),$$

其中 $\mathscr{F}_n^1 \subseteq \mathscr{F}_n^2 \subseteq \mathscr{F}_n^3$, 并且 σ-代数 $\mathscr{F}_n^i$ 中的每一个都可解释为时刻 n 的形式为 (i) 的信息.

根据 E. Fama [150] (1965), 我们说市场是*弱有效的* (weakly efficient), 是指 (在这个市场中的金融工具的) 价格 $S = (S_n)$ 中的每一个有下列性质: 对它们全体可求得某个规范价格 $B = (B_n)_{n \geqslant 0}$ (通常这就是无风险银行账户) 和局部等价于 P 的概率测度 $\widehat{\mathsf{P}}$ (即, 对于每个 $n \geqslant 0$, 它在 $\mathscr{F}_n^1$ 上的局限 $\widehat{\mathsf{P}}_n = \widehat{\mathsf{P}} | \mathscr{F}_n^1$ 等价于 $\mathsf{P}_n = \mathsf{P} | \mathscr{F}_n$), 使得

$$\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n} \right)_{n \geqslant 0}$$

是 $\widehat{\mathsf{P}}$-鞅: $\dfrac{S_n}{B_n}$ 为 $\mathscr{F}_n^1$-可测, 并且

$$\widehat{\mathsf{E}} \left| \frac{S_n}{B_n} \right| < \infty, \quad \widehat{\mathsf{E}} \left(\frac{S_{n+1}}{B_{n+1}} \,\middle|\, \mathscr{F}_n \right) = \frac{S_n}{B_n}, \qquad n \geqslant 0.$$

在 $\frac{S}{B}$ 的“鞅性”是对信息流 $\mathbb{F}^3 = (\mathscr{F}_n^3)$ 而言的情形下, 就说市场强有效 (strongly efficient), 而在流为 $\mathbb{F}^2 = (\mathscr{F}_n^2)$ 的情形下, 就说市场半强有效 (semi-strongly efficient).

为了简单起见, 本节后面的叙述中将认为 $B_n \equiv 1$, 而 $\widehat{\mathsf{P}} = \mathsf{P}$.

在讨论这些定义以前, 我们察觉, 在关于流 $\mathbb{F}^1$, $\mathbb{F}^2$ 和 $\mathbb{F}^3$ 的鞅类 $\mathscr{M}^1 = \mathscr{M}(\mathbb{F}^1)$, $\mathscr{M}^2 = \mathscr{M}(\mathbb{F}^2)$ 和 $\mathscr{M}^3 = \mathscr{M}(\mathbb{F}^3)$ 之间有下列关系式成立:

$$\mathscr{M}^3 \subseteq \mathscr{M}^2 \subseteq \mathscr{M}^1.$$

事实上, 如果价格 $S = (S_n)_{n\geqslant 0} \in \mathscr{M}^2$, 那么这意味着 S_n 为 $\mathscr{F}_n^2$-可测, 并且 $\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^2) = S_n$. 由此, 运用条件数学期望的“望远镜”性质

$$\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^1) = \mathsf{E}(\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^2) \,|\, \mathscr{F}_n^1),$$

并考虑 S_n 为 $\mathscr{F}_n^1$-可测 (我们记得 $\mathscr{F}_n^1$ 是由时刻 n 以前的包括值 S_k $(k \leqslant n)$ 在内的所有价格的值所生成的), 我们发现, $\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^1) = S_n$, 即 $S \in \mathscr{M}^1$.

如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 是独立随机变量序列, 并且 $\mathsf{E}|\xi_k| < \infty$, $\mathsf{E}\xi_k = 0$, $k \geqslant 1$, $\mathscr{F}_n^\xi = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $\mathscr{F}_0^\xi = \{\varnothing, \Omega\}$ 以及 $\mathscr{F}_n^\xi \subseteq \mathscr{F}_n^1$, 那么对于 $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geqslant 1$, $S_0 = 0$, 序列 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 将显然关于 $\mathscr{F}^\xi = (\mathscr{F}_n^\xi)_{n\geqslant 0}$ 是鞅, 并且

$$\mathsf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^i) = S_n + \mathsf{E}(\xi_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n^i), \qquad i = 1, 2, 3.$$

由此很明显, 如果对于每个 n, 量 ξ_{n+1} 不依赖于 $\mathscr{F}_n^i$ (在下列含义下: 对于任何 Borel 集 A, 事件 $\{\xi_{n+1} \in A\}$ 不依赖于任何 $\mathscr{F}_n^i$ 中的事件), 那么序列 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 是 $\mathscr{M}^i$ 类的鞅. 于是, 如果 ξ_{n+1} 看作关于 $\mathscr{F}_n^3$ 的“全新的信息”, 那么 S 将属于类 $\mathscr{M}^3$.

对于以后来说, 重要的是要注意到, 如果 $X = (X_n)$ 是关于流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)$ 的鞅, $X_n = x_1 + \cdots + x_n$, $x_0 = 0$, 那么 $x = (x_n)$ 是鞅差:

$$x_n \text{ 为 } \mathscr{F}_n\text{-可测},$$

$$\mathsf{E}|x_n| < \infty,$$

$$\mathsf{E}(x_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0.$$

由后一个性质可得, 在假定下列条件下: $\mathsf{E}|x_n|^2 < \infty$, $n \geqslant 1$, 对于任何 $n \geqslant 0$ 和 $k \geqslant 1$, 有

$$\mathsf{E}x_n x_{n+k} = 0,$$

即, 量 $x = (x_n)$ 是不相关的. 换句话说, 平方可积鞅属于有正交增量的随机序列类:

$$\mathsf{E}\Delta X_n \Delta X_{n+k} = 0,$$

其中 $\Delta X_n \equiv X_n - X_{n-1} = x_n$, $\Delta X_{n+k} = x_{n+k}$. 把这样的序列类表示为 OI_2 (orthogonal increments, 下标 "2" 表示 "平方可积"), 我们得到

$$\mathscr{M}_2^3 \subseteq \mathscr{M}_2^2 \subseteq \mathscr{M}_2^1 \subseteq OI_2.$$

由上所述得到, 最终, 市场的*有效性*应该干脆理解为它的资产价格的*鞅性*. 价格本身是*随机游走*[1)]的市场是这样的市场的特殊情形.

6. 为什么 "鞅性" 假设作为 "随机游走" 假设的推广和作为 "有效市场" 概念中的基础是完全自然的? 这里有多条理由, 而最好的解释是在*无套利市场理论*的框架中给出的, 其中市场的*有效性*, 或者更为确定的是, 市场的*合理性*, 干脆就与无套利机会联系在一起; 正如我们将在以后所看到的, 鞅将以最直接的方式出现. (关于这一点的详情参见以后的第五章 §2a.)

现在, 为在所考察的情景中怎样产生鞅给出某种表示, 我们引入下列初等讨论.

设 $S = (S_n)_{n\geqslant 1}$, S_n 比如是时刻 n 的股票的价格. 记 $(\Delta S_n \equiv S_n - S_{n-1})$

$$\rho_n = \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}, \qquad n \geqslant 1,$$

它是价格的相对变化, 也可称为*收益率*; 假定, 市场运作使得量 S_n 关于可接受信息流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)$ 为 $\mathscr{F}_n$-可测, 并且 (P-a.e.)

$$\mathsf{E}(\rho_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = r, \tag{1}$$

其中 r 是某个常数. 由最后两个公式我们求得,

$$S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1} \tag{2}$$

以及 (假定 $1 + r \neq 0$)

$$S_{n-1} = \frac{\mathsf{E}(S_n \mid \mathscr{F}_{n-1})}{1+r}. \tag{3}$$

我们假定, 股票价格 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 这样演变:

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1}, \qquad n \geqslant 1.$$

我们将认为, 除了股票以外, 还有一个*银行账户* $B = (B_n)_{n\geqslant 0}$, 使得

$$\Delta B_n = rB_{n-1}, \qquad n \geqslant 1, \tag{4}$$

其中 r 是收益率, $r \geqslant 0$, $B_0 > 0$.

[1)] 在概率统计的文献中, 通常称用*独立*随机变量之和来描述的游走为随机游走. 在经济学文献中, 这个术语有时也在另一个含义下运用, 它干脆就为了强调例如价格运动的随机特征.

由于 $B_n = B_0(1+r)^n$, 故由 (3) 我们求得

$$\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} = \mathsf{E}\left(\frac{S_n}{B_n}\,\Big|\,\mathscr{F}_{n-1}\right).$$

而这也就意味着序列 $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n\geqslant 1}$ 关于流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是鞅.

上面所作的假设 $\mathsf{E}(\rho\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = r$ (P-a.e.) 从 "经济学视角" 来看是非常自然的: 如果它不成立, 比如, 在其原来的意义下, $\mathsf{E}(\rho_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) > r$ (P-a.e.) 或 $\mathsf{E}(\rho_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) < r$ (P-a.e.), $n \geqslant 1$, 那么投资者很快就发现, 只要在前一种情况下投资到股票上和在后一种情况下把资金存入银行账户. 换句话说, 在一种证券 "优于" 另一种证券的情形下, 较差的证券必定迅速消失, 这才会符合 "正确"、"有效" 地建立起来的市场的特性.

7. 现在我们把所考察的股票价格演变模型 (2) 复杂化.

如果认为在时刻 $n-1$ 你购买价格为 S_{n-1} 的股票, 而在时刻 n (按价格 S_n) 出售, 那么你的 (绝对) "盈利" 既可能是正的, 也可能是负的, 并等于 $\Delta S_n \equiv S_n - S_{n-1}$. 当然, 更为实际的 "盈利" 度量不是绝对量 ΔS_n, 而是 (正如上面已经作出的) 相对量 $\left(\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right)$, 即把 ΔS_n 与购买股票的花费 S_{n-1} 一起来衡量.

比如 $S_{n-1} = 20$, 而 $S_n = 29$, 那么 $\Delta S_n = 9$, 这与 20 相比不算小. 但是如果 $S_{n-1} = 200$, 而 $S_n = 209$, 那么增量 $\Delta S_n = 9$ 与 200 相比就不算大.

尤其是, 在第一种情形下, $\rho_n = 9/20$ (=45%), 而在第二种情形下, $\rho_n = 9/200$ (=4.5%).

为了表达上的简单起见, 我们把这个*相对盈利量* (除了已经用过的术语 "收益率" 或 "随机收益率" 以外) 经常称为*回报* (return) 或*增值系数*. 今后我们将保留这样的术语运用.

与增量 $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$ 解释为 (在时刻 $n-1$) 买 (在时刻 n) 卖的盈利相对应的是, 也可假定还有*附加盈利来源*, 例如, 持有股票的分红, 它在时刻 n 将认为 $\mathscr{F}_n$-可测, 并等于 δ_n.

这时, 总的 "绝对" 盈利将等于 $\Delta S_n + \delta_n$, 而相对盈利量等于

$$\rho_n = \frac{\Delta S_n + \delta_n}{S_{n-1}}. \tag{5}$$

当然, 有意义的是要得到某种表示, 使得当价格 (S_n) 的 "局部" 性态由模型 (5) 来描述时, 有可能 "整体地" 引入价格 (S_n) 本身. 很明显, 对于这个问题的解答需要对量 (ρ_n) 和 (δ_n) 作出确定的假设.

鉴于此, 我们假设, 例如, 对于所有 $n \geqslant 1$,

$$\mathsf{E}(\rho_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) \equiv r \geqslant 0.$$

这时, 由 (5), 并假定 $\mathsf{E}|S_n| < \infty$, $\mathsf{E}|\delta_n| < \infty$, 再取条件数学期望 $\mathsf{E}(\cdot \mid \mathscr{F}_{n-1})$, 我们求得

$$S_{n-1} = \frac{1}{1+r}\mathsf{E}(S_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) + \frac{1}{1+r}\mathsf{E}(\delta_n \mid \mathscr{F}_{n-1}). \tag{6}$$

类似地有

$$S_n = \frac{1}{1+r}\mathsf{E}(S_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) + \frac{1}{1+r}\mathsf{E}(\delta_{n+1} \mid \mathscr{F}_n),$$

把它与 (6) 一起考虑, 就导得等式

$$\begin{aligned} S_{n-1} = {} & \frac{1}{(1+r)^2}\mathsf{E}(S_{n+1} \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\ & + \frac{1}{(1+r)^2}\mathsf{E}(\delta_{n+1} \mid \mathscr{F}_{n-1}) + \frac{1}{1+r}\mathsf{E}(\delta_n \mid \mathscr{F}_{n-1}). \end{aligned}$$

继续这个程序, 我们求得, 对于任何 $k \geqslant 1$ 和任何 $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{1}{(1+r)^k}\mathsf{E}(S_{n+k} \mid \mathscr{F}_n) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(1+r)^i}\mathsf{E}(\delta_{n+i} \mid \mathscr{F}_n). \tag{7}$$

由此变得很清楚, (假定 $|\mathsf{E}(\delta_{n+i} \mid \mathscr{F}_n)| \leqslant \mathrm{Const}$, $n \geqslant 0$, $i \geqslant 1$,) 方程 (6) 的每个有界解 ($|S_n| \leqslant \mathrm{Const}$, $n \geqslant 1$)(对于 $n \geqslant 1$) 有下列形式:

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i}\mathsf{E}(\delta_{n+i} \mid \mathscr{F}_n). \tag{8}$$

这个解在经济学文献中称为*市场基本解* (market fundamental solution; 参见例如 [211]). 在分红不随时间改变 ($\delta_n \equiv \delta = \mathrm{Const}$) 而 $\mathsf{E}(\rho_n|\mathscr{F}_{n-1}) \equiv r > 0$ 的特殊情形下, 由 (8) 得到, (有界) 价格 S_n, $n \geqslant 1$, 也不随时间改变:

$$S_n \equiv \frac{\delta}{r}, \qquad n \geqslant 1.$$

8. 鞅类是相当广的. 例如, 它也包括上面考察过的 "随机游走". 同时, 鞅性质

$$\mathsf{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = X_n$$

是指, 在 "信息" $\mathscr{F}_n$ 的基础上对增值 $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$ 进行预测, 至多只能说, 这个增值 (关于 $\mathscr{F}_n$) *的均值等于零*. 这一状况回应了 "公正"、"组织良好" 的市场的直观观念, 在这样的市场中, 不可能 (以正概率) 使一些人获利, 而另一些人吃亏. 在这样的市场中, 条件获利 $\mathsf{E}(\Delta X_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ 应该等于零. 正是联系到这一点, L. Bachelier 写道: "投机者的数学期望是零 (英译文为: The mathematical expectation of the speculator is zero)." (我们记得, 在赌博中, 输了以后加倍下注、而第一次赢后终止赌博的赌博系统称为*鞅* (martingale), 而对于它来说, 条件获利 $\mathsf{E}(\Delta X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0$; 详情参见 [439; 第七章, §1].)

最后, 我们注意到, 价格演变的经验分析指出 (参见第四章 §3c), 对于随机序列

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}, \qquad n \geqslant 1$$

来说, 其自相关接近于零; 它可看作鞅假设的一个论据, 尽管这个论据是间接的.

9. 有效市场假设为专注于分散化思想的 "谨慎的" 投资者发展新金融工具提供了新的推动力 (参见 §2b).

这种新的金融工具应该首推 "共同基金 (Mutual Funds)" 的变种之一: 所谓 "指数基金 (Index Funds)".

这种基金的特点在于它们把 (自己的客户的) 资金向某个股票 "指数" 中出现的那些成分公司股票投资.

第一批这样的基金之一是 1976 年美国的万格集团 (Vanguard Group, 中译名曾经用过 "先锋集团") 建立的 "The Vanguard Index Trust-500 Portfolio", 它运作 (买卖) 参与构成标准普尔 500 (Standard & Poor's-500) 指数的 500 家公司 (400 个工业公司, 20 个运输公司, 40 个公用事业公司和 40 个金融公司) 的成分公司的股票.

有效市场假设说, 价格的改变, 也就是金融决策的改变, 是在信息更新时发生的 (并且速度足够快). 通常的 "普通" 投资者 (个体或机构) 不掌握足够的信息, 因而一般不可能很快地对价格的改变快速反应. 与此同时, 个体交易的运营成本照例会使得他们 "耗尽" 可能有的利润.

在这个含义下, 对 "指数基金" 的投资正是对那些 "信息不充分的" 投资者有吸引力, 这些人不足以算计获取 "快速" 和 "高额" 利润, 而倾向于 (谨慎地) 把资金投入到被良好分散化的长线证券中去.

另一些类似的美国基金 (其中包括债券基金) 的例子是: "The Extended Market Portfolio (扩充市场组合)", "The Vanguard Small Capitalization Stock Fund (万格小资本化股票基金)", "The Vanguard Bond Market Fund (万格债券市场基金)", 国际基金如 "The European Portfolio (欧洲组合)", "The Pacific Portfolio (太平洋组合)" 等等.

§2b. 证券组合. Markowitz 分散化

1. 正如已经在 §2a 中所注意到, H. Markowitz 1952 年的著作 [332] 在金融管理和金融工程的现代理论和实务的建立上起着决定性的作用. 在 Markowitz 理论中, 对于投资者来说, 特别吸引人的是在证券组合 (portfolio) 中的分散化 (diversification) 思想, 因为它不仅说明了降低投资的 (非系统, 参见 34 页) 风险的原则上的可能性,

并且也给出怎样做的实际推荐运作.[1)]

为了揭示这一理论的基本状况和观念, 我们考察下列一步投资问题.

设投资者有机会把自己的初始资本 x 投资遍及股票 $A_1, \cdots, A_N$, 它们在时刻 $n=0$ 的价格分别等于 $S_0(A_1), \cdots, S_0(A_N)$.

设 $X_0(b)=b_1S_0(A_1)+\cdots+b_NS_0(A_N)$, 其中 $b_i \geqslant 0$, $i=1,\cdots,N$. 换句话说, 令

$$b=(b_1,\cdots,b_N)$$

是证券组合, 其中 b_i 是价格为 $S_0(A_i)$ 的股票 A_i 的股票"数量".

我们将假定, 每种股票 A_i 的演变如下确定: 其在时刻 $n=1$ 的价格 $S_1(A_i)$ 服从下列差分方程

$$\Delta S_1(A_i)=\rho(A_i)S_0(A_i),$$

或者等价的

$$S_1(A_i)=(1+\rho(A_i))\,S_0(A_i),$$

这里 $\rho(A_i)$ 是股票 A_i 的随机收益率, $\rho(A_i)>-1$.

如果投资者选择组合 $b=(b_1,\cdots,b_N)$, 那么他的初始资本 $X_0(b)=x$ 变成

$$X_1(b)=b_1S_1(A_1)+\cdots+b_NS_1(A_N),$$

它被期待"增值". 然而, 这个愿望必须还要考虑"风险", 它是与"高"盈利的获得相联系的.

出于这一目标, H. Markowitz 考察资本 $X_1(b)$ 的两个数字特征:

$$\mathsf{E}X_1(b): \text{数学期望} \quad 和 \quad \mathsf{D}X_1(b): \text{方差}.$$

有了这两个数字特征, 就可按照不同情况来陈述依赖于最优化判别准则的最佳证券组合选择的最优化问题.

例如, 可能如下提出问题: 怎样的证券组合 b^* 可使某个目标函数 $f=f(\mathsf{E}X_1(b), \mathsf{D}X_1(b))$ 在"预算约束"下, 对下列容许证券组合类达到最大值:

$$B(x)=\{b=(b_1,\cdots,b_N): b_i \geqslant 0,\ X_0(b)=x\}, \qquad x>0.$$

下列对*方差*提出的问题也是很自然的: 求

$$\inf \mathsf{D}X_1(b),$$

[1)] 商业简明辞典 [65] 给出这样的定义:

分散化: 在证券投资组合中包含广泛范围的公司, 以避免只笼罩在一个经济行业的衰退情形下的严重损失.

证券组合: 按自然人或法人特点来登记的证券清单.

其中假定 inf 是对满足下列约束的组合 b 来取的:

$$b \in B(x),$$

$$\mathsf{E}X_1(b) = m,$$

其中 m 是某个常数.

下面的图像演示了点 $(\mathsf{E}X_1(b), \sqrt{\mathsf{D}X_1(b)})$ 的集合的典型图景, 这里 $b \in B(x)$, 并且对 b 可能也有补充约束.

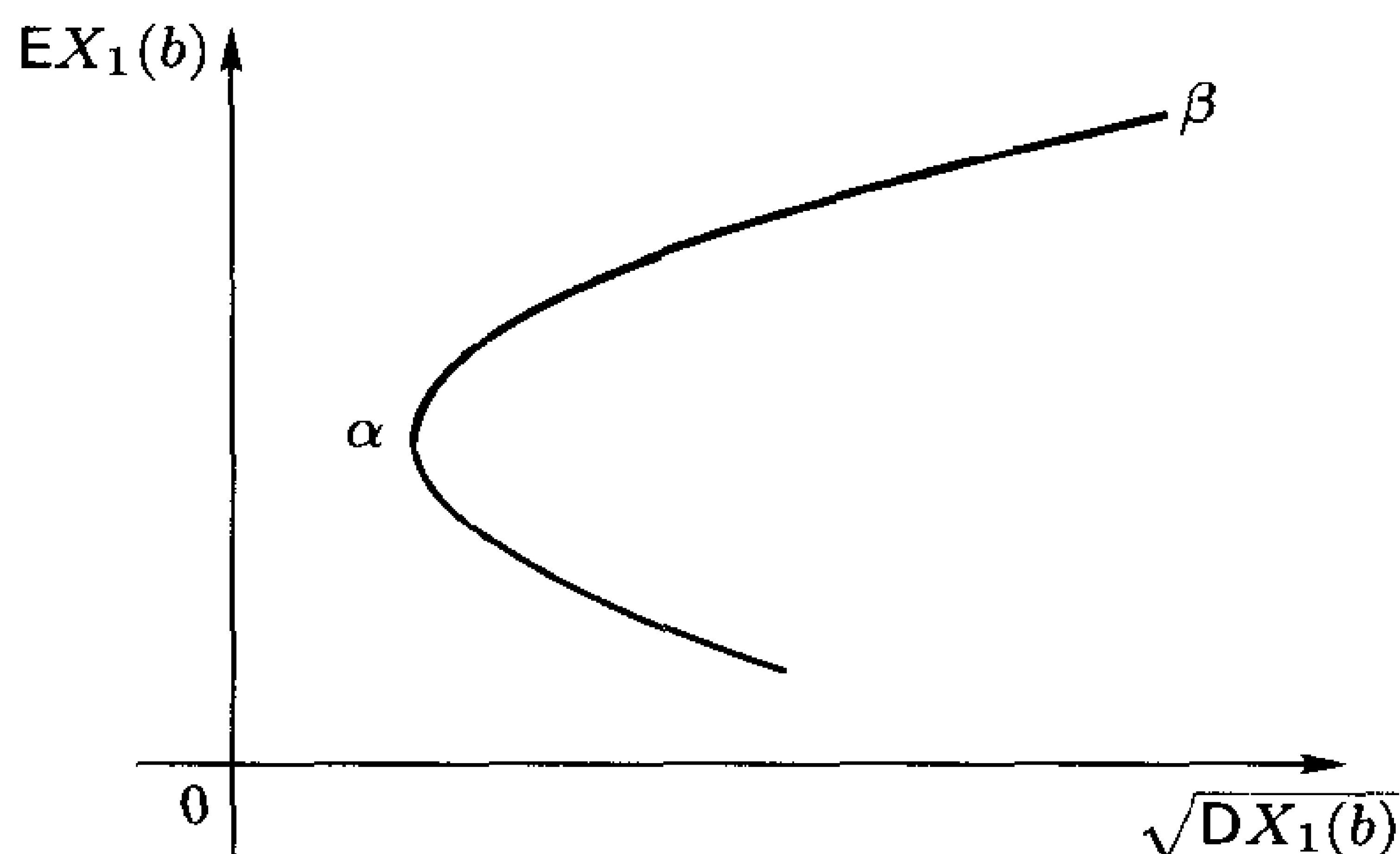


图 8 Markowitz 均值—方差分析 (mean-variance analysis) 的图示

在图中可看得很清楚, 如果你在*方差最小*的条件下对资本的*平均值最大*感兴趣, 那么必须选择这样的组合: 对于它来说, $(\mathsf{E}X_1(b), \sqrt{\mathsf{D}X_1(b)})$ 位于 "起点" 为 α、"终点" 为 β 的曲线段上. (Markowitz 称这些组合是*有效的*, 而所引入的运用均值和方差的分析整体称为 "均值—方差分析 (mean-variance analysis)".)

2. 现在指出, 在一步证券组合的最优化问题中, 可以把量 $(S_1(A_1), \cdots, S_1(A_N))$ 取代为直接对收益率 $(\rho(A_1), \cdots, \rho(A_N))$ 来进行运算. 具体做法如下.

设 $b \in B(x)$, 即 $x = b_1 S_0(A_1) + \cdots + b_N S_0(A_N)$. 引入量 $d = (d_1, \cdots, d_N)$, 其中令

$$d_i = \frac{b_i S_0(A_i)}{x}.$$

由于 $b \in B(x)$, 故 $d_i \geqslant 0$, 且 $\sum_{i=1}^{N} d_i = 1$. 我们把资本 $X_1(b)$ 表示为下列形式

$$X_1(b) = (1 + R(b))X_0(b),$$

并设

$$\rho(d) = d_1\rho(A_1) + \cdots + d_N\rho(A_N).$$

显然,

$$\begin{aligned} R(b) &= \frac{X_1(b)}{X_0(b)} - 1 = \frac{X_1(b)}{x} - 1 = \frac{\sum b_i S_1(A_i)}{x} - 1 \\ &= \sum d_i \frac{S_1(A_i)}{S_0(A_i)} - 1 = \sum d_i \left(\frac{S_1(A_i)}{S_0(A_i)} - 1 \right) \\ &= \sum d_i \rho(A_i) = \rho(d). \end{aligned}$$

这样,

$$R(b) = \rho(d),$$

由此得到, 如果 $d = (d_1, \cdots, d_N)$ 和 $b = (b_1, \cdots, b_N)$ 通过关系式 $d_i = \dfrac{b_i S_0(A_i)}{x}$, $i = 1, \cdots, N$, 联系在一起, 那么对于 $b \in B(x)$,

$$X_1(b) = x(1 + \rho(d)),$$

因而, 从对于 $X_1(b)$ 的最优化问题的视角来看, 可以对于 $\rho(d)$ 的对应问题来进行运算.

3. 现在我们转向分散化问题, 它力求用量 $X_1(b)$ 的方差或标准差来度量的 (非系统) 风险任意小.

为了这一目标, 作为起点, 我们考察两个二阶矩有限的随机变量 ξ_1 和 ξ_2. 于是, 如果 c_1 和 c_2 是常数, $\sigma_i = \sqrt{\mathsf{D}\xi_i}$, $i = 1, 2$, 那么

$$\mathsf{D}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = (c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2)^2 + 2c_1c_2\sigma_1\sigma_2(1 + \sigma_{12}),$$

其中 $\sigma_{12} = \dfrac{\mathsf{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sigma_1\sigma_2}$, $\mathsf{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathsf{E}\xi_1\xi_2 - \mathsf{E}\xi_1 \cdot \mathsf{E}\xi_2$. 由此很明显, 如果 $c_1\sigma_1 = c_2\sigma_2$, 而 $\sigma_{12} = -1$, 那么 $\mathsf{D}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = 0$.

这样一来, 如果量 ξ_1 和 ξ_2 以相关系数 $\sigma_{12} = -1$ 负相关, 那么取适当的常数 c_1 和 c_2 满足 $c_1\sigma_1 = c_2\sigma_2$, 我们就得到有零方差的组合 $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$. 不过, 当然, 这时均值 $\mathsf{E}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2)$ 可能相当小. (由于条件 $b \in B(x)$, $c_1 = c_2 = 0$ 的情形对于最优化问题来说无意义.)

由这些初等讨论可见, 对于 (c_1, c_2) 和量 (ξ_1, ξ_2) 的类上给定的约束, 要求解使 $\mathsf{E}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2)$ "很大", 而 $\mathsf{D}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2)$ "很小" 的问题, 必须力求选取协方差尽可能接近于 -1 的点对 (ξ_1, ξ_2).

所陈述的负相关效应也称为*Markowitz*效应, 它是投资分散化的基本观念之一: *在构成证券组合时, 必须力求包含在组合中的证券之间有尽可能多的负相关.*

分散化基础中的另一个观念基于下列思考.

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$ 是互不相关的随机变量序列, 其方差满足 $\mathsf{D}\xi_i \leqslant C, i = 1, \cdots, N$, 这里 C 是某个常数. 于是

$$\mathsf{D}(d_1\xi_1 + \cdots + d_N\xi_N) = \sum_{i=1}^{N} d_i^2 \mathsf{D}\xi_i \leqslant C \sum_{i=1}^{N} d_i^2.$$

因此, 例如取 $d_i = 1/N$, 我们求得

$$\mathsf{D}(d_1\xi_1 + \cdots + d_N\xi_N) \leqslant \frac{C}{N} \to 0, \qquad N \to \infty.$$

这个不相关效应说, 如果投资是在不相关的证券中进行, 那么为了降低风险, 即方差 $\mathsf{D}(d_1\xi_1 + \cdots + d_N\xi_N)$, 必须取它们的个数 N 尽可能大.

我们转向关于量

$$\rho(d) = d_1\rho(A_1) + \cdots + d_N\rho(A_N)$$

的方差 $\mathsf{D}\rho(d)$ 的问题. 我们有

$$\mathsf{D}\rho(d) = \sum_{i=1}^{N} d_i^2 \mathsf{D}\rho(A_i) + \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{N} d_i d_j \mathsf{Cov}\left(\rho(A_i), \rho(A_j)\right).$$

我们在这里取 $d_i = 1/N$. 那么

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^2 \mathsf{D}\rho(A_i) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \cdot N \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathsf{D}\rho(A_i) = \frac{1}{N} \cdot \overline{\sigma}_N^2,$$

这里 $\overline{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathsf{D}\rho(A_i)$ 是平均方差. 同时,

$$\sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}} d_i d_j \mathsf{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 (N^2 - N) \cdot \overline{\mathsf{Cov}}_N,$$

这里 $\overline{\mathsf{Cov}}_N$ 是平均协方差:

$$\overline{\mathsf{Cov}}_N = \frac{1}{N^2 - N} \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}} \mathsf{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j)).$$

这样一来,

$$\mathsf{D}\rho(d) = \frac{1}{N}\overline{\sigma}_N^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\overline{\mathsf{Cov}}_N, \tag{1}$$

并且很明显, 如果 $\overline{\sigma}_N^2 \leqslant C$, 以及当 $N \to \infty$ 时, $\overline{\mathsf{Cov}}_N \to \overline{\mathsf{Cov}}$, 那么

$$\mathsf{D}\rho(d) \to \overline{\mathsf{Cov}}, \qquad N \to \infty. \tag{2}$$

由这个公式我们看到, 如果 $\overline{\mathsf{Cov}}$ 等于零, 那么带充分大的 N 的分散化的投资风险, 即 $\mathsf{D}\rho(d)$, 可变为任意小. 遗憾的是, 如果考察的比如是股票的风险, 那么其中照例还有价格上的正相关 (它们在同一方向上相当一致地运动), 使得 $\overline{\mathsf{Cov}}_N$ 当 $N \to \infty$ 时不趋向于零. 极限值 $\overline{\mathsf{Cov}}$ 也是*系统风险*, 或者说*市场风险*, 它对于所考察的风险来说是固有的, 并且分散化不可能使它降低. 在公式 (1) 中的第一项确定了*非系统风险*, 它正如我们所看到的, 可通过使股票种类数增大来降低 ("均值—方差分析 (mean-variance analysis)". 更详尽的理论参见 [268], [331]–[333].)

§2c. 资本资产定价模型 (*CAPM* — Capital Asset Pricing Model)

1. 用于最优证券组合自身计算的均值—方差分析 ("mean-variance analysis") 要求值 $\mathsf{E}\rho(A_i)$ 和 $\mathsf{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j))$, 而并不对这些值的产生*给出解释*. (在实际操作中, 这些量是根据过去的数据用通常的*统计*均值和协方差来估计的.)

CAPM 理论 (W. F. Sharpe, [433], J. Lintner, [301]) 和以后考察的*APT* 理论不仅对量 $\mathsf{E}\rho(A_i)$ 和 $\mathsf{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j))$ 的值的问题给出回答, 并且同时还指出, 个别股票 A_i 的 (随机) 收益率的量 $\rho(A_i)$ 怎样依赖于进行 A_i 的交易的 "大" 市场的收益率 ρ 的量. 作为在 Markowitz 的 "均值—方差分析" 中起着关键作用的协方差 $\mathsf{Cov}(\rho(A_i), \rho(A_j))$ 的补充, *CAPM* 理论阐明了另一个新对象的重要作用, 它就是市场中的股票 A_i 的收益率与市场本身的收益率之间的协方差 $\mathsf{Cov}(\rho(A_i), \rho)$.

CAPM 理论及其结论基于*均衡*市场的概念, 特别是, 它指的是在这样的市场上没有运行费用, 其所有的参与者 (投资者) 在下列含义下是*均匀的*: 在基于其所有可接受的信息的基础上对价格的未来运动有同样的估值能力, 有同样的时间视野, 所有人的决策都基于价格的均值和方差. 还假定, 所有被考察的资产都 "无限可分", 并且在市场上有收益率为 r 的*无风险*证券 (银行账户、国库券等等).

具有无风险证券是关键的, 正是由于收益率 r 出现在*CAPM* 理论的所有公式中作为 "基本" 变量, 才由此导出计算.

在这一含义下, 有益的是注意到, 对风险资产的收益率 $\rho(A_i)$ 的均值 $\mathsf{E}\rho(A_i)$ 的长期观察可指出 $\mathsf{E}\rho(A_i) > r$. 下面引入的由年平均数据所构成的表上列出了美国在 1926—1985 年期间的收益率平均的名义值和实际值 (考虑通货膨胀).

表

证券	名义收益率	考虑通货膨胀的实际收益率
普通股票	12%	8.8%
公司债券	5.1%	2.1%
政府债券	4.4%	1.4%
国库券	3.5%	0.4%

2. *CAPM* 理论的基本状况可用一步运行的市场的例子来阐明.

设 $S_1 = S_0(1+\rho)$ 确定了 "大" 市场的 (随机) 价格的值, 例如, 它是指数 S&P500 在时刻 $n=1$ 的值. 以 $S_1(A) = S_0(A)(1+\rho(A))$ 表示资产 A 在时刻 $n=1$ 时的价格, 其收益率为 $\rho(A)$ (A 是 S&P500 中的某只股票).

无风险资产的价格演变由下列公式来确定:

$$B_1 = B_0(1+r).$$

在某种均衡市场概念的基础上建立起来的 *CAPM* 理论确认 (参见例如 [268], [433]), 对于每种资产 A 存在量 $\beta(A)$, 它称为这一资产的倍塔[1], 并满足

$$\mathsf{E}[\rho(A) - r] = \beta(A)\mathsf{E}[\rho - r]. \tag{1}$$

这时,

$$\beta(A) = \frac{\mathsf{Cov}(\rho(A), \rho)}{\mathsf{D}\rho}. \tag{2}$$

换句话说, (在相对于无风险资产运用资产 A 时的) "溢价" $\rho(A) - r$ 的平均值正比于 (把资金投入到比如指数 S&P500 那样的带市场整体特征的资产中去的) 溢价 $\rho - r$ 的平均值.

公式 (2) 确立了 "倍塔" 值, 即 $\beta(A)$ 是由收益率 ρ 和 $\rho(A)$ 的相关性质来确定的, 或者等价地, 由对应的价格 S_1 和 $S_1(A)$ 的相关性质来确定的.

把关系式 (1) 改写为

$$\mathsf{E}\rho(A) = r + \beta(A)\mathsf{E}(\rho - r), \tag{3}$$

并对于有倍塔 $\beta(A) = \beta$ 的资产 A, 令对应的收益率值 $\rho(A)$ 为 ρ_β.

这样在 $\beta = 0$ 的情形下,

$$\rho_0 = r,$$

而在 $\beta = 1$ 的情形下,

$$\rho_1 = \rho.$$

由此可见, (3) 是 *CAPM* 的*直线方程*:

$$\mathsf{E}\rho_\beta = r + \beta\mathsf{E}(\rho - r), \tag{4}$$

其图像如图 9, 它指出, 对于资产来说, 其平均盈利 $\mathsf{E}\rho_\beta$ 怎样依赖于倍塔 β、收益率 r 和市场的平均盈利 $\mathsf{E}\rho$ 来改变.

---

[1] 如果资产 A 有 "倍塔" $\beta(A)$, 那么按其事物的逻辑还应该有 "阿尔法" $\alpha(A)$. 有一些作者 (参见例如 [267]) 把平均值 $\mathsf{E}\rho(A)$ 称为 "阿尔法".

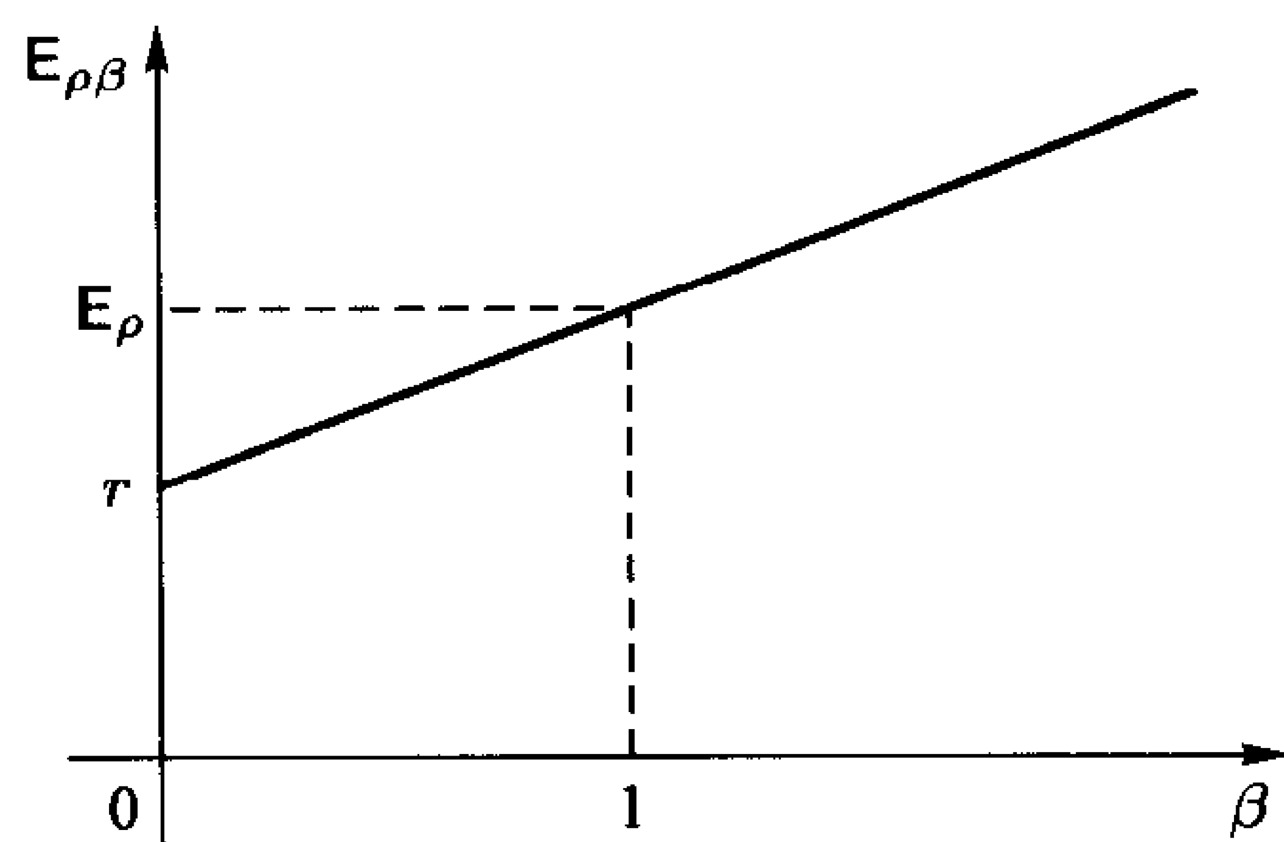


图 9 *CAPM* 直线

量 $\beta = \beta(A)$ 在构成证券组合时起着重要作用, 它是资产对市场变化的 "敏感度"、"反应度". 为了确定起见, 我们将认为, 市场指标像指数 S&P500 那样变化, 我们现在所考察的股票所属公司 A 是该指数的 500 个公司之一. 于是, 如果指数改变 1%, 而资产 A 的倍塔等于 1.5, 那么资产 A 的价格改变 (平均) 为 1.5%.

在实务中确定资产的倍塔是对统计数据运用通常的线性回归方法来实现的, 这样做来自关系式 (3) 的线性性.

3. 我们对于资产 A 形成下列量:

$$\eta(A) = (\rho(A) - \mathsf{E}\rho(A)) - \frac{\mathsf{Cov}(\rho(A), \rho)}{\mathsf{D}\rho}(\rho - \mathsf{E}\rho).$$

显然, $\mathsf{E}\eta(A) = 0$, 且

$$\mathsf{E}(\eta(A)(\rho - \mathsf{E}\rho)) = 0,$$

即, 有零均值的量 $\eta(A)$ 和 $\rho - \mathsf{E}\rho$ 是不相关的. 因此,

$$\rho(A) - \mathsf{E}\rho(A) = \beta(A)(\rho - \mathsf{E}\rho) + \eta(A), \tag{5}$$

它与 (3) 一起导出溢价 $\rho(A) - r$ 和 $\rho - r$ 之间的下列关系式:

$$\rho(A) - r = \beta(A)(\rho - r) + \eta(A), \tag{6}$$

它表明, 资产 A 的溢价 $(\rho(A) - r)$ 是由市场溢价 $(\rho - r)$ 乘上倍塔 $\beta(A)$, 再加上与 $\rho - \mathsf{E}\rho$ 不相关的量 $\eta(A)$.

由 (5) 我们得到公式

$$\mathsf{D}\rho(A) = \beta^2(A)\mathsf{D}\rho + \mathsf{D}\eta(A), \tag{7}$$

它是说, 在资产 A 上投资的风险 $(\mathsf{D}\rho(A))$ 是由两部分风险所组成: 市场固有的

$$\text{系统风险} \quad (\beta^2(A)\mathsf{D}\rho),$$

以及资产 A 直接固有的

$$\text{非系统风险}\quad (\mathsf{D}\eta(A)).$$

正如在上节中那样, 可以指出, 这里在 $CAPM$ 的框架中, 非系统风险也可通过分散化来降低.

针对这一目标, 我们假定, 在 "大" 市场中有 N 种资产 $A_1, \cdots, A_N$, 它们对应的量 $\eta(A_1), \cdots, \eta(A_N)$ 不相关: $\mathsf{Cov}(\eta(A_i), \eta(A_j)) = 0$, $i \neq j$.

设 $d = (d_1, \cdots, d_N)$ 是证券组合, $d_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{N} d_i = 1$, 且

$$\rho(d) = d_1 \cdot \rho(A_1) + \cdots + d_N \cdot \rho(A_N).$$

由于

$$\rho(A_i) - r = \beta(A_i)[\rho - r] + \eta(A_i),$$

我们有

$$\rho(d) - r = \sum_{i=1}^{N} d_i \beta(A_i)[\rho - r] + \sum_{i=1}^{N} d_i \eta(A_i).$$

因此, 令

$$\beta(d) = \sum_{i=1}^{N} d_i \beta(A_i) \quad \text{以及} \quad \eta(d) = \sum_{i=1}^{N} d_i \eta(A_i),$$

我们求得 (比较 (6)),

$$\rho(d) - r = \beta(d)(\rho - r) + \eta(d).$$

如同上节中那样, 这就是

$$\mathsf{D}\rho(d) = \beta^2(d)\mathsf{D}\rho + \mathsf{D}\eta(d),$$

其中 $\mathsf{D}\eta(d) = \sum_{i=1}^{N} d_i^2 \mathsf{D}\eta(A_i) \leqslant \frac{C}{N} \to 0$, $N \to \infty$, 只要 $\mathsf{D}\eta(A_i) \leqslant C$ 以及 $d_i = \frac{1}{N}$.

§2d. 套利定价理论 (APT — Arbitrage Pricing Theory)

1. 在 $CAPM$ 理论中, 所强调的是在处于确定的均衡的市场上, 个别的资产盈利怎样依赖于运作该资产的 "大" 市场盈利 (参见 §2c 中的 (1)), 以及它承担怎样的风险. 这时 (参见在上节中的公式 (6)) 资产 A 的盈利 (收益率, 回报) $\rho(A)$ 由下列公式确定:

$$\rho(A) = r + \beta(A)(\rho - r) + \eta(A). \tag{1}$$

更现代的 "风险和收益" 的理论是 APT 理论 (Arbitrage Pricing Theory); S. A. Ross [412], R. Roll and S. A. Ross [410] 从多因子模型出发, 认为资产 A 的量 $\rho(A)$

依赖于若干个随机因子 $f_1, \cdots, f_q$ (它们的值可以非常不同: 石油价格、收益率等等) 以及 "噪声" 项 $\zeta(A)$:

$$\rho(A) = a_0(A) + a_1(A)f_1 + \cdots + a_q(A)f_q + \zeta(A). \tag{2}$$

这里 $\mathsf{E}f_i = 0$, $\mathsf{D}f_i = 1$, $\mathsf{Cov}(f_i, f_j) = 0$, $i \neq j$; "噪声" 项 $\zeta(A)$ 有 $\mathsf{E}\zeta(A) = 0$, 且与因子 $f_1, \cdots, f_q$ 不相关, 也与其他资产的 "噪声" 项不相关.

比较 (1) 和 (2) 可见, (1) 是因子为 $f_1 = \rho$ 单因子模型的特殊情形. 在这个含义下, APT 是$CAPM$ 的推广; 尽管从实际定价的方法论视角来看, $CAPM$ 继续保持为证券定价的最受欢迎的方法之一; 这点可由它的简单明了以及对倍塔 (资产对市场变化的敏感度) 的运算传统来解释.

建立在均衡市场概念上的$CAPM$ 理论的中心结果之一是公式 (1), 由上节可知, 它是把 "溢价" 平均值 $\mathsf{E}(\rho(A) - r)$ 用溢价平均值 $\mathsf{E}(\rho - r)$ 来表达.

与此相类似的是, 建立在市场上没有渐近套利概念上的中心结果为: 它在资产 A 的 $\rho(A)$ 的性态是用多因子模型 (2) 来描述的假定下, 对于均值 $\mathsf{E}\rho(A)$ 导出进一步的 (渐近) 公式.

我们记得 $\rho(A)$ 是 A 在 (前面考察的) 一步模型 $S_1(A) = S_0(A)(1 + \rho(A))$ 中的 (随机) 收益率.

2. 我们假定现在有由 N 种资产 $A_1, \cdots, A_N$ 构成的 "N-市场" 和 q 个因子, 并且

$$\rho(A_i) = a_0(A_i) + a_1(A_i)f_1 + \cdots + a_q(A_i)f_q + \zeta(A_i),$$

其中 $\mathsf{E}f_k = 0$, $\mathsf{E}\zeta(A_i) = 0$, 当 $k \neq l$ 时协方差 $\mathsf{Cov}(f_k, f_l) = 0$, $\mathsf{D}f_k = 1$, $\mathsf{Cov}(f_k, \zeta(A_i)) = 0$, $\mathsf{Cov}(\zeta(A_i), \zeta(A_j)) = \sigma_{ij}$, $k, l = 1, \cdots, q$, 以及 $i, j = 1, \cdots, N$.

我们考察某个资产组合 $d = (d_1, \cdots, d_N)$. 于是它的相应 "盈利"

$$\begin{aligned} \rho(d) &= d_1\rho(A_i) + \cdots + d_N\rho(A_N) \\ &= \sum_{i=1}^{N} d_i a_{i0} + \left(\sum_{i=1}^{N} d_i a_{i1}\right) f_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{N} d_i a_{iq}\right) f_q + \sum_{i=1}^{N} d_i \zeta(A_i), \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $a_{ik} = a_k(A_i)$.

下面将指出, 在对多因子模型 (2) 的系数作某个假定下, 可求得这样的非平凡组合 $d = (d_1, \cdots, d_N)$, 使得

$$d_1 + \cdots + d_N = 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i a_{ik} = 0, \qquad k = 1, \cdots, q, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i a_{i0} = \sum_{i=1}^{N} d_i^2. \tag{6}$$

这样对于组合 $\theta d = (\theta d_1, \cdots, \theta d_N)$, 其中 θ 是常数,

$$\rho(\theta d) = \theta \rho(d),$$

并且由于 (2)-(6),

$$\rho(\theta d) = \theta \sum_{i=1}^{N} d_i^2 + \theta \sum_{i=1}^{N} d_i \zeta(A_i). \tag{7}$$

因此,

$$\mu(\theta d) = \mathsf{E}\rho(\theta d) = \theta \sum_{i=1}^{N} d_i^2,$$

$$\sigma^2(\theta d) = \mathsf{D}\rho(\theta d) = \theta^2 \sum_{i,j=1}^{N} d_i d_j \sigma_{ij}.$$

令

$$\theta = \left(\sum_{i=1}^{N} d_i^2\right)^{-2/3} \quad \left(= \|d\|^{-4/3}, \text{ 这里 } \|d\| = \left(\sum_{i=1}^{N} d_i^2\right)^{1/2}\right). \tag{8}$$

于是

$$\mu(\theta d) = \left(\sum_{i=1}^{N} d_i^2\right)^{1/3}, \tag{9}$$

$$\sigma^2(\theta d) = \frac{\sum_{i,j=1}^{N} d_i d_j \sigma_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{N} d_i^2\right)^{4/3}}. \tag{10}$$

如果假定 (这是为了简化分析; 关于一般情形参见例如 [240], [268]), $\sigma_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\sigma_{ii} = 1$, 那么我们求得

$$\sigma^2(\theta d) = \left(\sum_{i=1}^{N} d_i^2\right)^{-1/3}. \tag{11}$$

公式 (9) 和 (11) 对于下列渐近分析是关键的. 由此可见, 如果当 $N \to \infty$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{N} d_i^2 \to \infty$, 如果再设 $S_0(A_1) = \cdots = S_0(A_N) = 1$, 那么由条件 $d_1 + \cdots + d_N = 0$ 求得, 组合 θd 的初始资本

$$X_0(\theta d) = \theta(d_1 + \cdots + d_N) = 0,$$

而在时刻 $n = 1$ 的资本

$$X_1(\theta d) = d_1 S_1(A_1) + \cdots + d_N S_1(A_N) = \theta \rho(d) = \rho(\theta d).$$

同时, 如果 $\mathsf{E}X_1(\theta d) = \mu(\theta d) \to \infty$, 而当 $N \to 0$ 时, $\mathsf{D}X_1(\theta d) \to 0$, 那么对于充分大的 N, 以大概率有 $X_1(\theta d) \geqslant 0$, 并且以正概率满足 $X_1(\theta d) > 0$. 换句话说, 以零初始

资本在有资产 $A_1, \cdots, A_N$ $(N \geqslant 1)$ 的市场运作, 通过对应的组合可 ("渐近") 引出正利润, 它在APT 理论 [412] 中, 被解释为具有渐近套利 (也可比较在第六章 §3a, b, c 中的相应的、较晚提出的定义).

这样一来, 如果认为 "N-市场" (当 $N \to \infty$ 时) 是渐近无套利的, 那么必须排除引起套利的可能有 $\sum_{i=1}^{N} d_i^2 \to \infty$ 这一结论. 这就很自然, 要对多因子模型 (2) 中的系数加上一定的限制, 因为以后可描述的有性质 (4)–(6) 的组合 $d = (d_1, \cdots, d_N)$ 的构建是根据该模型的系数来产生的.

我们作矩阵

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ 1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Nq} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

并对它构成矩阵

$$\mathscr{B} = \mathscr{A}(\mathscr{A}^*\mathscr{A})^{-1}\mathscr{A}^*, \tag{13}$$

假定它是确定的 ("$*$" 表示转置).

设

$$\begin{aligned} d &= (I - \mathscr{B})a_0, \\ e &= \mathscr{B}a_0, \end{aligned} \tag{14}$$

其中 I 是单位矩阵, a_0 是由 $a_{10}, \cdots, a_{N0}$ 所组成的列向量. 于是对于 a_0 有正交分解

$$a_0 = d + e \tag{15}$$

以及

$$d^*\mathbf{1} = 0, \qquad d^*a_k = 0, \tag{16}$$

其中 a_k 是由 $a_{1k}, \cdots, a_{Nk}$ 所组成的列向量, 而 $\mathbf{1}$ 是由 1 所组成的列向量.

公式 (16) 恰好就是上面提到的 (4) 和 (5).

由 (14) 和 (15) 也有

$$d^*a_0 = d^*d + d^*e = d^*d,$$

它正是所要求的公式 (6).

现在我们察觉, 根据 (14), 列向量 e 可表示为下列形式:

$$e = \lambda_0\mathbf{1} + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_q a_q,$$

其中数 $\lambda_0, \cdots, \lambda_q$ 满足

$$(\lambda_0, \cdots, \lambda_q)^* = (\mathscr{A}^*\mathscr{A})^{-1}\mathscr{A}^*a_0.$$

因此, 列向量

$$d = a_0 - \lambda_0 \mathbf{1} - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k a_k,$$

并且

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(a_{i0} - \lambda_0 - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k a_{ik} \right)^2. \tag{17}$$

对于 "N-市场" 来说, 所有出现在这一公式的右端的系数 $a_{i0}, \cdots, a_{ik}, \lambda_0 \cdots, \lambda_k$, 自然都依赖于 N.

无渐近套利的假定排除了下列可能性 $(d_i = d_i(N))$

$$\lim_{N} \sum_{i=1}^{N} d_i^2(N) = \infty,$$

而这就是说, 由于 (17), "N-市场" 的系数必须满足

$$\lim_{N} \sum_{i=1}^{N} \left[a_{i0}(N) - \lambda_0(N) - \sum_{k=1}^{q} \lambda_k(N) a_{ik}(N) \right]^2 < \infty. \tag{18}$$

这个关系式 (作为无渐近套利假定的推论) 被如下解释: 当资产的个数 N 足够大时, 由这些资产所构建的组合的 "大多数" 必须有这样的性质: 在其系数 $a_0(A_i)$, $a_1(A_i), \cdots, a_q(A_i)$ 之间要满足 "几乎线性" 的关系式

$$a_0(A_i) \approx \lambda_0 + \sum_{k=1}^{q} \lambda_k a_k(A_i), \tag{19}$$

其中所有考察的量依赖于 N, 并且

$$a_0(A_i) = \mathsf{E}\rho(A_i).$$

这时存在组合 $d = (d_1, \cdots, d_N)$, 其盈利 $\rho(d)$ 的方差 (由于 (11)) 足够小, 它意味着, 在所考察的多因子模型中, "噪声" 项 $\zeta(A_i)$ 和个别因子的影响(在无渐近套利的假定下) 可降低风险. 但是还需要记得的是, 所有这些都只对大 N 成立, 即只对 "大" 市场成立, 而对小市场来说, 借助于公式 (19) 右端的表达式来计算盈利的数学期望 (定价, pricing), 可能导致非常大的误差 (关于对应的断言参见 [231], [240], [412]; 基于构造性概念 ([250]) 的渐近套利的严格数学理论参见 [260], [261], [273], 以及后面的第六章的第 3 节.)

§2e. 经典的有效金融市场概念的分析、解释和修正. I

1. 处于有效市场理念底层的基本概念是假定价格瞬时吸收新的信息, 并且这样一来就不再有 "某时某地低买、另一时另一地高卖" 的机会, 即如同通常所说, 没有套利机会.

正如我们在上面所看到的, 这个合理架构、公平运营的市场概念体现在该市场上的 (规范化) 价格用 (相对于某个等价于原来的概率测度的测度而言的) 鞅来描述.

我们记得, 如果 $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ 相对于某个 σ-代数流 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅, 那么

$$\mathsf{E}(X_{n+m} \mid \mathscr{F}_n) = X_n.$$

因此, 量 X_{n+m} 基于 "信息" $\mathscr{F}_n$ 的均方意义下的最优估计 $\widehat{X}_{n+m;n}$ 就是值 X_n, 因为 $\widehat{X}_{n+m:n}$ 重合于 $\mathsf{E}(X_{n+m} \mid \mathscr{F}_n)$.

这样尤其是可以说, 价格 (X_n) 的鞅假定对应这样的经济学上一目了然的假设: 在 "组织良好" 的市场上, 根据 "今天" 的数据对 "明天"、"后天" 等等的价格值的最优 (至少在均方意义下) 预测就是 "今天" 的价格值.

换句话说, 预测带有平凡特征, 似乎是排除了对 "未来的可观察的价格运动" 进行某种预言的可能性. (L. Bachelier 在实质上是把布朗运动构建为价格演变的模型, 其出发点就是这个对 "明天" 的价格不可能有比 "今天" 的价格值更好的预测的想法.)

同时, 众所周知, 市场的参与者 (也包括诸如 "基本面分析家" (fundamentalists)、"技术分析家" (technicians)、"定量分析家" (quants) 那样的专家) 不再尝试预测 "未来的价格运动", 不再尝试 "推测" 未来价格的运动方向和量值, 并由此来决定何时买卖哪个公司的股票等等.

注. "基本面分析家" 从经济整体的 "全局" 状况和它的某个部门的状况出发来提出自己的决策; 对于他们来说, 特别重要的是关于发展前景的信息; 他们也从市场参与者运作的理性出发. "技术分析" 的代表们则是根据市场的 "局部" 性态来引导自己的决策; 对于他们来说, 特别重要的是把 "大众行为" 作为本质影响他们决策的因素.

正如在 [385; 15–16 页] 中所注意到, 1920–1940 年代, "基本面分析家" 和 "技术分析家" 形成金融市场 "分析师" 的两个基本群体. 到了 1950 年代, 这些人中又增加了第三个群体 "定量分析师", 他们是 L. Bachelier 的后继者. 这个群体与 "技术分析" 方法的代表相比更接近于 "基本面分析师", 对于后者来说, 正如前面所说, 更重要的是市场的心态状况, 而不是决定市场上的投资者行为的理性原因.

2. 我们回到这样的问题来: 怎样来阐明这一切? 特别是要说, 有什么可能成为预言 "未来价格运动" 的期待和尝试的基础? 当然, 开始需要分析经验数据, 揭示一系列关于价格运动特征的不平凡的现象 (例如聚集的类型), 把价格的概率统计结构清理为随机过程.

设 $H_n = \ln \dfrac{S_n}{S_0}$ 是 (规范) 价格的对数. 我们把 H_n 表示为下列形式: $H_n = h_1 + \cdots + h_n$.

如果序列 (H_n) 关于 σ-代数流 $(\mathscr{F}_n)$ 是鞅, 那么量 (h_n) 形成鞅差 $(\mathsf{E}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) =$

0), 并且随之而来的是量 (h_n) (在假定它们平方可积的条件下) 是不相关的:

$$\mathsf{E}h_{n+m}h_n = 0,\ m \geqslant 1,\ n \geqslant 1.$$

然而, 如所周知, 不相关并不意味着独立, 它并不能完全排除例如 h_{n+m}^2 与 h_n^2 或者 $|h_{n+m}|$ 与 $|h_n|$ 正相关. 许多金融数据的实证分析表明 (并不与有效市场中的鞅性假设矛盾!), 它们还真是那样. 尤其还要注意的是, 这种正相关现象会导致量 $(h_n)_{n\geqslant 1}$ 按它们的值的大小成群结队的聚集效应, 而它们可用一系列相当简单的模型 (诸如*ARCH, GARCH,* 随机波动率模型等等) 来 "把握" 和解释; 对此, 我们将在下面的第二章中涉足. 这就出现某种可能 (或者至少是期待) 来获得较不平凡的 (一般是非线性的) 预测, 比如对绝对值 $|h_{n+m}|$ 的预测. 这样也有可能得到关于序列 $(h_n)_{n\geqslant 1}$ 的联合分布的更为精细的信息.

关于量 (h_n) 的概率特征的较简单的假定是

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n,$$

其中 (ε_n) 是独立标准正态分布随机变量 $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0,1)$, 而 σ_n 是某些常数, 它们是量 h_n 的标准差, 即 $\sigma_n = +\sqrt{\mathsf{D}h_n}$.

然而, 这个经典的高斯随机游走模型被公认为实际数据的不合适的反映; 对实际数据的 "正态性" 的统计分析表明, 首先, 量 h_n 的经验分布密度与正态情形相比, 更为平直, 而在均值的邻域中, 更显尖峰. 这一分析也表明, 量 h_n 的分布的尾部比正态分布更为厚重. (详情参见第四章.)

在金融文献中, 表示式 $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ 中的量 σ_n 通常称为波动率 (变化率), 而头等重要的是下列事实: 波动率本身也是波动的. 换句话说, $\sigma = (\sigma_n)$ 不仅是时间的函数 (在最简单的情形下是常数), 并且也是随机变量. (关于波动率的详情参见以后的第四章中的 §3a.)

从数学的视角来看, 类似的假定是非常诱人的, 因为它本质上扩充了传统的 (线性) 高斯模型类, 使它包括在所考察的 (非线性) 条件高斯模型

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n$$

中, 其中, 首先, (ε_n) 是独立标准正态分布随机变量, $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0,1)$, 然后, $\sigma_n = \sigma_n(\omega)$ 是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的非负随机变量. 换句话说, 这可以表达为: h_n 关于 $\mathscr{F}_{n-1}$ 的条件分布是

$$\mathrm{Law}(h_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = \mathscr{N}(0, \sigma_n^2),$$

由此得到, h_n 的分布 $\mathrm{Law}(h_n)$ 是按波动率 ("随机方差") 的分布进行平均的悬浮 (混合) 正态分布.

有益的是要注意到, 在数理统计中众所周知, 有急速下降的尾部的混合分布可能导致有厚重尾部的分布. 这样, 如果经验上观察到这一点 (而这对于许多金融指标实际上也正是这样), 那么条件高斯模式可看作适当的概率模型.

很自然, 在转向带随机波动率的模型时, 即转向类型为 "$h_n = \sigma_n \varepsilon_n$" 的模型时, 成功应用它的决定性的因素是波动率 (σ_n) 演变的 "正确" 描述.

第一个这样的模型$ARCH$ (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, 自回归条件异方差) 已经在 1980 年代由 R. F. Engel 引入, 其中假定

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \cdots + \alpha_q h_{n-q}^2,$$

它有可能在对金融时间序列进行统计分析时 "把握" 上面提到的实际观察数据的聚集效应.

这种经验现象的实质在于 h_n 的大 (小) 值会引来随后的大 (小) 值, 但一般来说, 符号是不能预定的.

这当然是由于在$ARCH$模型的结构中明确假定 σ_n^2 作为以前的值 $h_{n-1}^2, \cdots, h_{n-q}^2$ 的函数所引起的. 这样一来, 根据这一模型以及与实际观察相对应, 跟随大的 $|h_n|$ 的值的应该期待大的 $|h_{n+1}|$ 的值. 然而, 我们强调, 这个模型并不给出 "价格向哪一方向运动" 的说明, 即没有关于 h_{n+1} 的符号的信息. (与此同时, 由此导出对在随机市场上进行实际买卖活动的下列推荐意见: 如果涉及的例如是期权的购买, 那么应该同时购买买入期权和卖出期权; 参见第四章, §4e.)

不使人意外的是, $ARCH$ 模型促使大量类似模型的建立, 以 "把握" ("聚集性" 以外的) 许多其他可能显示的效应. 其中最著名的是 T. Bollerslev [48] (1987) 引入的$GARCH$ 模型 (Generalized $ARCH$), 其中

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \cdots + \alpha_q h_{n-q}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{n-p}^2.$$

(关于$ARCH$ 的推广的多种多样只需从一张其名称的清单就可看出: *HARCH, EGARCH, AGARCH, NARCH, MARCH* 等等.)

与$ARCH$ 相比, $GARCH$ 模型的 "技术" 优势之一在于: 为使$ARCH$ 模型拟合实际数据要取很大的值 q, 而$GARCH$ 模型允许限制在不大的 q 和 p 的值上.

注意到$ARCH$ 和$GARCH$ 模型解释了聚集性, 不能不重提, 事实上还有其他的表明价格与波动率有更精细的现实关系的经验现象. 正如实务工作者都熟知, 当波动率 "很小" 时, 价格就趋向于长期上升或下降. 类似的还有, 如果波动率 "很大", 那么价格就会这样变化: 它们改变自己的上升或下降, 而趋向于向相反方向运动.

所有这些都说明, 金融市场内部 (足够复杂) 的结构, 看来对可能预测能有某种指望; 即使不是直接针对价格本身, 至少也有可能来构造其足够可靠的未来运动的界限. (这种 "乐观主义" 的思想经常被 "市场价格记得过去" 的说法所暗示, 尽管这种主观论题远不是无可争辩的.)

以后 (参见第二、三章) 将对描述金融时间序列演变的一系列概率统计模型进行足够详尽的考察. 现在我们将停留在对 "有效" 组织的市场上的交易者的运作的假定作出某些批评和重新审视.

3. 在 §2a 中说到, 处于*有效市场*概念中的是, 其所有的参与者都以一致的视角来看待他们的目标设定、对新信息的理解以及他们的带有*理性*特征的决策. 然而, 这样的状况带来一种这样的批评: 对于市场参与者来说, 即使他们都接受了所有可接受的信息, 他们对信息的反应以及对信息的解释, 都*远不是一致的, 远不是一样的*; 市场参与者的目标设立可能是极为不同的; 交易者的金融活动时间区间也是不同的: 从对于 "投机者 (speculators)" 和 "技术分析专家 (technicians)" 的短时期一直到中央银行的长时期都有; 市场参与者对风险程度的关系也可能是非常主观的.

广为人知的是人们在自己的决策中是 "*非线性的*": 当他们期待利润时, 他们不太在乎风险, 而当他们面临损失可能时, 他们就较重视风险. 下列由 A. Tversky ([465]) 所陈述的两难推理是这一断言的直观说明:

a) "你宁愿要 \$85 000, 还是要在一场赌博中以概率 0.85 要 \$100 000?"
b) "你宁愿要损失 \$85 000, 还是要以概率 0.85 损失 \$100 000, 但以概率 0.15 使损失归零?"

大多数人在情形 a) 宁愿要 \$85 000, 而不去力求得到 \$100 000. 但在情形 b), 大多数人宁愿赌一下, 以求有机会 (15%) 使损失归零.

在投资者作出决策时, 极为重要的因素是*时间*. 如果你有可能今天获得 \$5000, 或者一个月后获得 \$5150, 那么你多半是宁愿 "今天" 获得. 然而, 如果第一种可能是过一年, 而第二种可能是 13 个月, 那么大多数人都宁愿 "13 个月". 换句话说, 投资者在市场上的 "时间" 视野可能取决于个体设置的不同而不同, 并且一般来说, 与 (明确或隐性) 假定大家的 "时间视野" 都一样的 "理性投资者" 模型不相符合.

在 §2a (第 3 点) 中已经注意到, 在有效市场的概念中, 市场的参与者根据所接受的信息*随时校正*自己的决策. 然而, 人们都清楚地知道, 其实并非如此; 人们需要一定的时间 (对于不同的人时间间隔也不同) 来了解所接受的信息, 然后才采取这样那样的决策.

4. 在 G. 索罗斯的书 [451] 中有许多论证是针对理解以下状况的必要性: 除了可能找到市场的 "均衡" 或者 "几乎均衡" 的状态以外, 还有 "远非均衡" 的状态; 这时市场的参与者们不适当地理解和解释信息, 以至他们的看法都 "随心所欲, 各执一词" [451; 14 页]. 在接近于均衡的状态下, 有一定的校正机理在起作用, 以防止 "认知与现实的过分显著的差距", 而在远离均衡的状态下, 自反的双重反馈机制起作用, 并只要本质条件不产生可观的变化, 倾向于不发生认知与现实的迫近 ······" [451, 13 页].

应用经济学研究所 (Research Institute for Applied Economics, "Olsen & Associates", Zürich) 的奠基人 R. B. Olsen 的见解 ([2]) 赞同这样的说法: "在市场上有带各种时间视野的形形色色的经济活动者. 这种视野从对于 '短线' 交易者的几分钟一直可变化到中央银行和公司的几年. 经济活动者对外部事件的反应依赖于他们的时

间视野. 既然这种视野如此千差万别, 经济活动者们可能采取截然不同的决策. 所有这一切导致 '波纹效应 (ripple effect)', 其中不一致的反应产生新的事件, 转而引起市场参与者的第二层反应."

目前看来, 要把金融市场的经济数学的严格理论的某些方面, 说成不在 "经典的" 均衡条件下、而在市场上实际可观察的条件下运行的 "大型复杂系统", 为时尚早. 当前的状况可定义为 "积累事实"、"细化模型" 时期. 也正是在这一含义下, 选取新方法和搜集统计数据, 并当然运用当代计算技术来对它们进行处理和分析 (对此将在下面的第四章中讨论), 将起着第一位的作用; 这一切将为如下的一些研究提供了经验资料: 关于证券市场运行的各种概念分析, 处于比如有效市场概念中的各种局面的修正, 关于价格的分布特征、动态变化及其性态的假设等等.

§2f. 经典的有效金融市场概念的分析、解释和修正. II

1. 在这一节中, 我们继续 (在描述水平上) 考察有关处在*有效*运行市场和投资者*理性*行为中的假定的问题, 并把注意力集中在一系列新的、前面没有讨论过的方面.

*有效市场的概念*曾经是最为引人注目的成就之一, 它曾经并且继续在金融理论和金融业务中起着支配性的作用. 在这一联系中变得很明显的是, 这一概念的一清二楚的表达及其*优点*和*弱点*, 都有助于理解那些新古典主义的 (市场结构的 "分形性" 类型的) 概念; 这类概念我们可在有关金融市场的结构性质和运行功能的数理经济学的文献中找到.

2. 正如我们已经看到, 有效市场的概念产生于假定 "今天" 的价格值建立在它完全 "考虑" 所有可接受的信息的基础上, 并且价格的改变仅仅由于这种信息的 "更新", 也就是说, 由于出现 "新的"、"意外的"、"没有料到" 的信息. 这时, 在这样的市场上的投资者懂得, 价格的确立是 "公正的", 因为市场的所有参与者都在 "一致而又正确理性地" 起作用.

这些假定就造就了完全自然的*随机游走假设* (假定价格是独立成分之和) 及其发展: *鞅假设* (并且, 作为推论, "明天" 价格的预测就是 "今天" 价格的值).

形象地说, 所有上述意味着, "市场就是鞅" 是在下列含义下: 在这样的市场中, 进行着 "公平"、"诚实" 的游戏 (与 "鞅" 概念的通常解释相对应; 也参见第二章中的 §§1b, c 以及更详尽的例如, [439; 第七章, §1]).

读者大概已经注意到, 上面 (§2a) 陈述的有效市场的概念本质上干脆就*假设*: "有效市场就是鞅" (相对于某个信息流和某个概率测度). 由此带来的对应的论述并非是形式数学的特征, 而是直观描述的特征.

如果从假设 (按定义) "诚实"、"理性" 地建立市场出发, 那么断定 "市场是鞅" 其实就允许有一个完美无缺的数学解释, 它就是*无套利市场*. 换句话说, 这是一个其中不可能有*无风险盈利*的市场. (形式定义在第五章 §2a 中给出.)

以后我们将看到, 无套利假定导致一般来说存在 (“鞅”) 测度的整个谱族, 关于这些测度, (规范) 价格是鞅; 这是以独特的形式说明, 市场可能不是只有唯一的稳定状态, 而是有整个稳定状态的谱族; 它无疑联系着市场的参与者有不同的目标设置, 在处理和吸收所接受的信息上有不同的时期.

在市场上有着带不同利益和机会的投资者这一状况多半是一个正面因素, 而不是如同初看起来那样的不足.

这里所涉及的实质在于, 正是市场的分散化性质保证了它的流动性 (liquidity): 把资产快速转换为支付手段 (例如, 钱), 而这对于市场的稳定是必要的. 我们列举下列著名事实来作为证据 (参见例如, [386; 46–47]).

在 J. F. 肯尼迪总统被暗杀的那天 (1963 年 11 月 22 日), 市场立即对所引起的 “未来远景” 的不确定性作出反应. 其现象是, 在这一天, “长线 (long-term)” 投资者或者简单地挂起他们的运作, 或者转变为 “短线 (short-term)” 投资者. 随后几天交易所关闭, 等到它再开市时, 主导 “基本面” 信息的 “长线” 投资者才重新回到市场.

尽管 1987 年 10 月 19 日在美国的金融崩盘的全景看来还没有充分澄清, 但是已经知道, 这一天以前 “长线” 投资者都直接试图抛出他们的资产, 而变为 “短线” 投资者. 其原因在于联邦储备系统 (Federal Reserve System) 收紧了货币政策, 并预期不动产价格提高. 尤其是, 市场被短线运作所支配, 而在这一含义下, “技术分析的” 信息变为基本的 “有用的” 信息; 然而, 这种 “技术信息” 在类似的动荡时期多半是基于流言和臆测.

在这两个例子中, 当 “长线” 投资者在市场上 “撤出” 时, 随之出现的就是市场变得不流动以至不稳定. 所有这些都说明, 为了稳定, 市场上应该有各种 “投资视野” 的投资者, 应该有市场参与者的投资兴趣的 “不均匀性”、“自相似性”, 或者如通常所说的 “分形性”.

金融市场具有 “统计分形性” (参见第三章 §2c 中的定义) 这一点早在 1960 年代就已被 B. Mandelbrot 完全清晰地注意到; 在随后的几年中, 由于例如外汇汇率具有统计分形结构、股票和债券中具有 (短期) 统计分形结构等等被作为显露的因素, 这一问题引起广泛的重视.

从理解怎样的金融指数演变模型是 “正确的”、为什么 “稳定” 系统必须有 “分形” 结构的视角来看, 有益的是要比较*决定性*分形结构和*统计性*分形结构. 与此相联系, 在第二章第 4 节中, 我们给出有关*非线性动力学*、*混沌*等等的问题之间的一系列相互关系的某些表示.

正如我们已经在上面说起, 我们在本书中所遵循的在数学上无可辩驳的理论是 “*无套利理论*”. 与此相联系的是, 应该强调, *有效性*、*无套利性*、*分形性*等概念的每一个都不能在某种程度上互相替代. 它们是互相补充的, 例如, 许多无套利模型具有分形结构, 而分形过程可能 (关于鞅测度) 是鞅 (于是对应的市场是无套利的), 但也可能不是鞅, 例如是分形布朗运动 (参见第三章 §2c).

3. 与 §2a 中在描述水平上给出有效市场概念相类似的是, 我们现在要在结尾, 适当综述有分形结构的市场 (按照 [386] 的术语是分形市场) 的显著特点:

1) 在这样的市场上, 价格每一时刻都被投资者所修正; 这种修正取决于那种对于他们的投资视野来说是本质的信息; 投资者对于所得到的信息的反应可能不是瞬时的, 而只是在信息得到再次肯定以后才会实现;
2) 在短期时间视野的情形下, 技术信息和技术分析起着决定性的作用, 而随着时间视野的间隔长度的延长, 基本面信息开始起着支配作用;
3) 价格是由于 "短期" 投资者与 "长期" 投资者的相互作用 "叠加" 而成;
4) 价格中的高速成分由 "短期" 投资者的作用所决定; 低频、光滑成分反映 "长期" 投资者的活动;
5) 当市场上不再有带各种投资视野的投资者, 即损失了它的分形性时, 市场也就开始丧失流动性和稳定性.

4. 如上所述, 本书中基本上只考察无套利机会的 ("有效") 市场模型.

在今后要详细研究的这种模型的例子有 "Bachelier 模型" (第三章 §4b 以及第八章 §1a), "Black-Merton-Scholes 模型" (第三章 §4b 以及第七章 §4c), "Cox-Ross-Rubinstein 模型" (第二章 §1e 以及第五章 §1d), 其中的基础分别是线性布朗运动、几何布朗运动和几何随机游走.

由第 3 节中引入的 "分形" 市场的定性描述来看, 可能有套利机会的市场是非常合乎情理的.

有这种性质的模型的最简单的例子是不久前由 Rogers 所建立的 (L. R. C. Rogers, Arbitrage with fractional Brownian motion. Mathematical Finance, **7** (1997), 95–105), 它是 Bachelier 和 Black-Merton-Scholes 模型的修正, 其中布朗运动被 $\mathbb{H} \neq \frac{1}{2}$ 的分形布朗运动所取代.

注. 有 $\mathbb{H} \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ 的分形布朗运动不是半鞅, [304], 因而, 对于它没有鞅测度; 详见第三章 §2c. 这一状况是在这种模型以及类似的模型中有套利机会 (但不一定 (!)) 的一个间接提示 (比较第五章 §2d 中的 "第一基本定理" 的断言).

3. 金融理论、金融工程和精算的目标和任务

§3a. 金融理论和金融工程的作用. 金融风险

1. 在前面各节中所引入的有关在不确定条件下运作的金融结构和金融市场的描述性叙述, 足够清楚地体现了**风险**是金融理论中的中心概念之一, 它也是保险理论中的中心概念之一.

这个概念的含义相当丰富, 其内容包括人人都相当熟悉的方方面面.

例如, 信用风险联系着贷款获得者不能履行其义务时对贷款者可能造成的损失.

运营风险可能由于支付运作时的错误所造成.

投资风险联系着对投资项目的细节没有充分推敲, 不妥当的决策, 经济、政治形势的可能变化等等.

金融数学和金融工程 (特别是有关证券运作的部分) 主要涉及市场风险, 它是由市场价格、利率变化中的不确定性, 市场参与者的运作和决策中的不确定性等等所引起的.

金融理论对金融数学和金融工程的兴趣的急剧增加 (特别是在近 20–30 年间) 必定有其理由. 这里的回答或许非常简单, 即这是因为金融市场发生根本性的变化: 其结构的变化, 价格上的大变化 (波动率), 出现了高度敏锐的金融工具, 出现了价格分析中的新的技术可能等等.

所有这一切都对金融理论摆出新要求, 提出新问题, 而要解决它们要用到非常"高深"的数学.

2. 对金融数学和金融工程初看起来, 会强调其涉及的"博弈"方面 ("投资者"对"市场"); 这就可能造成这样的印象: 金融数学的基本目标在于推荐和创建金融工具, 使得投资者有可能"*战胜市场*"或者至少是"*不惨败*".

然而, 金融理论 (也包括金融数学) 和金融工程的作用要广得多; 它们被用来帮助投资者解决考虑风险的有关金融资金合理配置的问题; 这样的问题范围广阔, 其中的风险联系着"周围经济环境"的随机特征, 并且既在价格和合约的交易量上、又在市场参与者的运作上招来不确定性.

金融数学与金融工程方法的重要性和效用性在于, 它们的建议和各种金融创新在资金配置中起着"调节器"的作用; 而无论是经济的个别部门, 还是经济的整体, 为改善它们的功能, 资金配置都是必须做的事.

证券市场作为"大型"、"复杂"系统, 其分析也要求足够复杂、相当高深的数学方法, 数据的统计处理方法, 数值计算方法以及计算机设备. 因此, 不使人意外的是, 在金融文献中用到最现代的随机分析的结果 (*布朗运动, 随机微分方程, 局部鞅, 可表示性*等等), 数理统计的结果 (*自助法* (bootstrap), *刀切法* (jackknife) 等等), 非线性动力学 (*决定性混沌, 分叉, 分形*), 因而, 当然, 没有现代计算机技术的金融活动是难以想象的.

3. Markowitz 理论是显示概率统计方法威力的首次卓越的尝试; 其目标是不可避免的经济和金融风险的最小化, 而方法是"证券组合"的合理组成.

从"风险"的视角来看, 无条件的基本经济假定是说

1) *"大"获利伴随大风险;*

并且这时,

2) *风险应当是"有根据的"、"自然的"和"可计算的".*

联系论点 1) 可以说, “大获利是风险的补偿”, 并且不禁使人再次想起著名的格言 “毫无风险就毫无收益 (Nothing ventured, nothing gained)”, 换句话说, “不入虎穴, 焉得虎子.” 与第二个论点 2) 相联系, 我们记得, 在 Markowitz 理论中, 风险的 “计算” 是在构成证券的有效组合中来实现的, 其中在限制用方差来度量的 “风险” 时, 确保有最大平均获利. 这里我们再次注意到, 确立有效组合时的分散化观念在金融数学中有牢不可破的地位, 并且成为建立新的金融概念 (例如对冲) 和各种金融工具 (期权, 期货, 掉期等等) 时的出发点; 它也以如下的名句作为自己的表达: “不要把鸡蛋放在一个篮子里 (Don't put all your eggs in one basket).”

均值–方差分析 (“mean-variance analysis”) 基于 “平方绩效判别准则”, 以所选取的证券组合的盈利的方差来度量风险, 并认为所研究的模型是 “静态” 的. 在现代的研究最优 “投资、消费、资源配置” 的分析中, 还考察更一般的 “绩效函数” 和 “效用函数”. 这里重要的是要注意到新的方面: 随时间的动态变化, “逐次”、“一步跟着一步” 的解的概念的必要性; 它们仅基于过去的信息, 即没有任何超前信息. “静态模型” 预想, 我们感兴趣的是时刻 $N > 0$ 的盈利, 而组合是在时刻 $n = 0$ 所构成的, 即是 $\mathscr{F}_0$-可测的. “动态模型” 则假设随时间发展, 并且在任何时刻 $n \leqslant N$ 的盈利是由组合来确定的; 这种组合是根据时刻 $n-1$ 的信息来构成的, 即它是 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测的, 并且这样 “一步跟着一步”.

与上述相联系, 变得明显的是, 动态模型所对应的问题在金融数学中引来随机最优控制, 随机最优化, 动态规划, 统计序贯分析等等的观念和方法.

至于说到由各种形式的 “不确定性”、各种形式的 “随机性” 所引起的风险, 不能不讨论在 “保险理论” 中, 或者在某种更广的框架: “精算理论” 中, 所关心的保险 “风险” 问题.

在下一节中, 我们将简述保险作为经济损失补偿机制的形成以及精算师的产生和作用. 有关材料在后面的叙述中不会被运用. 然而, 我们认为其内容既是独立的, 也是有益的, 因为它使我们对金融紧密联系的领域有一个印象. 金融数学与精算数学无论在观念上还是在方法上开始越来越体现明显的共性.

§3b. 作为经济损失社会补偿机制的保险业

1. 精算师 (actuary) 这个词起源于拉丁文*actuarius*. 在古罗马, 这个词一方面是指在上院记录《公众纪要 (Acta Publica)》中的法令的人, 另一方面他也是处理军事账目和监管军事装备的军官.

在英文中, actuary 这个词的含义有过各种变化. 开始时, 人们这样称呼办事员和书记官, 后来又是指股份公司 (joint-stock companies) (尤其是保险公司) 的秘书和参事. 随着时间的推移, actuary 开始被认为是从事与人寿活动概率有关的数学计算的精算师; 这种计算将作为寿险、养老年金等等的合约的定价基础.

精算师 (actuary) 的现代意义是保险数学专家. 他们经常被称为是社会数学家,

因为他们在制定战略和政策方面起关键作用的不仅是对保险公司, 并且还对养老金和其他基金; 政府的精算师更是要对社会保险、国家养老金和其他有关模式所提出的问题作出回答.

保险 (insurance, assurance) 是允许对个体和机构因这样那样的不利状况所引起的经济损失作出补偿的社会机制.

保险指望把经济价值中可能造成未来损失的*不确定性*变为*确定性*.

保险可定义为某种社会工具, 其中个人或机构通过自己的支付来降低或排除可能造成损失的风险的某些部分.

人类很快就懂得, 减少不确定性带来的损失的最有效的办法就是有一个合作机构, 使得具体的个体的损失价值分摊给集体的所有成员. 个体很快意识到, 很难预料对他的经济状况不利的事件的时间、地点、特征. 保险也就成为这样的工具, 它协助个体减轻和 "缓和" 不确定性、未知性、不可靠性等等的影响.

把保险 (及其相应的数学) 只归结为例如寿险和财险是不对的. 保险应该在更广的意义下来理解, 也就是说, 它是对*风险*的保险, 其中要包括例如与证券市场上的博弈、与投资者 (不仅是国内的, 还有海外的) 等等相联系的各种局面. 下面我们将看到, *保险理论* (在 "保险" 这一术语的含义的通常理解下) 现代状况的刻画是与*风险理论*最为紧密交织在一起的. 1992 年 10 月芝加哥商品交易所所发行的期货合约的再保险可以作为这方面最为明显的例子.

在保险上, 并非是所有形式的 "不确定性"、所有 "风险" 都可用来投保. 这里要理解下列术语和分类, 它们有助于澄清保险经营的范围.

2. 所有 "不确定性" 照例都可归为两类中的一类: *纯不确定性*和*投机性不确定性*.

*投机性不确定性*在财务上既可能赢, 也可能输 (这种不确定性, 一般来说, 是不能投保的).

*纯不确定性*只与损失的可能性相联系 (例如, 火灾), 其中的大多数都可投保.

这两种形式的不确定性经常都被替换为一个词: *风险*. (注意, 在保险理论中经常把风险与纯不确定性同等看待; 另一方面, 著名的通俗金融杂志 "Risk (风险)" 基本上探讨投机性不确定性.)

风险及其所招来的损失的起源是*危险*, 它在保险中也归结为两类: *物理危险*和*道德危险*.

与*道德*有关的*危险*联系着不诚实、不尽职、不小心、蓄意破坏等等. 盗窃、纵火等等可以作为这种例子.

*物理危险*例如有地震、经济周期、天气、各种自然现象、建筑结构类型等等.

可用各种方式来与风险作 "斗争":

1) 可通过自觉的决策和运作、理性行为来有意识地避免风险;

2) 把可能的损失转嫁给别人或别的机构可降低风险;
3) 可通过预测力求降低风险. 统计方法是预测可能损失的重要精算工具. 在保险中, 预测和资金积累对于保险公司的成功和有保证的经营起着决定性的作用.

尽管保险是与风险作 "斗争" 的完全合乎逻辑的和在许多方面都是最引人注目的手段, 但是当然, 并非是所有不确定性以及与此相联系的财务损失都能由它来应付. 为了使 "风险" 可投保, 它必须满足一定的要求. 例如, 对于自愿的个人保险来说,

1) 必须要有这种在过去和在将来的运作 "特征" 相 "一致的" 足够大的投保人群;
2) 损失的原因不应该立即波及大多数投保人 (战争类型的、核辐射等等的灾难事件要求特殊考虑);
3) 损失的原因和严重性不应该由投保人的蓄意运作来决定; 这种原因必须是随机的;
4) 所考察的危险应该造成容易识别的损失 ("损失难以伪造");
5) 危险带来的潜在损失必须足够大 ("对于与微小的、容易弥补的损失相联系的危险来说, 投保没有意义");
6) 损失的概率必须足够小 (投保事件必须极少发生), 使得 "承保" 金额在经济上是可接受的;
7) 必须有可获得的现实数据的统计来作为损失概率计算的基础 ("统计估价的代表性和可能性").

这些和其他类似的要求形成一定的起码条件, 它们对于实施保险和处理相应的保险模式是必要的; 保险模式的多种多样说明了各种不同的因素, 例如,

(a) 保险的*类别*,
(b) 保险的*形式*,
(c) 保险的*支付方式*,
(d) 是或可能是风险和损失的原因的*危险类型*.

保险种类 (a) 有*寿险*、*健康险*、*财险*.

保险形式 (b) 有*自愿* (或商业) 保险和*义务* (或社会) 保险. 两种保险形式基于类似的原则, 但其机理和机构是不同的.

(保费和利益的) 支付方式 (c) 由具体条件来决定, 随保单的不同而不同.

危险的类型 (d) 就是上面已经提到的*物理危险*和*道德危险*.

3. 要理解保险及其目标和任务, 不仅要了解保险的内部结构, 并且还要了解其相应的历史.

可以说, 在一定意义下, 保险与人类社会本身一样古老.

已知的最古老的保单是在公元前 4000—3000 年的巴比伦记录的 (在海运上的)

所谓船舶抵押合约 (bottomry) 和盘货抵押贷款合约 (respondencia).

Bottomry (bottom 指海底) 按其本意是抵押, 它对于船主来说, 有一种贷款形式 (例如, 要求把货物运到确定的地点), 作为抵押的不仅是船或者其他 "可感知" 的价值, 并且还有自己的生命 (意味着变为奴隶) 和家庭成员的生命. (在*respondencia* 的情形下, 抵押品是货物.)

巴比伦人还创建了一种保险合约体系, 其中货物供应商在有风险的运输情形下, 如果运船遭抢劫、遭绑架勒索等等, 就同意豁免原有的贷款.

这种实务在汉谟拉比 (Hammurabe) 王朝是被法律化的 (巴比伦的 "汉谟拉比法典") [1]; 当时的古巴比伦王国刚兴起 (公元前二世纪), 并且巴比伦是繁荣的贸易中心, 贸易商队都要由此通过.

如所周知, 这种合约的实务随后通过腓尼基人传到了希腊、罗马和印度. 它们被用在罗马文明的早期法典、拜占庭帝国的法律中; 在现代的有关保险的法律中, 它们也有所反映.

寿险的起源可追溯到公元前 600 年到罗马帝国末 (罗马帝国灭亡被认为是公元 476 年) 的希腊的*thiasoi* 和*eranoi*[2]或罗马的*collegia*[3]. 开始时, collegia (同业公会) 是作为宗教团体产生的, 但它们全部逐渐变成更为实用的团体, 例如专营葬礼服务的团体. 通过这种葬礼服务团体, 罗马人为葬礼付费; 而这种团体中也有寿险的萌芽.

"按保费支付" 的保险实务看来出现在 1250 年左右的意大利城市共和时代 (罗马、威尼斯、比萨、佛罗伦萨、热那亚). 而第一份确切写明的保单是 1347 年在热那亚签订的. 同样是在那里 1430 年签订了第一份 "真正的" 人寿保单, 它是有关怀孕妇女和奴隶的.

"养老年金 (annuity)" 合约早在公元前 1 世纪的罗马人那里已为人们熟知 (这是由保险公司支付某个金额的合约, 而替代定期获得付款的是在某个预定的时间区间或在临终时付款. 在一定的意义下, 这种合约与寿险保单相反, 其中保险支付是在正常的情况下发放的, 而成批获得某个金额.)

有意思的是, 罗马的法律 ("Palcidian law") 是以期望寿命表为基础的, 这个表用来计算养老年金等等. 在 225 年, Ulpian 编写了更精确的表, 它在托斯卡纳一直用到 18 世纪.

300 年以前, 1693 年, E. 哈雷 (Edmund Halley, 1642—1742, 他的名字与一颗著名的彗星相联系) 完善了 Ulpian 的精算表, 他认为给定人群的死亡率在给定的时间间隔中是确定的. 1756 年, Joseph Podson 改进了哈雷表, 使得有可能构成 "逐年的

[1]汉谟拉比 (公元前 1792—1750) 是古巴比伦王国第六代国王. "汉谟拉比法典" 现在陈列在巴黎的卢浮宫博物馆. —— 译者注

[2]thiasoi 和 eranoi 都是古希腊的族群. thiasoi 膜拜一位特殊的神; eranoi 是一个地方上的异教徒族群. —— 译者注

[3]collegia 是 collegium 的复数. collegium 是一种根据法律组织起来的带有商业、社会或宗教特征的社团. —— 译者注

保费等级".

随着中世纪的欧洲的城市和贸易的发展, 同业公会把它们的业务扩充到庇护它们的会员处理火灾、船难、海盗攻击; 在会员举行葬礼、伤病等等时帮助他们. 随后, 16 世纪在热那亚出现的海难保险合约实际上很快就传遍欧洲的所有海洋强国.

海难保险的当代历史在很大程度上就是 "劳合社 (Lloyd's) 的历史"; 劳合社是一家保险和保险经纪商公司, 1689 年在 E. 劳埃德 (Edward Lloyd) 咖啡店的基础上创建的, 其中商人、船主、海难承保人会集在一起签订海运的契约. 1774 年这家公司被科罗列夫斯基法令正式核准, 而到了 1871 年更是被议会法案确认为法人组织. 为了海难保险而成立的劳合社在今天几乎对于所有风险形式都进行运作.

1974 年, 劳合社出版刊登船舶活动 (后来也有飞机活动) 的日报, 也刊登有关失事、自然灾害、船难等等的信息.

劳合社也出版周刊, 刊登在英国和大陆港口装卸的船舶名册以及船舶的装货结束日期. 它也刊登有关保险市场形势的一般信息.

1760 年劳合社组成了对所有 100 顿以上的海运船只进行检视和分类的协会. 劳合社的检视员根据船体、发动机、安全设施等等对船只进行定期考察和分类. 协会也提供技术咨询.

年刊 "英国内外船舶劳合社注册 (Lloyd's Register of British and Foreign Shipping)" 为保险公司提供对于签订海难保单来说必要的信息, 即使所涉及的船只远在上千海里以外.

1666 年的伦敦大火促使发展火险. (第一火灾保险公司成立于 1667 年.) 1854 年英国开始对蒸汽机车事故保险; 1880 年起产生雇主责任保险, 1895 年起产生运输责任保险, 1889 年起产生车船碰撞损失保险.

在美国, 纽约于 1787 年成立火灾保险公司, 而费城于 1794 年成立. 几乎从成立起, 这些公司就开始研究防火和灭火问题. 美国的第一家寿险公司成立于 1759 年.

1835 年纽约大火引起了对必须留有后备来应对意外的巨大 ("灾难") 损失的关注. 1871 年芝加哥大火表明, 在现代的 "稠密" 城市中, 火险价值的量级是极为巨大的. (应付多家保险公司损失的) 再保险就应运而生, 以作为在灾难规模火灾情形下的保险方法; 目前它已经成为各种保险形式的常规.

至于美国历史上 "第一家" 别的现代保险形式, 我们可注意到: 伤残保险 (1864 年), 伤残责任保险 (1880 年), 盗窃保险 (1885 年) 等等.

俄国的第一家火灾保险股份公司 1827 年成立于西伯利亚. 第一家寿险和收入险的保险公司 ("俄罗斯资本和收入保险协会") 成立于 1835 年. [1]

在 20 世纪我们看到保险业蓬勃发展, 它联系着内陆运输和内海 ("inland marine") 运输, 以应付包括旅客行李、快信、邮包、运输手段、运输货物, 甚至桥梁、隧

[1] 中国的保险业出现在清末. 1911 年华商保险公司已经有 45 家. 新中国成立以后, 1949 年 10 月 20 日创立了中国人民保险公司. ——译者注

道等等在内的大宗货物运输的风险.

保险业现在实际上可能与任何想得到的 “可保险的” 风险相联系. 劳合社型的保险公司可为芭蕾舞演员的脚、钢琴师的手指、露天招待会因阴雨天带来的损失等等保险.

从 19 世纪末开始, 出现政府涉足保险领域的倾向, 特别是有关劳动者的病伤 (临时的和永久的)、养老或失业保险. 这种所谓社会保险领域的前驱看来是德国 (1883—1889 年的法律).

20 世纪中叶, 保险业引人注目地出现保险公司兼并的倾向. 例如, 在美国, 1955—1965 期间, 这样的兼并发生在涉及寿险和财险的保险公司之间. 新出现的 “兼并” 公司形式 (控股公司) 持有其他公司的资产, 其分支不仅有保险公司, 并且也有银行系统、计算机行业等等. 这样的公司的优势在于它们所具有的经营多样性、分散性. 对于保险公司来说, 如果它是控股公司的一部分, 其税负就会减轻. 控股公司可能有其他国家的资产参股, 而这对于保险公司来说有时是不可能的. 这就使得保险公司增大了 “杠杆力 (leverage)”, 因为他们有可能以较少的投资来经营较多的资源.

4.[①] 保险精算师行业最初基本上只与寿险相联系, 但现在他们的活动已经扩展到其他相邻领域. 为了对在各公司、厂商、政府机构等等从业的精算师的数目有一个定量的印象, 我们根据 1848 年成立的伦敦的精算学会 (institute) 和 1856 年成立的爱丁堡的精算公会 (faculty) 的报告, 引入英国 (在 1988 年) 的数据.

保险类别	学会	公会	总共	%
1. 寿险公司	853	252	1105	60.2
2. 财险公司	30	2	32	1.7
3. 咨询公司	403	65	468	25.5
4. 投资公司	60	19	79	4.3
5. 政府机构	21	3	24	1.3
6. 行业公司	65	1	66	3.6
7. 其他	54	8	62	3.4
总共	1486	350	1836	100.0

在世界各国都建立了精算协会. 还有国际精算学会 (IAA, International Actuarial Association), 定期举办国际精算大会 (第一届大会 1895 年在布鲁塞尔举行).

在美国有多个精算师行业组织. 首先是北美精算学会 (Society of Actuaries), 它是在 1949 年两个精算组织合并而成立的. 精算行业本身在 1989 年已经庆祝过它的百年纪念.

这个学会有 1 万 1 千多会员; 它是在美国和加拿大的精算师的基本国际专业组织, 其中主要涉及寿险和健康保险、养老事务、补助金等.

[①]这一点的内容在英文版中完全没有. —— 译者注

学会的活动方向之一是举办考试和发放准会员和正式成员的证书.

第二个基本协会是非寿险精算学会 (Casualty Actuarial Society), 它是联合精算师与从事财险、灾祸 (casualty)、赔偿和责任等问题研究的专家的协会.

这两个学会共同进行学生培训和举办考试.

其他的精算组织是: 美国精算学院和美国养老精算协会. 还应该提起卡内基精算研究所, 它与上述协会有紧密的相互联系.

美国精算学院的基本任务之一是为政府准备保险方面的信息.

根据 1994 年的数据, 在北美有精算师资格称号的将近 1 万 8 千人.

北美精算学会的主要管理机构是学会的理事会, 它由 30 位当选成员所组成: 主席, 当选主席 (president-elect), 6 名副主席, 秘书, 司库, 两名前主席 (past-president) 和 18 名理事.

副主席负责学会的各项活动, 诸如考试、科学研究、与社会各界联系、"晋升支持"、出版等等. 学会活动中的多数角色是由志愿者来担任的. 将近 500 名学会会员参与教育和考试项目.

有两种学会会员: 准会员和正式会员①. 要成为会员, 必须坚持通过一定数量的考试; 这种考试每年举行两次.②

要成为准会员, 必须参加培训 (面授或函授) 和通过考试. 通常这要花费 3–4 年. 要通过成为正式会员的考试将花费 5–7 年. 照例有一半左右的会员是正式会员.

在美国的北美精算学会有各种各样的科研资助. 它有自己的专业刊物, 并参与筹备学术会议、讨论班和专业讨论会. 学会发表报告书、研究、书籍、表格和教学资料.

学会每年 (在年终) 举行会员大会和三次春季会议. 在培训项目的框架下, 学会派遣会员去概述当前的精算文献和考试资料, 发布有关精算师就业机会的信息. 学会发布通过准会员和正式会员的资格考试的名册, 颁布大部分有关精算行业、考试、教科书和教育科研项目的指南; 每年四次印发学会的四次 "大会" 的通报. 公报《精算师 (The Actuary)》包含学会活动的各种专业问题的当前信息, 印发编者的话, 使得有可能快速交换见解. 公报每年出版 10 期.

关于精算学会的考试和会员资格问题的决策是如下进行的.

每一次过去的精算培训都允许会员参与. 经过所谓 "大纲 100" 考试以后, 学会理事会就来考察准会员的资格申请. 考试及格就可成为这种准会员. 按照 "大纲 100", 需要进行 7 门必修课考试和 6 门选修课考试. 这时必修课需要获得 155 学分 ("credits"), 而选修课考试需要 45 学分. (考试的学分数根据课的复杂性和重要性而

---

①更确切地说, 对于北美精算学会来说, 有 "准精算师 (ASA)" 和 "精算师 (FSA)" 两种资格考试. 而在英国精算学会, 则有三种会员: 学会会员 (student member)、准会员 (associate) 和正式会员 (fellow). —— 译者注

②在中国也有北美精算学会的考试中心. 第一个这样的考试中心 1987 年成立于南开大学. —— 译者注

定; 评定等级为: 10, 15, 30, 40 学分. 此外, 每门课的考试按十分制来打分. 6 分到 10 分就认为及格, 而 0 到 5 分则不及格.) 汇集的总分就代表通过的考试的水平.

正式成员的考试由 "大纲 100–500" 的考试来组成, 其中分为三个系列: "100"、"200" 和 "300–500", 既包括必修课考试, 也包括选修课考试和讨论班. 这些考试的核心在于 "200" 系列, 保险实务以及投资和金融的考试就在其中.

5. 当前, 要把保险实务和保险理论与涉及证券市场的投资和金融的实务与理论割裂开来是不可能的.

可以肯定地认为, 衍生金融工具 (期货 (futures)、期权 (options)、掉期 (swaps)、权证 (warrants)、跨骑 (straddles)、价差 (spreads) 等等) 全都在全球金融体系中起着越来越大的作用. 毫无疑问, 金融定价方法正在越来越渗透到精算科学中. 在与这样那样的不同风险形式相联结的精算问题与金融问题的这种联系中, 确凿可靠的研究不应是孤立的, 相反, 应该同时一揽子来考虑. 下列由著名的瑞士精算科学专家 H. Bühlmann 提出的保险数学发展时期的分类也证实了这一点.

第一时期 ("第一种保险") 要追溯到 E. 哈雷; 正如上面所注意到的, 他在 1693 年提出了寿险表, 并认为在给定的人群和给定的时间区间内, 死亡人数是固定的.

第二时期 ("第二种保险") 则与既在寿险中、又在其他险种中运用概率论思想和概率统计方法相联系.

第三时期 ("第三种保险") 的特征在于主动运用金融工具和金融工程, 来降低保险风险.

第二时期的保险中的数学基于大数定律、中心极限定理和泊松型的随机过程理论. 第三种保险中的理论在其方法上更为精巧: 它要求随机分析、随机微分方程、鞅及其派生的概念; 也要求新的统计方法,[①] 当然, 还有现代计算技术和现代程序设计.

关于综合考察纯精算问题和证券市场的纯金融问题的必要性和效用性的上述思想的一个精彩的说明, 是在联系灾难事件的再保险的精算定价中应用金融 "期权" 方法的有效性 ([87]).

在国际市场上, 所谓灾难事件是指 "投保财产的损失超过 5 百万美元, 并且涉及相当数量的投保者和承保者" (引自 "财产权益服务 (Property Claims Service)", 1993). 这时, 在一系列灾难情形下的现实损失使得没有一家保险公司 (不管是否愿意) 有能力承保这样的情形. 这也就说明了这样事实: 这种事件的保险不仅涉及合作, 并且涉及国际合作.

下面是若干灾难事件所引起的损失的例子.

1970 年起到 1993 年中期, 平均每年都要发生 34 起灾难事件, 造成平均每年损失 250 亿美元 (2.5×10^9). 在大多数情形下, 一次灾难事件造成的损失少于 2.5 亿美

① 英文版上在这里还加上: "诸如自助法 (bootstrap)、再取样、仿真、神经网络等等." —— 译者注

元. 然而, 例如, 1992 年 8 月的 "Andrew" 飓风造成的损失估计为 137 亿美元, 而保险公司只能支付 30 亿美元左右.

1989 年的 Hugo 飓风带来的损失为 42 亿美元, 而发生在 1992 年第二季度的 Iniki 飓风带来的损失估计为从 1949 年起的飓风损失的第四名.

考虑到来自飓风、暴雨、地震、洪水等灾难后果的庞大的保险支付, 芝加哥期货交易所 (CBOT, Chicago Board of Trade) 在 1992 年 10 月推出灾难事件保单的期货作为再保险的替代物. 这种合约容易匿名出售 (流通), 运营成本很低, 并且具备清算所来进行所有核算, 而对清算所所要求的可信赖度在类似的实务中还是很重要的. 这里, 这种期货合约的市场价格的定价实质上归结为 "算术亚式买入期权 (参见 §1c 中的定义) 的合理价格的定价. 这方面的详情参见 [87].

§3c. 精算定价的经典例子. Lundberg-Cramér 定理

1. 无巧不成书, 几乎在同时, 当 L. Bachelier 在自己的博士论文《投机理论 (Théorie de la spéculation)》(1900 年) 中引入布朗运动来描述股票价格, 并由此为随机金融数学打下基础时, 1903 年 Ph. Lundberg 在乌普萨拉 (瑞典) 发表了博士论文 "Approximerad framsröllning av sannolikhetsfunctionen. Atersförsäkring av kollektivrisker", 系统运用泊松过程而奠定了 (第二种) 风险的精算理论的概率论基础; 泊松过程和布朗运动一起也都成为随机过程一般理论的基本内容.

1929 年, 在一系列瑞典保险公司的促进下, 斯德哥尔摩大学设立保险 (精算) 数学的教授席位. 这一席位属于 H. Cramér, 并且从此 "斯德哥尔摩学派" 开始活动; 他们以其既在精算数学、又在概率统计和随机过程理论上的研究成果而著称.

我们来看看精算计算理论的经典结果: "*Lundberg-Cramér* 风险理论基本定理" 是怎样陈述的.

定义风险过程 (参见图 10) 例如为下列形式的保险业务:

$$R_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k,$$

其中

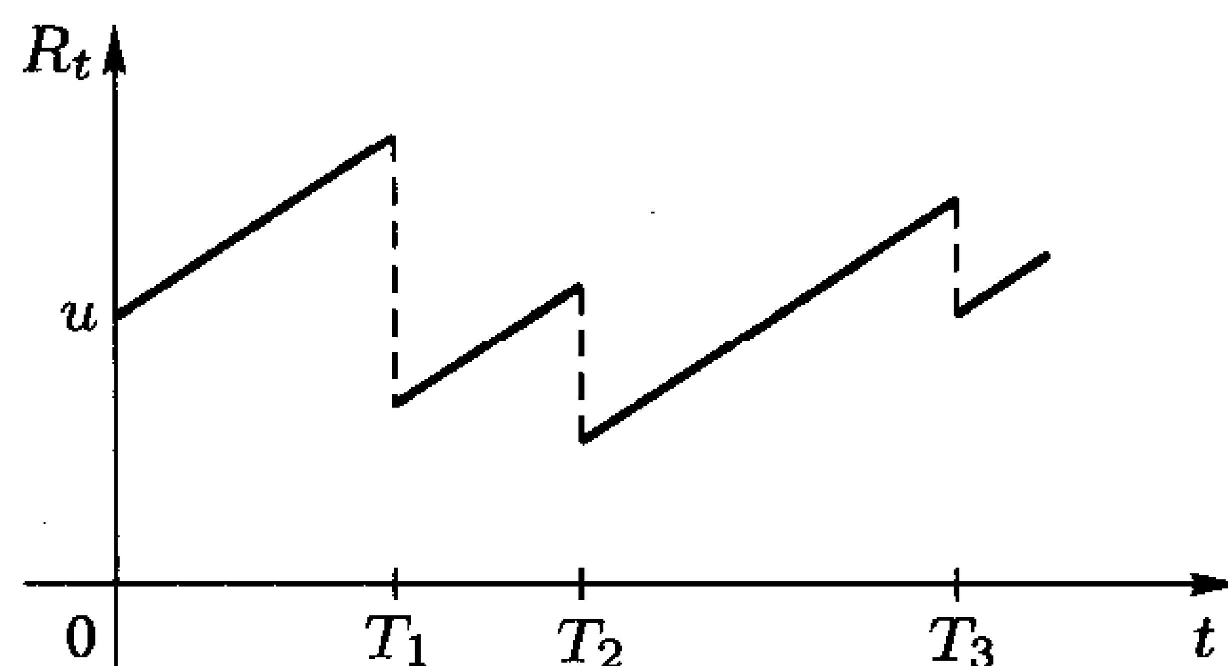


图 10 风险过程 R_t

u 是初始资本,
c 是保费的征收率,
(ξ_k) 是独立同分布随机变量序列, 其分布函数

$$F(x) = \mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant x\},\ \mu = \mathsf{E}\xi_1\ (F(0) = 0,\ \mu < \infty),$$

$N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ 是泊松过程,

$$N_t = \sum_k I(T_k \leqslant t),$$

这里 $T_1, T_2, \cdots$ 是所要求的保险权益的付费时刻, 并且 $(T_{k+1} - T_k)_{k\geqslant 1}$ 是有参数为 λ 的指数分布的独立随机变量:

$$\mathsf{P}\{T_{k+1} - T_k \geqslant t\} = e^{-\lambda t}.$$

很明显,

$$\mathsf{E}R_t = u + (c - \lambda\mu)t = u + \rho\lambda\mu t,$$

其中系数 $\rho = c/(\lambda\mu) - 1$ 假定为正的 ("纯盈利的正条件").

与这一模型相联系的第一批自然的问题之一是计算一般的破产概率, $\mathsf{P}(\tau < \infty)$, 或者时刻 t 以前的破产概率 $\mathsf{P}(\tau \leqslant t)$, 其中

$$\tau = \inf\{t\colon R_t \leqslant 0\}.$$

Lundberg-Cramér 断言下列定理成立:

定理 *假设存在常数 $R > 0$ 满足条件*

$$\int_0^\infty e^{Rx}(1 - F(x))dx = \frac{c}{\lambda}.$$

那么

$$\mathsf{P}(\tau < \infty) \leqslant e^{-Ru},$$

其中 u 是初始资本.

在 Lundberg-Cramér 模型中所作的假定自然可以减弱, 但模型本身将复杂化. 例如, 可认为风险过程

$$R_t = u + (ct + \sigma B_t) - \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k,$$

其中 (B_t) 是布朗运动, 而 (N_t) 是 Cox 过程 (即有随机强度的 "计数过程"; 参见例如 [250]).

对于这一结论, 我们再简要地来叙述刻画支付量的分布函数 $F = F(x)$ 的问题. 相当合理的是认为联系支付的条件通常取下列三种类型之一:

- 正常,
- 极端,
- 灾难.

为描述正常事件, 利用有急降 "尾部" 的分布 (例如, 满足条件 $1-F(x) \sim e^{-x}$, $x \to \infty$ 的指数分布).

为描述 "极端" 事件, 利用带 "厚尾" 的分布 $F = F(x)$, 例如, $1-F(x) \sim x^{-\alpha}$, $x \to \infty$, $\alpha > 0$ (Pareto 型分布) 或者

$$1-F(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^p\right\}, \qquad x > \mu,$$

(Weibull 分布), 其中 $p \in (0,1)$.

我们注意到, Lundberg-Cramér 定理是有关正常型的, 并且不能用于大量支付情形. (那时甚至不能定义 "Lundberg 系数" R. Lundberg-Cramér 定理的证明例如参见 [439; 英文版].)

第二章　随机模型. 离散时间

---

1. 必要的概率论概念和若干市场价格动态模型

§1a. 价格性态的不确定性和不规则性, 它们的概率论描述和表示

1. 假定度量时间的单位是一天 ($n = 0, 1, 2, \cdots$), 而

$$S = (S_n)_{n \geqslant 0}$$

比如是股票、两种货币的汇率或某种金融指数的市场价格 (在时间上, 其 "寿命" 没有任何限制, 不像对于债券的价格那样). S_n ($n \geqslant 0$) 的值的经验分析指出, 它们的变化是非常不规则的, 其波动或许可采用 M. Kendall 的话来这样说 (参见第一章 §2a): "$\cdots$ *the Demon of Chance drew a random number* $\cdots$ *and added it to the current price to determine the next* $\cdots$ *price* ($\cdots$ 机遇之魔掷出一个随机数 $\cdots$ 把它加到当前价格上以决定下一个 $\cdots$ 价格)".

L. Bachelier 无疑是第一个开始用概率论的概念和方法来描述价格 $(S_n)_{n \geqslant 0}$ 的; 由此他建立了模型, 用来研究以既有统计不确定性、又同时具有统计频率稳定性为特征的经验现象.

遵循概率论的途径, 并根据当今通用的*Kolmogorov* 概率论公理体系, 我们将假定, 所有讨论都在下述的某个概率空间中进行:

$$(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}),$$

其中

Ω 是基本事件 ω 的空间 (在所考察的框架中是市场状态);

$\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集的 σ-代数 (市场上可观察的事件全体);

P 是概率, 即 $\mathscr{F}$ 上的概率测度.

正如在第一章 §1a 所注意到的, 时间和动态变化是金融理论不可分割的组成部分; 与此相联系的是一个适当的作为出发点的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, 并配备假设给定的 σ-代数流 $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$ 满足

$$\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{F}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{F}.$$

引入这个包含在 $\mathscr{F}$ 内的不减的称为渗透的 σ-子代数流的含义在于下列解释:

$\mathscr{F}_n$ 是在时刻 n 以前 (包括 n) 可观察的事件全体.

可以换句话说, $\mathscr{F}_n$ 是在时刻 n 以前有关市场状态的可接受的 "信息" 观察. (在 "有效" 市场概念的框架下, 这可能是例如三种 σ-代数 $\mathscr{F}_n^1$, $\mathscr{F}_n^2$, $\mathscr{F}_n^3$ 之一; 参见第一章中的 §2a.)

这样, 我们将认为, 我们的基本概率模型是渗透概率空间

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P}),$$

它也就是所谓随机基底.

在许多情形下, 扩充随机基底的概念是很有益的, 这时, 假设给定整个概率测度族 $\mathscr{P} = \{\mathsf{P}\}$ 来取代单个概率测度 P. (这样做经常是由于很难规定某个具体的测度 P.) 运用统计决策理论的术语, 对象组 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathscr{P})$ 可称为渗透随机 (统计) 试验.

2. 如果把 $\mathscr{F}_n$ 解释为在时刻 n 可接受的信息, 那么自然认为

$$S_n \text{ 为 } \mathscr{F}_n\text{-可测},$$

即, 形象地说, 这是认为价格的值依赖时刻 n 以前 (包括 n) 在市场上可观察到的事件.

由 S_n 作为时刻 n 的 "价格" (例如, 股价) 的含义出发, 我们将假定 $S_n > 0$, $n \geqslant 0$.

现在我们引入两种流传最广的价格 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 的表示方法.

第一种方法 (I) 类似于 "复利 (compound return)" 公式, 参见第一章 §1b; 它由下列表示式出发:

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \tag{1}$$

其中 $H_n = h_0 + h_1 + \cdots + h_n$, $h_0 = 0$, $n \geqslant 0$, 并且随机变量 $h_n = h_n(\omega)$ 为 $\mathscr{F}_n$-可测.

这样一来, 这里

$$H_n = \ln \frac{S_n}{S_0}, \tag{2}$$

而 "回报"、"效益"、"对数收益" (return)

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} = \ln\left(1 + \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right), \tag{3}$$

$\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$.

令

$$\widehat{h}_n = \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}, \qquad \widehat{H}_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \widehat{h}_k. \tag{4}$$

于是公式 (1) 可重记为下列形式

$$S_n = S_0 \prod_{1\leqslant k\leqslant n} (1 + \widehat{h}_k), \tag{5}$$

或者其等价形式

$$S_n = S_0 \prod_{1\leqslant k\leqslant n} (1 + \Delta\widehat{H}_k) = S_0 e^{\widehat{H}_n} \prod_{1\leqslant k\leqslant n} (1 + \Delta\widehat{H}_k) e^{-\Delta\widehat{H}_k}. \tag{6}$$

表示式 (5) 就是第二种方法 (II), 它把价格表示为类似于 "单利 (simple return)" 公式.

我们以 $\mathscr{E}(\widehat{H})_n$ 表示 (6) 的右端的表达式:

$$\mathscr{E}(\widehat{H})_n = e^{\widehat{H}_n} \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + \Delta \widehat{H}_k) e^{-\Delta \widehat{H}_k}. \tag{7}$$

用这个表达式确定的随机序列

$$\mathscr{E}(\widehat{H}) = (\mathscr{E}(\widehat{H})_n)_{n \geqslant 0}, \qquad \mathscr{E}(\widehat{H})_0 = 1,$$

称为由量 $\widehat{H} = (\widehat{H}_n)_{n \geqslant 0}$, $\widehat{H}_0 = 1$ 所生成的随机指数, 或者*Doléans* 指数.

这样一来, 可以说, 价格的第一种表示方法 (I: "复利") 运用了通常指数:

$$S_n = S_0 e^{H_n},$$

第二种方法 (II: "单利") 则是对于自身的描述运用了随机指数:

$$S_n = S_0 \mathscr{E}(\widehat{H})_n. \tag{8}$$

这时, 由 (2)–(4) 得到,

$$\widehat{H}_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (e^{\Delta H_k} - 1),$$

其等价表示式为

$$\widehat{H}_n = H_n + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (e^{\Delta H_k} - \Delta H_k - 1). \tag{9}$$

显然, 由 (3) 和 (4), 也有

$$H_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \ln(1 + \Delta \widehat{H}_k), \tag{10}$$

这里 $\widehat{h}_n = \Delta H_n > -1$, 因为假定 $S_n > 0$.

有益的是要注意到, 随机指数满足随机*差分方程*

$$\Delta \mathscr{E}(\widehat{H})_n = \mathscr{E}(\widehat{H})_{n-1} \Delta \widehat{H}_n, \tag{11}$$

它直接由 (7) 得到.

注 1. 表示式 (1) 和 (8) 是在离散情形下给出的, $n = 0, 1, \cdots$. 在价格 $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ 对连续时间 $t \geqslant 0$ 演变的情形下, 通常假定过程 $H = (H_t)_{t \geqslant 0}$ 和 $\widehat{H} = (\widehat{H}_t)_{t \geqslant 0}$ 是半鞅 (参见第三章第 5 节). 于是由*Itô* 公式 (第三章 §5c; 也参见 [250; 第一章 §4e]) 得到

$$e^{H_t} = \mathscr{E}(\widehat{H})_t,$$

其中

$$\widehat{H}_t = H_t + \frac{1}{2}\langle H^c\rangle_t + \sum_{0<s\leqslant t}(e^{\Delta H_s} - 1 - \Delta H_s) \tag{12}$$

以及 $\mathscr{E}(\widehat{H}) = (\mathscr{E}(\widehat{H})_t)_{t\geqslant 0}$ 是随机指数:

$$\mathscr{E}(\widehat{H})_t = e^{\widehat{H}_t - \frac{1}{2}\langle \widehat{H}^c\rangle_t} \prod_{0<s\leqslant t}(1 + \Delta\widehat{H}_s)e^{-\Delta\widehat{H}_s}, \tag{13}$$

它满足 (比较 (11)) 线性随机微分方程

$$d\mathscr{E}(\widehat{H})_t = \mathscr{E}(\widehat{H})_{t-}d\widehat{H}_t. \tag{14}$$

(在公式 (12) 和 (13) 中, 以 $\langle H^c\rangle$ 和 $\langle \widehat{H}^c\rangle$ 表示构成半鞅 H 和 $\widehat{H}$ 的连续鞅成分的平方特征; 参见第三章中的第 5 节. 关于 $\widehat{H}$ 是布朗运动情形下的随机微分方程, 参见第三章 §3e.)

这样一来, 对于连续时间情形下的 (1) 和 (8) 的类似相应地是表达式

$$S_t = S_0 e^{H_t} \tag{15}$$

和

$$S_t = S_0\mathscr{E}(\widehat{H})_t, \tag{16}$$

其中过程 $\widehat{H} = (\widehat{H}_t)_{t\geqslant 0}$ 通过公式 (12) 与 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 相联系. 在 (12) 中出现的级数绝对收敛, 因为在每个区间 $[0,t]$ 中, 半鞅以概率 1 只有有限个 "大" 跳跃 ($|\Delta H_s| > \frac{1}{2}$), 并且 $\sum_{0<s\leqslant t} |\Delta H_s|^2 < \infty$. (参见第三章 §5b 的注 3.)

注 2. 由 (3) 和 (4) 得到,

$$h_n = \ln(1 + \widehat{h}_n) \tag{17}$$

和

$$\widehat{h}_n = e^{h_n} - 1. \tag{18}$$

显然, 对 h_n 的小值有

$$\widehat{h}_n \approx h_n, \tag{19}$$

并且

$$\widehat{h}_n - h_n = \frac{1}{2}h_n^2 + \frac{1}{6}h_n^3 + \cdots. \tag{20}$$

3. 余下的问题是描述序列 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 和 $H = (H_n)_{n\geqslant 0}$ 的概率分布.

从经典概率论和发展非常成熟的 "正态分布统计" 视角来看, 极有吸引力的是考虑序列 $H = (H_n)_{n\geqslant 0}$ 是高斯 (正态分布) 随机变量的情形. 如果

$$H_n = h_1 + \cdots + h_n, \qquad n \geqslant 1, \tag{21}$$

那么这种序列的性质完全可由序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 的二维分布来确定, 这种二维分布由均值

$$\mu_n = \mathsf{E} h_n, \qquad n \geqslant 1,$$

和协方差

$$\mathsf{Cov}(h_n, h_m) \equiv \mathsf{E} h_n h_m - \mathsf{E} h_n \mathsf{E} h_m, \qquad m, n \geqslant 1,$$

来刻画.

正态性假定本质上改善了许多依赖于分布性质的问题的解. 例如, 正态相关定理 (参见例如, [303; 第 13 章]) 以显式给出条件数学期望 $\widetilde{h} = \mathsf{E}(h_{n+1}|h_1, \cdots, h_n)$ 的公式, 它是 h_{n+1} 关于 $h_1, \cdots, h_n$ 在均方意义下的最优估计量:

$$\widetilde{h}_{n+1} = \mu_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i (h_i - \mu_i), \tag{22}$$

其中系数 a_i 根据协方差矩阵来计算 (参见 [303; 第 13 章], 也参见 [439; 第二章, §13]).

公式 (22) 当 $h_1, \cdots, h_n$ 相互独立时特别简单. 在这一情形下,

$$a_i = \frac{\mathsf{Cov}(h_{n+1}, h_i)}{\mathsf{D} h_i},$$

并且估计量

$$\widetilde{h}_{n+1} = \mathsf{E} h_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{Cov}(h_{n+1}, h_i)}{\mathsf{D} h_i} (h_i - \mathsf{E} h_i). \tag{23}$$

估计误差

$$\Delta_{n+1} = \mathsf{E}(\widetilde{h}_{n+1} - h_{n+1})^2$$

由下列公式确定:

$$\Delta_{n+1} = \mathsf{D} h_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathsf{Cov}^2(h_{n+1}, h_i)}{\mathsf{D} h_i}. \tag{24}$$

我们察觉, 如果

$$\varphi_{(\mu,\sigma^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

是带参数 (μ, σ^2) 的正态分布密度, 那么 (参见图 11)

$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \varphi_{(\mu,\sigma^2)}(x)\,dx = 0.6827 \cdots.$$

同样还有

$$\int_{\mu-1.65\sigma}^{\mu+1.65\sigma} \varphi_{(\mu,\sigma^2)}(x)\,dx \approx 0.90. \tag{25}$$

由高斯性,

$$h_{n+1} - \widetilde{h}_{n+1} \sim \mathscr{N}(0, \Delta_{n+1}),$$

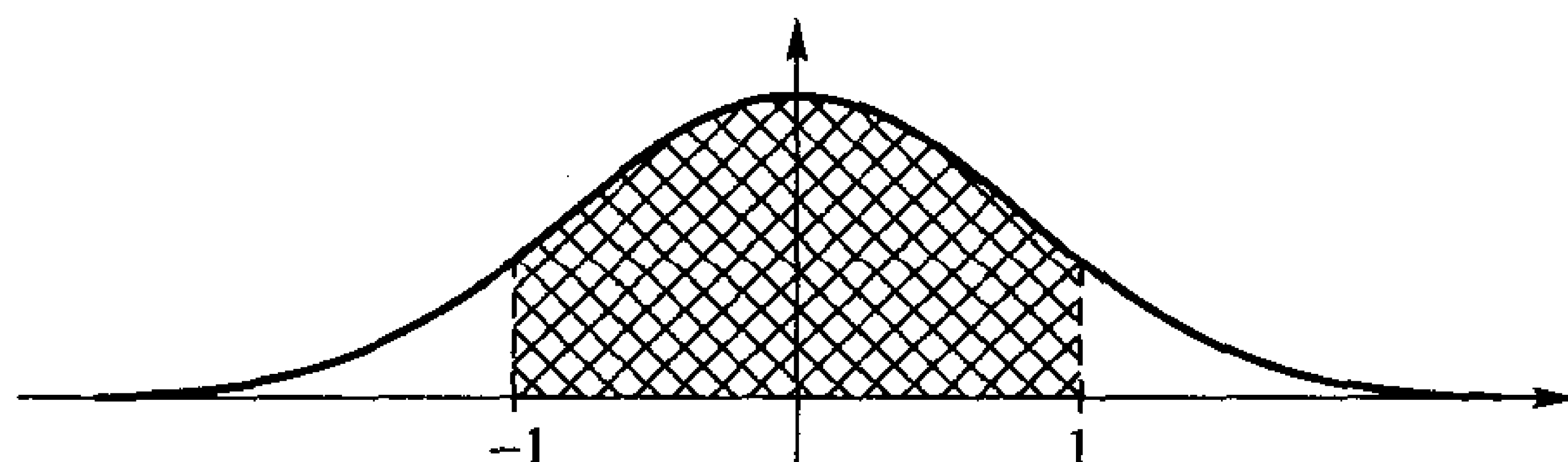


图 11 标准正态分布密度 $\varphi_{(0,1)}(x)$ 的图像. 阴影部分的面积近似等于 0.6827

再根据 (25),

$$\mathrm{P}\{|h_{n+1}-\widetilde{h}_{n+1}| \leqslant 1.65\sqrt{\Delta_{n+1}}\} \approx 0.90.$$

因此, 可以断定, 以接近于 0.90 的概率, 量 h_{n+1} 的可期望值属于置信区间

$$[\widetilde{h}_{n+1}-1.65\sqrt{\Delta_{n+1}}, \widetilde{h}_{n+1}+1.65\sqrt{\Delta_{n+1}}].$$

由此导出, 在 90% 的情形下, 市场价格随机变量 S_{n+1} (根据观察值 $h_1,\cdots,h_n$) 的预测值 $\widetilde{S}_{n+1}$ 落在下列区间中:

$$[S_n e^{\widetilde{h}_{n+1}-1.65\sqrt{\Delta_{n+1}}}, S_n e^{\widetilde{h}_{n+1}+1.65\sqrt{\Delta_{n+1}}}].$$

4. 然而, 对于量 h_n $(n \geqslant 1)$ 的看来很诱人的 "正态性假设" 需要谨慎对待. 问题在于, 许多金融数据的经验分析指出 (参见以后的第四章),

(a) 没有落在 "置信" 区间 $[\overline{h}_n - k\widehat{\sigma}_n, \overline{h}_n + k\widehat{\sigma}_n]$ 中的样本值的个数显著多于正态性假设下应该有的个数, 其中 $k=1,2,3$; $\overline{h}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} h_i$ 是样本均值, $\widehat{\sigma}_n$ 是样本标准差:

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(h_i-\overline{h}_n)^2;$$

直观上, 这意味着, 经验密度的 "尾部" 下降得比高斯分布慢 ("厚尾");

(b) *峭度* (excess) *或峰度系数* (kurtosis)

$$\widehat{k}_n = \frac{\widehat{m}_4}{\widehat{m}_2^2} - 3$$

明显是*正的* (对于正态分布来说, 峰度系数为零), 这里 $\widehat{m}_2$ 和 $\widehat{m}_4$ 是经验二阶矩和四阶矩; 这意味着分布密度在中心值附近有 "尖峰":

或许, 关于量 $h=(h_n)$ 的分布结构的最强的假定, 除了高斯性以外, 是下列假定:

这些随机变量独立同分布.

在这些条件下, 价格 $S_n = S_0 e^{H_n}$ $(H_n = h_1 + \cdots + h_n)$ 的分析就容易引进基于这些假定的通常的概率论方法. 但是, 这样一来, 当然很明显, 值 $h=(h_n)$ 的*独立性*立即违背要求 (和相信) "过去的数据" 可用来预测 "未来的值".

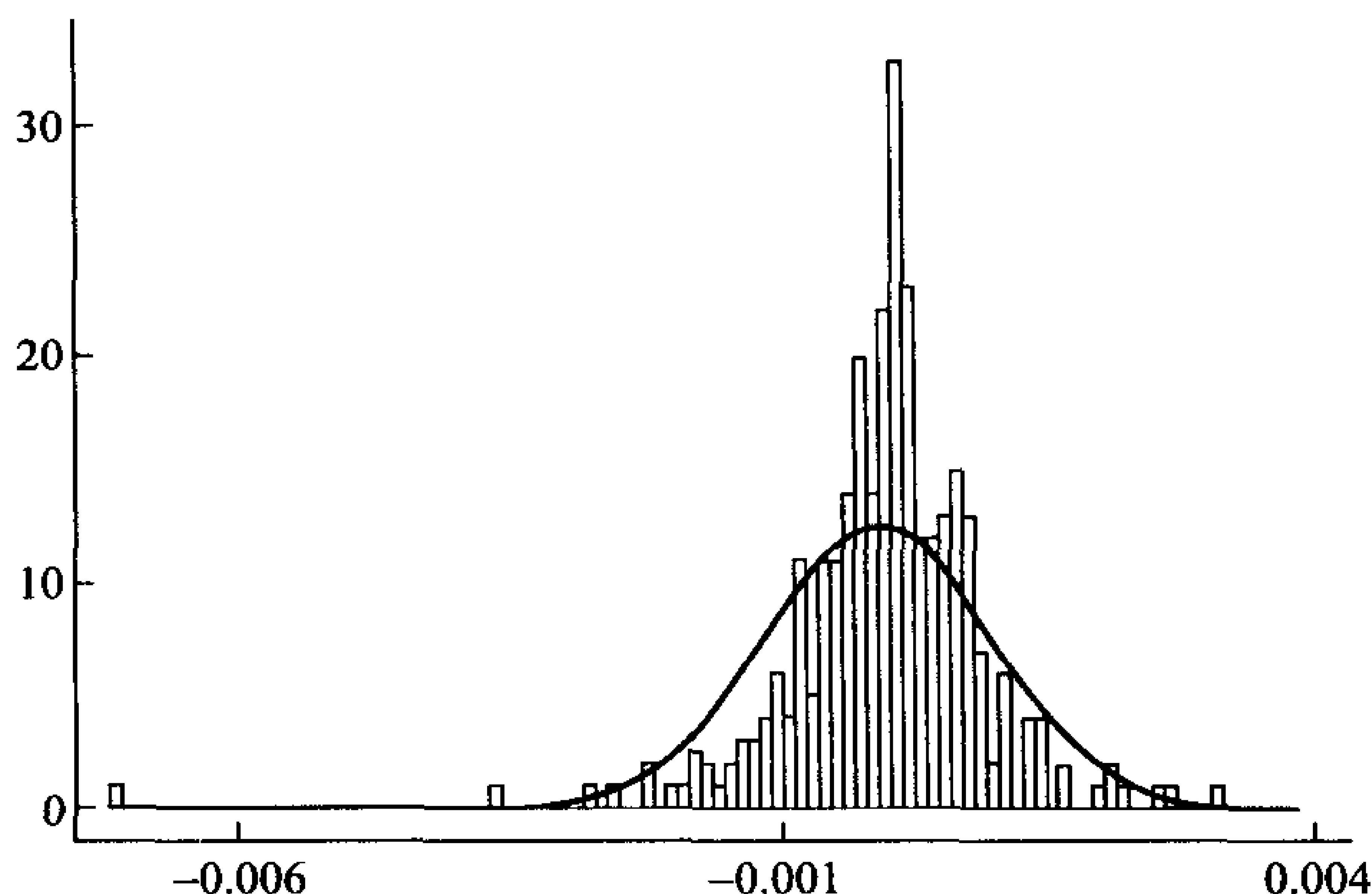


图 12 按照模型$HARCH$ (16) (参见 §3b) 计算的量 $(h_n)_{n\leqslant 300}$ 的一维分布的经验密度. 连续曲线是对应的正态分布 $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ 的密度, 其中 $m=\overline{h}_{300}$, $\sigma^2=\widehat{\sigma}^2_{300}$

其实, 在这一关系中, 局面还是较为乐观的. 正如已经注意到, 这是因为金融时间系列的多项研究指出, 在值 (h_n) 之间具有非高斯性和依赖性, 尽管它们可能不相关, 并且依赖性很弱. 更明确地说, 可断言, 在所具有的依赖性中, 所考察的经验相关性可能不是对于量 h_n 本身来说的, 而是对于 $|h_n|$ 或 h_n^2 来说的. (在以后引进的随机波动率模型中, 局面是这样的: $\mathsf{Cov}(h_n,h_m)=0$ 对于 $n\neq m$ 成立, 但是 $\mathsf{Cov}(h_n^2,h_m^2)$ 和 $\mathsf{Cov}(|h_n|,|h_m|)$ 显著偏离零; 参见 §3c.)

§1b. Doob 分解. 典则表示

1. 我们将假定, 在模型

$$S_n=S_0e^{H_n},\qquad H_n=h_1+\cdots+h_n \tag{1}$$

中, 随机变量 h_n $(n\geqslant 1)$ 具有有限绝对一阶矩, $\mathsf{E}|h_n|<\infty$, $n\geqslant 1$.

以后要讨论的 Doob 分解假定序列 $H=(H_n)$ 的研究依赖于渗透 $(\mathscr{F}_n)$ 的性质, 即依赖于 "观察" 接受的 "信息" 流 $\mathscr{F}_n$ 的性质 (在我们感兴趣的证券市场框架下; $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$).

由于 $\mathsf{E}|h_n|<\infty$, $n\geqslant 1$, 故条件数学期望 $\mathsf{E}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})$ 可确定, 它意味着

$$H_n=\sum_{k\leqslant n}\mathsf{E}(h_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})+\sum_{k\leqslant n}[h_k-\mathsf{E}(h_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})]. \tag{2}$$

换句话说, 如果

$$A_n = \sum_{k \leqslant n} \mathsf{E}(h_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \tag{3}$$

$$M_n = \sum_{k \leqslant n} [h_k - \mathsf{E}(h_k \,|\, \mathscr{F}_{k-1})], \tag{4}$$

那么对于有 $H_0 = 0$ 的 $H = (H_n)_{n \geqslant 0}$, 下列 *Doob* 分解成立:

$$H_n = A_n + M_n, \qquad n \geqslant 0, \tag{5}$$

这里

a) 有 $A_0 = 0$ 的序列 $A = (A_n)_{n \geqslant 0}$ 在下列意义下可料: 对于每个 $n \geqslant 1$,

$$A_n \text{ 为 } \mathscr{F}_{n-1}\text{-可测;}$$

b) 有 $M_0 = 0$ 的序列 $M = (M_n)_{n \geqslant 0}$ 是鞅, 即对于每个 $n \geqslant 1$ 满足下列性质:

$$\mathsf{E}(M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = M_{n-1} \qquad (\mathsf{P}\text{-a.s.}),$$

这里量 M_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测, 且 $\mathsf{E}|M_n| < \infty$ 对于每个 $n \geqslant 1$ 成立.

注. 假定, 除了渗透 $(\mathscr{F}_n)$ 以外, 还给定子渗透 $(\mathscr{G}_n)$, 其中 $\mathscr{G}_n \subseteq \mathscr{F}_n$ 以及 $\mathscr{G}_n \subseteq \mathscr{G}_{n+1}$. 对于 $H = (H_n)$ 可写出关于流 $(\mathscr{G}_n)$ 的类似分解:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(h_k \,|\, \mathscr{G}_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} (h_k - \mathsf{E}(h_k \,|\, \mathscr{G}_{k-1})).$$

序列 $A = (A_n)$ 有元素

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(h_k \,|\, \mathscr{G}_{k-1}),$$

它将是 $(\mathscr{G}_n)$-可料的 (即 A_n 为 $\mathscr{G}_{n-1}$-可测), 但 $M = (M_n)$,

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} (h_k - \mathsf{E}(h_k \,|\, \mathscr{G}_{k-1})),$$

一般来说, 将不再是关于流 $(\mathscr{G}_n)$ 的鞅, 因为 h_k 关于 $\mathscr{F}_k$ 可测, 而不是关于 $\mathscr{G}_k$ 可测.

重要的是要注意到, 如果除了 (5) 以外, 我们还有另外的分解

$$H_n = A'_n + M'_n,$$

其中序列 $A' = (A'_n, \mathscr{F}_n)$ (关于流 $(\mathscr{F}_n)$) 可料, $A'_0 = 0$, 而 $M' = (M'_n, \mathscr{F}_n)$ 是鞅, 那么对于所有 $n \geqslant 0$, 有 $A'_n = A_n$, $M'_n = M_n$.

事实上,

$$A'_{n+1} - A'_n = (A_{n+1} - A_n) + (M_{n+1} - M_n) - (M'_{n+1} - M'_n).$$

由此对两端求条件数学期望 $\mathsf{E}(\cdot\,|\,\mathscr{F}_n)$, 我们求得 $A'_{n+1} - A'_n = A_{n+1} - A_n$ (由 A'_{n+1} 和 A'_{n+1} 的 $\mathscr{F}_n$-可测性). 但是 $A'_0 = A_0 = 0$, 这就意味着 $A'_n = A_n$ 和 $M'_n = M_n$ 对于所有 $n \geqslant 0$ 成立. 因此, 有可料序列 $A = (A_n)$ 的分解 (1) 是唯一的.

还要注意到, 如果在所考察的模型中 $\mathsf{E}(h_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1}) = 0$, $k \geqslant 1$, 那么根据 (2), 序列 $H = (H_n)$ 本身是鞅.

我们引入下列 "Doob 分解" 的例子; 它尽管很简单, 却很好地说明了这种分解的 "不平凡性".

例. 设 $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, 其中 (ξ_n) 是满足

$$\mathsf{P}(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

的独立 Bernoulli 随机变量. 考察对于 $H_n = |X_n|$ $(n \geqslant 0,\ X_0 = 0)$ 的 Doob 分解.

这里

$$h_n = \Delta H_n = \Delta|X_n| = |X_n| - |X_{n-1}| = |X_{n-1} + \xi_n| - |X_{n-1}|,$$

并且, 很明显,

$$\begin{aligned}\Delta M_n \equiv h_n - \mathsf{E}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) &= |X_{n-1} + \xi_n| - \mathsf{E}(|X_{n-1} + \xi_n|\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) \\ &= |X_{n-1} + \xi_n| - \mathsf{E}(|X_{n-1} + \xi_n|\,|\,X_{n-1}) \\ &= (\operatorname{Sgn} X_{n-1})\xi_n,\end{aligned}$$

其中

$$\operatorname{Sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

这样一来, 对于分解 (5) 中的鞅 $M = (M_n)_{n\geqslant 1}$, 我们有

$$M_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} (\operatorname{Sgn} X_{k-1})\Delta X_k.$$

同时,

$$\mathsf{E}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1}) = \mathsf{E}(|X_{n-1} + \xi_n|\,|\,X_{n-1}) - |X_{n-1}|.$$

在集合 $\{\omega\colon X_{n-1} = i\}$ $(i \neq 0)$ 上, 右端为零. 如果 $i = 0$, 那么右端为一. 因此,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(h_i\,|\,\mathscr{F}_{i-1}) = N\{1 \leqslant k \leqslant n\colon X_{k-1} = 0\},$$

这里 $N\{1 \leqslant k \leqslant n\colon X_{k-1} = 0\}$ 是 $X_{k-1} = 0$ 的 k 的个数, $1 \leqslant k \leqslant n$.

如果以 $L_n(0) = N\{0 \leqslant k \leqslant n-1\colon X_k = 0\}$ 表示序列 $(X_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ 中的零的个数, 那么我们求得

$$|X_n| = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (\operatorname{Sgn} X_{k-1}) \Delta X_k + L_n(0),$$

它就是对于布朗运动模型的著名的 *Tanaka* (田中) 公式的离散类似 (参见第三章 §5c). 由此顺便还可看到,

$$\mathsf{E} L_n(0) = \mathsf{E}|X_n|.$$

由于 $\dfrac{X_n}{\sqrt{n}} \sim \mathscr{N}(0,1)$, 故 $\mathsf{E}|X_n| \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi} n}$, 而这意味着

$$\mathsf{E} L_n(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi} n},$$

它是有关对称 Bernoulli 随机游走的零的平均个数的著名结果 (参见例如 [156]).

2. 设 $M = (M_n)_{n \geqslant 1}$ 是平方可积鞅 ($\mathsf{E} M_n^2 < \infty$, $n \geqslant 1$), $M_0 = 0$. 那么对分解 (2) 取 $H_n = M_n^2$, 它就有下列形式:

$$M_n^2 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{E}(\Delta M_k^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\Delta M_k^2 - \mathsf{E}(\Delta M_k^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1})\right), \tag{6}$$

其中 $\Delta M_k^2 = M_k^2 - M_{k-1}^2$.

令

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathsf{E}(\Delta M_k^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1}), \\ m_n &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (\Delta M_k^2 - \mathsf{E}(\Delta M_k^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1})). \end{aligned} \tag{7}$$

联系这两个记号, 分解 (6) 可记为下列形式:

$$M_n^2 = \langle M \rangle_n + m_n, \tag{8}$$

其中 (可料) 序列 $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_n)_{n \geqslant 1}$ 称为鞅 M 的平方特征 (也参见第三章 §5b).

我们察觉, 由于 $M = (M_n)$ 是鞅, 故

$$\mathsf{E}(\Delta M_k^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) = \mathsf{E}((\Delta M_k)^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1}). \tag{9}$$

这一性质说明, 为什么平方特征 $\langle M \rangle$ 也称为 (平方可积) 鞅 M 的可料平方变差. 这时, 术语平方变差留给 (一般来说不是可料的) 序列 $[M] = ([M]_n)_{n \geqslant 1}$, 它的取值为 (也参见第三章 §5b)

$$[M]_n = \sum_{k \leqslant n} (\Delta M_k)^2. \tag{10}$$

3. 现在假定序列 $H = (H_n)$ 本身是鞅, 并且也是平方可积的, 即, 设

$$\mathsf{E}(\Delta H_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) = \mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) = 0$$

以及 $\mathsf{E}h_k^2 < \infty$, $k \geqslant 1$. 于是

$$\langle H \rangle_n = \sum_{k \leqslant n} \mathsf{E}(h_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}). \tag{11}$$

叠加为平方特征 $\langle H \rangle_n$ 的量 $\mathsf{E}(h_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1})$ 决定鞅 H 的变化程度 (波动率), 并且在很大程度上也决定了它的性质. 例如, 如果以概率 1 有 $\langle H \rangle_n \to \infty$, 那么对于平方可积鞅 H, 下列强大数定律成立: 当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{H_n}{\langle H \rangle_n} \to 0 \qquad (\mathsf{P}\text{-a.s.}). \tag{12}$$

(参见 [439; 第 VII 章, §5].)

在以后, 量 $(\mathsf{E}(h_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}))_{k \geqslant 1}$ 的全体将在分析金融时间序列 $S = (S_n)$ $(S_n = S_0 e^{H_n})$ 时起着本质作用. 针对这一情形、并采用金融理论中的术语, 序列 $(\mathsf{E}(h_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}))_{k \geqslant 1}$ 将称为随机波动率. (关于波动率详见第 3 节.)

如果条件数学期望 $\mathsf{E}(h_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1})$ 重合于无条件数学期望 (例如, (h_n) 是独立随机变量序列, 而 $\mathscr{F}_{k-1} = \sigma(h_1, \cdots, h_{k-1})$ 是由量 $h_1, \cdots, h_{n-1}$ 所生成的 σ-代数, 那么波动率就是方差 $\sigma_k^2 = \mathsf{E}h_k^2$ (假定 $\mathsf{E}h_k = 0$) 全体, $k \geqslant 1$, 它们是量 h_k 的标准散射 (变化率) 度量.

4. 在记述 Doob 分解的 (2) 或 (5) 时假定, $\mathsf{E}|h_k| < \infty$, $k \geqslant 1$. 这个假定在本质上仅仅为了定义条件数学期望 $\mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ $(k \geqslant 1)$ 时才需要. 这样一来, 自然会有在更一般的仅仅是条件数学期望 $\mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ 可定义、且有限 (P-a.s.) 的情形下, 来运用分解 (2) 的想法; 这种情形一般来说不满足条件 $\mathsf{E}|h_k| < \infty$.

出于这一目标, 我们回忆起, 如果 $\mathsf{E}|h_k| < \infty$, 那么条件数学期望 $\mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ 按照 Kolmogorov 的定义是这样的一个 $\mathscr{F}_{k-1}$-可测随机变量, 它对于任何 $A \in \mathscr{F}_{k-1}$ 满足条件

$$\int_A \mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) d\mathsf{P} = \int_A h_k d\mathsf{P}. \tag{13}$$

这时, 这样的随机变量的存在是由 Radon-Nikodým 定理得到的. 参见例如 [439; 第 II 章, §7].

然而, 我们察觉, 假定 $\mathsf{E}|h_k| < \infty$ 对于满足 (13) 的 $\mathscr{F}$-可测随机变量 $\mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ 的存在并非是完全必要的. 例如, 当 $h_k \geqslant 0$ (P-a.s.) 时, 这个量就可确定, 而并不要求 $\mathsf{E}h_k < \infty$.

由此就产生用下列方式来定义广义条件数学期望的想法; 这种广义条件数学期望仍然表示为 $\mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$.

把 h_k 表示为下列形式

$$h_k = h_k^+ - h_k^-,$$

其中

$$h_k^+ = \max(h_k, 0), h_k^- = -\min(h_k, 0).$$

我们将假定存在这样的版本 $\mathsf{E}(h_k^+ \mid \mathscr{F}_{k-1})(\omega)$ 和 $\mathsf{E}(h_k^- \mid \mathscr{F}_{k-1})(\omega)$, 使得对于所有 $\omega \in \Omega$ 有

$$\min\{\mathsf{E}(h_k^+ \mid \mathscr{F}_{k-1})(\omega), \mathsf{E}(h_k^- \mid \mathscr{F}_{k-1})(\omega)\} < \infty. \tag{14}$$

于是由定义, 我们令

$$\mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1})(\omega) = \mathsf{E}(h_k^+ \mid \mathscr{F}_{k-1})(\omega) - \mathsf{E}(h_k^- \mid \mathscr{F}_{k-1})(\omega), \tag{15}$$

并称 $\mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ 为广义条件数学期望.

如果 $\mathsf{E}|h_k| < \infty$, 那么广义条件数学期望显然重合于通常的条件数学期望.

在 $\mathsf{E}(|h_k| \mid \mathscr{F}_{k-1})(\omega) < \infty$ $(\omega \in \Omega)$ 的情形下, 性质 (14) 显然满足, 而 $\mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1})(\omega)$ 不仅有定义, 并且对于所有 $\omega \in \Omega$ 是有限的. 在这种情形下, 我们说, 广义条件数学期望 $\mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ 有定义, 且有限.

注. 依照概率论的一般精神, 所考察的满足这样那样的性质照例不是 "对于每个 $\omega \in \Omega$" 成立, 而是仅仅 "对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$" 成立; 上面给出的广义条件数学期望容易改写为 "对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$" 的文本, 它只需要在性质 (14) 不成立的零概率集合上用任意方式再定义 $\mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1})(\omega)$.

现在转向表示式 (2). (2) 的右端明显有定义, 只要 $\mathsf{E}(|h_k| \mid \mathscr{F}_{k-1}) < \infty$, $k \geqslant 1$ (对于所有 $\omega \in \Omega$ 或对于几乎所有 $\omega \in \Omega$). 在这种情形下, 我们将说, (2) 是序列 $H = (H_n)_{n \geqslant 1}$ 的广义 *Doob* 分解.

5. 还余下 ("通常的" 或广义的) 条件数学期望 $\mathsf{E}(h_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ 没有定义 的情形下的对应分解 (或者正如以后所说的表示).

在这种情形下, 例如可以如下面那样来做.

把量 h_k 表示为下列形式:

$$h_k = h_k I(|h_k| \leqslant a) + h_k I(|h_k| > a),$$

其中 a 是某个常数; 通常假定 $a = 1$.

量 $h_k I(|h_k| < a)$ 已经有绝对一阶矩, 因而,

$$\begin{aligned} H_n^{(\leqslant a)} &\equiv \sum_{1\leqslant k\leqslant n} h_k I(|h_k| \leqslant a) \\ &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \mathsf{E}(h_k I(|h_k| \leqslant a) \,|\, \mathscr{F}_{k-1}) \\ &\quad + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} [h_k I(|h_k| \leqslant a) - \mathsf{E}(h_k I(|h_k| \leqslant a) \,|\, \mathscr{F}_{k-1})] \\ &(= A_n^{(\leqslant a)} + M_n^{(\leqslant a)}). \end{aligned} \tag{16}$$

这样一来,

$$H_n = A_n^{(\leqslant a)} + M_n^{(\leqslant a)} + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} h_k I(|h_k| > a), \tag{17}$$

其中 $(A_n^{(\leqslant a)})_{n\leqslant 1}$ 是可料序列, $(M_n^{(\leqslant a)})_{n\geqslant 1}$ 是鞅, 而 $\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} h_k I(|h_k| > a)\right)_{n\geqslant 1}$ 是 "大" 跳跃序列.

依照 "随机过程一般理论" 中所采取的术语 (参见第三章中的第 5 节和 [250; 第 I 章, §4c]), 表示式 (17) 将称为 H 的*典则表示*.

注意, 如果除了 (16) 以外, 还有 H 的另一个表示形式

$$H_n = A'_n + M'_n + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} h_k I(|h_k| > a), \tag{18}$$

其中 (A'_n) 是可料序列以及 (M'_n) 是鞅, 那么必定有 $A'_n = A_n^{(\leqslant a)}$, $M'_n = M_n^{(\leqslant a)}$.

换句话说, 形为 (18) 的表示式是*唯一的*, 且重合于 (17); 这就说明了为什么这个表示式称为*典则表示*.

§1c. 局部鞅, 鞅变换, 广义鞅

1. 在上面引入的序列 $H = (H_n)$ 的基于 Doob 分解 (5) 及其推广的分析中, "*鞅性*" 和 "*可料性*" 这两个概念起着关键作用, 它们相应地表现为 $H = (H_n)$ 的表示中的*鞅* $M = (M_n)$ 和可料序列 $A = (A_n)$.

这也决定了今后引进的随机分析经常称为 "鞅演算" 或者 "随机演算"; 这种分析是在渗透概率空间中进行的, 它与 (通常的) 概率空间的不同在于配备了特殊结构, 即 σ-代数流 $(\mathscr{F}_n)$. 也就是说, 具有 "渗透" $(\mathscr{F}_n)$ 这种结构, 就能联系诸如停时、鞅、可料性、下鞅、上鞅、半鞅等等概念.

在现代的随机演算中, 最重要的大概不是鞅的概念, 而是*局部鞅*的概念. 引人注目的是这样的情况: 尽管局部鞅类比鞅类更广, 它还是保留了后者的许多重要性质. 我们给出一系列定义.

设 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ $(n \geqslant 0)$ 是随机基底, 即带离散时间的渗透概率空间.

定义 1. 给定在随机基底上的随机变量序列 $X = (X_n)$ 称为随机序列[①], 是指对于每个 $n \geqslant 0$, 量 X_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测.

为了强调这一可测性性质, 随机序列记为这样的形式: $X = (X_n, \mathscr{F}_n)$, 即, 把随机变量 X_n 其上可测的 σ-代数 $\mathscr{F}_n$ 也包括在记号内.

定义 2. 随机序列

$$X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$$

是

鞅,
上鞅,
下鞅,

是指 $\mathsf{E}|X_n| < \infty$ 对每个 $n \geqslant 0$ 成立, 且对于所有 $n \geqslant 1$, 相应地有 (P-a.s.)

$$\mathsf{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = X_{n-1},$$
$$\mathsf{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \leqslant X_{n-1},$$
$$\mathsf{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \geqslant X_{n-1}.$$

很明显, 对于鞅来说, 数学期望 $\mathsf{E}X_n = \mathrm{Const}\,(= EX_0)$, 对于上鞅来说, 它们不增 $(\mathsf{E}X_n \leqslant \mathsf{E}X_{n-1})$, 对于下鞅来说, 它们不减 $(\mathsf{E}X_n \geqslant \mathsf{E}X_{n-1})$.

鞅的经典例子是 "*Lévy* 鞅" $X = (X_n)$, 其中 $X_n = \mathsf{E}(\xi \mid \mathscr{F}_n)$, 而 ξ 是 $\mathscr{F}$-可测随机变量, 且 $\mathsf{E}|\xi| < \infty$.

这个鞅是一致可积的, 即随机变量族 $\{X_n\}$ 一致可积:

$$\sup_n \mathsf{E}(|X_n| I(|X_n| > C)) \to 0, \qquad C \to \infty.$$

以后我们将以 $\mathscr{M}_{\mathrm{UI}}$ 表示所有一致可积鞅的类 (UI 来自 Uniformly Integrable). 所有鞅的类将表示为 $\mathscr{M}$.

在所考察的鞅仅对于 $n \leqslant N < \infty$ 来定义时, 鞅和一致可积鞅的概念显然是重合的 $(\mathscr{M} = \mathscr{M}_{\mathrm{UI}}.)$

如果有时需要强调是关于哪个测度 P 和哪个流 $(\mathscr{F}_n)$ 来考察 "鞅性" 性质, 那么对于 $\mathscr{M}_{\mathrm{UI}}$ 和 $\mathscr{M}$ 还运用记号 $\mathscr{M}_{\mathrm{UI}}(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$ 和 $\mathscr{M}(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$.

[①]这里的 "随机序列" 是 stochastic sequence 的中译, 它要求 X_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测. 这是本书作者的术语习惯. 在其他的有关文献中 (例如, [110], [266]), 对这里所说的 "随机序列" 常称为 "适应序列 (adapted sequence)". 在中文中, "随机序列" 常被理解为一般的随机变量所形成的序列. 读者应对此引起注意. —— 译者注

定义 3. 我们称满足 $\mathsf{E}|x_n| < \infty$ 的随机序列 $x = (x_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 为鞅差, 是指 ($\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$)

$$\mathsf{E}(x_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0 \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \qquad n \geqslant 1.$$

很明显, 对于这样的序列 $x = (x_n)$, 对应的 "和" 序列 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)$, $X_n = X_0 + x_1 + \cdots + x_n$ 形成鞅. 相反, 与每个鞅 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)$ 相联系的是鞅差 $x = (x_n, \mathscr{F}_n)$, $x_n = \Delta X_n$, 其中对于 $n \geqslant 1$, $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$, 对于 $n = 0$, $\Delta X_0 = X_0$.

定义 4. 我们称随机序列 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)$ 为局部鞅 (下鞅, 上鞅), 是指可求得这样 (局部化) Markov 时刻序列 $(\tau_k)_{k\geqslant 1}$ (即, $\{\omega\colon \tau_k \leqslant n\} \in \mathscr{F}_n$, $n \geqslant 0$; 也参见以后在 §1f 中的定义 1), 使得 $\tau_k \leqslant \tau_{k+1}$ (P-a.s.), $\tau_k \to \infty$, 并且每个 "停止" 序列

$$X^{\tau_k} = (X_{\tau_k \wedge n}, \mathscr{F}_n)$$

是鞅 (下鞅, 上鞅).

注 1. 在局部鞅的定义中, 经常还要求序列 X^{τ_k} 对于每个 $k \geqslant 1$ 不仅是鞅, 并且还是一致可积鞅 (参见例如, [250]).

还要注意的是, 有时还要考察 "初始" 随机变量 X_0 不可积的序列 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)$; 这时, 停止序列 X^{τ_k} 的定义略有不同:

$$X^{\tau_k} = (X_{\tau_k \wedge n} I(\tau_k > 0), \mathscr{F}_n).$$

对于局部鞅类运用记号 $\mathscr{M}_{\text{loc}}$ 或 $\mathscr{M}_{\text{loc}}(\mathsf{P}, (\mathscr{F}_n))$.

由定义 4 可得, 每个鞅是局部鞅, 从而,

$$\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}_{\text{loc}}.$$

如果 $X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$, 并且随机变量族

$$\Sigma = \{X_\tau\colon \tau \text{ 是有限停时}\}$$

一致可积 $\left(\text{即} \sup\limits_{X_\tau \in \Sigma} \mathsf{E}\{|X_\tau| I(|X_\tau| \geqslant C)\} \to 0,\ C \to \infty\right)$, 那么 X 是鞅 ($X \in \mathscr{M}$), 并且还是 Lévy 鞅: 存在可积 $\mathscr{F}$-可测随机变量 X_∞, 使得 $X_n = \mathsf{E}(X_\infty \,|\, \mathscr{F}_n)$. 尤其是, 在这种情形下, $X \in \mathscr{M}_{\text{UI}}$. (详情参见 [250; 第 I 章 §1e] 或 [439; 第 VII 章 §4.)

定义 5. 我们称随机序列 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是广义鞅 (下鞅, 上鞅), 是指 $\mathsf{E}|X_0| < \infty$, 对于每个 $n \geqslant 1$ 广义条件数学期望 $\mathsf{E}(X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1})$ 有定义, 且满足条件

$$\mathsf{E}(X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = X_{n-1} \qquad (\mathsf{P}\text{-a.s.})$$

(相应地, 满足条件 $\mathsf{E}(X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) \geqslant X_{n-1}$, $\mathsf{E}(X_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) \leqslant X_{n-1}$).

注 2. 由广义数学期望 $\mathsf{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ 的定义 (参见 §1b) 和 "鞅" 等式 $\mathsf{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ 自动得到 $\mathsf{E}(|X_n| \mid \mathscr{F}_{n-1}) < \infty$ (P-a.s.). 换句话说, 条件数学期望 $\mathsf{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ 不仅有定义, 并且还是有限的. 这样一来, 在定义 5 中立即可假定 $\mathsf{E}(|X_n| \mid \mathscr{F}_{n-1}) < \infty$ (P-a.s.), $n \geqslant 0$.

定义 6. 我们称随机序列 $x = (x_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 为广义鞅差 (下鞅差, 上鞅差), 是指对于每个 $n \geqslant 1$, 广义条件数学期望 $\mathsf{E}(x_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ 有定义, 并且满足条件

$$\mathsf{E}(x_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0 \qquad (\text{P-a.s.})$$

(相应地, 满足条件 $\mathsf{E}(x_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \geqslant 0$, $\mathsf{E}(x_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \leqslant 0$ (P-a.s.)).

注 3. 正如在上一注中那样, 在广义鞅差的定义中, 可立即要求满足条件

$$\mathsf{E}(|x_n| \mid \mathscr{F}_{n-1}) < \infty \quad (\text{P-a.s.}), \quad n \geqslant 1.$$

定义 7. 设 $M = (M_n, \mathscr{F}_n)$ 是随机序列, $Y = (Y_n, \mathscr{F}_{n-1})$ 为可料序列 (Y_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, $n \geqslant 1$, 而 Y_0 为 $\mathscr{F}_0$ 可测).

随机序列

$$Y \cdot M = ((Y \cdot M)_n, \mathscr{F}_n)$$

称为 M 借助于 Y 的变换, 这里

$$(Y \cdot M)_n = Y_0 \cdot M_0 + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} Y_k \Delta M_k.$$

如果与此同时 M 是鞅, 那么 $X = Y \cdot M$ 称为 (鞅 M 借助于 (可料) 序列 Y 的) 鞅变换.

下列定理是在离散时间情形下建立了定义 4, 5 和 7 中所引入的对象之间的血缘关系.

定理. 设 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是随机序列, $\mathsf{E}|X_0| < \infty$. 下列条件是等价的:

(a) X 是局部鞅 (记为 $X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$);
(b) X 是广义鞅 (记为 $X \in G\mathscr{M}$);
(c) X 是鞅变换 (记为 $X \in \mathscr{M}T$), 即 $X = Y \cdot M$ 对于某个可料序列 $Y = (Y_n, \mathscr{F}_{n-1})$ 和某个鞅 $M = (M_n, \mathscr{F}_n)$ 成立.

证明. (c)⇒(a). 设 $X \in \mathscr{M}T$, 且

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta M_k, \tag{1}$$

其中 Y 是可料序列, 而 M 是鞅. 如果 $|Y_k| \leqslant C$, $k \geqslant 1$, 那么 X 显然是鞅.

在相反的情形下, 假定 $\tau_j = \inf\{n-1\colon |Y_n| > j\}$. 由于 Y_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 故 τ_j 是停时, $\tau_j \uparrow \infty$, $j \to \infty$, 并且 "停止" 序列 X_j^τ 仍然有形式 (1), 且带限制 $Y_k^{\tau_j} = Y_k I\{k \leqslant \tau_j\}$. 因此, $X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$.

(a)⇒(b). 设 $X \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$, (τ_k) 是它的局部化序列. 于是 $\mathsf{E}|X_n^{\tau_k}| < \infty$ 以及 $\mathsf{E}(|X_{n+1}| \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathsf{E}(|X_{n+1}^{\tau_k}| \,|\, \mathscr{F}_n)$ 在集合 $\{\tau_k > n\} \in \mathscr{F}_n$ 上成立. 因此, $\mathsf{E}(|X_{n+1}| \,|\, \mathscr{F}_n) < \infty$ (P-a.s.).

在这同样的集合 $\{\tau_k > n\}$ 上, 类似地有

$$\mathsf{E}(X_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathsf{E}(X_{n+1}^{\tau_k} \,|\, \mathscr{F}_n) = X_n^{\tau_k} = X_n.$$

从而, $X \in G\mathscr{M}$.

(b)⇒(c). 设 $X \in G\mathscr{M}$. 令

$$A_n(k) = \{\omega\colon \mathsf{E}(|X_{n+1}| \,|\, \mathscr{F}_n) \in [k, k+1)\}.$$

于是

$$u_n = \sum_{k \geqslant 0} (k+1)^{-3} \Delta X_n I_{A_{n-1}(k)}$$

为 $\mathscr{F}_n$-可测可积随机变量, 且 $\mathsf{E}(u_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0$. 因此, $M_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ 是鞅 (令 $M_0 = 0$) 以及 (1) 对于 $Y = (Y_n)$ 满足, 其中

$$Y_n = \sum_{k \geqslant 0} (k+1)^3 I_{A_{n-1}(k)}.$$

这样一来, $X \in \mathscr{M}T$.

2. 局部鞅、鞅变换和广义鞅概念在金融数学中的重要性将在第五章中充分阐述. 这些概念也在随机分析中起着重要作用; 对此例如可通过下列方式来证实.

设 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$ 是带局部化序列 (τ_k) 的局部下鞅, 其中 $\tau_k > 0$ (P-a.s.). 于是对于每个 k, $X^{(\tau_k)} = (X_{n \wedge \tau_k}, \mathscr{F}_n)$ 有下列分解:

$$X_{n \wedge \tau_k} = A_n^{(\tau_k)} + M_n^{(\tau_k)},$$

其中 $(A_n^{(\tau_k)})_{n \geqslant 0}$ 是可料序列, $(M_n^{(\tau_k)})_{n \geqslant 0}$ 是鞅.

由这一 (带可料序列 $(A_n^{(\tau_k)})_{n \geqslant 0}$ 的) 分解的唯一性, 不难导得

$$A_{n \wedge \tau_k}^{(\tau_{k+1})} = A_n^{(\tau_k)}.$$

对于 $n \leqslant \tau_k$, 令 $A_n = A_n^{(\tau_k)}$, 我们看到, $(X_n - A_n)_{n \geqslant 0}$ 是局部鞅, 因为 "停止" 序列

$$(X_n^{(\tau_k)} - A_n^{(\tau_k)})_{n \geqslant 0}$$

是鞅.

这样, 如果 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是局部下鞅, 那么

$$X_n = A_n + M_n, \qquad n \geqslant 0, \tag{2}$$

其中 $A = (A_n)$ 是可料序列, $A_0 = 0$, 而 $M = (M_n)$ 是局部鞅.

应该注意, 在这一情形下, 序列 $A = (A_n)$ 递增 (确切地说, 不减); 这是因为对于 $A_n^{(\tau_k)}$ 有下列显式:

$$A_n^{(\tau_k)} = \sum_{i \leqslant n\wedge\tau_K} \mathsf{E}(\Delta X_i \,|\, \mathscr{F}_{i-1}),$$

而由下鞅性质, $\mathsf{E}(\Delta X_i \,|\, \mathscr{F}_{i-1}) \geqslant 0$.

还要注意, 带可料序列 $A = (A_n)$ 的形为 (2) 的分解是唯一的.

定义 8. 如果随机序列 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)$ 有形为 $X_n = A_n + M_n$ 的表示, 其中 $A = (A_n, \mathscr{F}_{n-1})$ 是可料序列, $M = (M_n, \mathscr{F}_n)$ 是局部鞅, 那么我们说, X 有广义 *Doob* 分解, 而序列 A 是序列 X 的补偿量 (或者可料补偿量, 或者对偶可料射影).

(术语 "补偿量" 说明, A 是对 X 的局部鞅部分所作的补偿.)

3. 作为结束, 我们引进一个简单而有益的来自 [251] 的结果, 它给出了局部鞅实际上是 (简单) 鞅的充分条件.

引理. 1) 设 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是带 $\mathsf{E}|X_0| < \infty$ 的局部鞅, 或者满足

$$\mathsf{E}X_n^- < \infty, \qquad n \geqslant 0, \tag{3}$$

或者满足

$$\mathsf{E}X_n^+ < \infty, \qquad n \geqslant 0, \tag{4}$$

那么 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅.

2) 设 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是局部鞅, $N < \infty$, $\mathsf{E}|X_0| < \infty$, 并且或者 $\mathsf{E}X_N^- < \infty$, 或者 $\mathsf{E}X_N^+ < \infty$. 那么对于所有 $n \leqslant N$ 条件 (3) 和 (4) 满足, 并且 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是鞅.

证明. 1) 我们指出, 由条件 (3) 或 (4) 中的任何一个满足都可导出另一个也满足, 也就是说, $\mathsf{E}|X_n| < \infty$, $n \geqslant 0$.

事实上, 如果比如 (3) 满足, 那么根据 Fatou 引理 [439; 第 II 章, §6]

$$\begin{aligned}\mathsf{E}X_n^+ &= \mathsf{E}\,\varliminf_k X_{n\wedge\tau_k}^+ \leqslant \varliminf_k \mathsf{E}X_{n\wedge\tau_k}^+ = \varliminf_k [\mathsf{E}X_{n\wedge\tau_k} + \mathsf{E}X_{n\wedge\tau_k}^-] \\ &= \mathsf{E}X_0 + \varliminf_k \mathsf{E}X_{n\wedge\tau_k}^- \leqslant |\mathsf{E}X_0| + \sum_{i=0}^n \mathsf{E}X_i^- < \infty.\end{aligned}$$

因此, $\mathsf{E}|X_n| < \infty$, $n \geqslant 0$.

另一方面, 由于 $|X_{(n+1)\wedge\tau_k}| \leqslant \sum_{i=0}^{n+1}|X_i|$, 其中 $\mathsf{E}\sum_{i=0}^{n+1}|X_i| < \infty$, 故根据 Lebesgue 控制收敛定理 [439; 第 II 章, §6 和 7], 在关系式

$$\mathsf{E}(X_{\tau_k\wedge(n+1)}I(\tau_k > 0)\,|\,\mathscr{F}_n) = X_{\tau_k\wedge n}$$

中对 $k\to\infty$ 求极限, 结果得到 $\mathsf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n) = X_n$, $n\geqslant 0$.

2) 我们察觉, 如果 $\mathsf{E}X_N^- < \infty$, 那么这时也有 $\mathsf{E}X_n^- < \infty$, $n\leqslant N$. 事实上, 由于局部鞅是广义鞅, 那么, 这就是说, $X_n = \mathsf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n)$, 由此得到 $X_n^- \leqslant \mathsf{E}(X_{n+1}^-\,|\,\mathscr{F}_n)$, 因而也有 $\mathsf{E}X_n^- \leqslant \mathsf{E}X_{n+1}^- \leqslant \mathsf{E}X_N^-$ 对于所有 $n\leqslant N-1$ 成立.

这样, 由 1) 得到, $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ 是鞅.

$\mathsf{E}X_N^+ < \infty$ 的情形可类似讨论.

引理得证.

推论. *每个下有界 ($\inf_n X_n(\omega) \geqslant C > -\infty$, P-a.s.) 或上有界 ($\sup_n X_n(\omega) \leqslant C < \infty$, P-a.s.) 的局部鞅 $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ 是鞅.*

4. 有意思的是把已证明的引理的断言与对于连续时间情形下的相应结果相比较.

如果 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 是带不减 σ-代数族 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ ($\mathscr{F}_s\subseteq\mathscr{F}_t\subseteq\mathscr{F}$, $s\leqslant t$) 的渗透概率空间, 那么随机过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为鞅 (上鞅或下鞅), 是指 X_t 为 $\mathscr{F}_t$-可测, $\mathsf{E}|X_t| < \infty$, $t\geqslant 0$, 且 $\mathsf{E}(X_t\,|\,\mathscr{F}_s) = X_s$ ($\mathsf{E}(X_t\,|\,\mathscr{F}_s) \leqslant X_s$ 或 $\mathsf{E}(X_t\,|\,\mathscr{F}_s) \geqslant X_s$), $s\leqslant t$.

过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为局部鞅, 是指可求得不减的停时序列 (τ_k), $\tau_k\uparrow\infty$ (P-a.s.), 使得对每个 k, $X^{\tau_k} = (X_{t\wedge\tau_k}I(\tau_k > 0), \mathscr{F}_t)$ 所形成的 "停止" 过程是一致可积鞅.

与基于应用 Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理 [439; 第 II 章, §6 和 7] 来证明引理一样的讨论, 使得我们能证明下列断言成立.

I. 每个满足

$$\mathsf{E}\sup_{s\leqslant t} X_s^- < \infty, \qquad t\geqslant 0,$$

的局部鞅 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是上鞅.

II. 每个满足

$$\mathsf{E}\sup_{s\leqslant t}|X_s| < \infty, \qquad t\geqslant 0,$$

的局部鞅 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是鞅.

III. 每个满足①

$$\mathsf{E}\sup_{s<\infty}|X_s| < \infty,$$

的局部鞅 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是一致可积鞅.

①原文中下式多了一项 "$t\geqslant 0$". —— 译者注

这里有益的是要注意到, 在离散情形下, 由 $\mathsf{E}X_n^- < \infty, n \leqslant N$, 可得出 $\mathsf{E}\max_{n\leqslant N} X_n^- < \infty$. 在连续情形下, 由 $\mathsf{E}X_t^- < \infty$, $t \leqslant T$, 一般来说, 不能得到 $\mathsf{E}\sup_{t\leqslant T} X_t^- < \infty$. 这一情况在本质上也是上述引理中的结果不能自动转换到连续时间情形的主要原因.

还要注意到, 在断言 I 中, 局部鞅实际上可能是 "真正的" 上鞅, 即, 它不是鞅. 下面是一个众所周知的例子.

例. 设 $B = (B_t^1, B_t^2, B_t^3)_{t\geqslant 0}$ 是三维布朗运动,

$$R_t = \sqrt{(B_t^1)^2 + (B_t^2)^2 + (B_t^3)^2}, \quad R_0 = \sqrt{(B_0^1)^2 + (B_0^2)^2 + (B_0^3)^2} = 1.$$

已知, 这一所谓三阶 *Bessel* 过程 有随机微分

$$dR_t = \frac{dt}{R_t} + d\beta_t, \qquad R_0 = 1,$$

其中 $\beta = (\beta_t)_{t\geqslant 0}$ 是某个标准布朗运动 (参见第三章 §3a, 以及例如, [402]).

根据 Itô 公式 (参见第三章 §3d, 也参见 [250], [402])

$$df(R_t) = f'(R_t)dR_t + \frac{1}{2}f''(R_t)dt,$$

对于这里的 $f(R_t) = 1/R_t$ 运用它是合理的, 因为对于有 $R_0 = 1$ 的三维 Bessel 过程 R 来说, 零值是不可达的; 由此我们求得

$$d\left(\frac{1}{R_t}\right) = -\frac{d\beta_t}{R_t^2},$$

或者写成积分形式

$$\frac{1}{R_t} = 1 - \int_0^t \frac{d\beta_s}{R_s^2}.$$

随机积分 $\left(\int_0^t \frac{d\beta_s}{R_s^2}\right)_{t\geqslant 0}$ 是局部鞅 (参见 [402]), 也就是说, 有 $X_0 = 1$, $X_t = \dfrac{1}{R_t}$ 的过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是局部鞅, 而不是鞅.

事实上, 由布朗运动 B^1, B^2, B^3 的自相似性 (也参见以后的第三章中的 §3a) 可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}X_t &= \mathsf{E}\frac{1}{\sqrt{1 + (B_t^1 - B_0^1)^2 + (B_t^2 - B_0^2)^2 + (B_t^3 - B_0^3)^2}} \\ &= \mathsf{E}\frac{1}{\sqrt{1 + t(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)}} \downarrow 0, \qquad t \to \infty,\end{aligned}$$

其中 ξ_i, $i = 1, 2, 3$, 是独立标准正态分布随机变量, $\xi_i \sim \mathscr{N}(0, 1)$.

在 "鞅" 的情形下, 数学期望 $\mathsf{E}X_t$ 必定是常数.

§1d. 高斯模型和条件高斯模型

1. 有效市场概念基于 (规范) 价格的鞅假设, 这使得在把价格演变的动态变化看作其分布有确定性质的随机序列或随机过程的研究中, 鞅的概念成为基本概念之一. 然而, 在进行具体计算时, 仅仅知道 "分布的鞅性" 是远远不够的, 必须要有这些分布的更为 "精细" 的结构; 而为得到这种结构人们必须细致地考察各种各样的概率统计模型, 以使得由此得到的分布性质更好地与根据统计数据构造的经验分布性质相协调. 本章后面的所有内容在实质上都正是为了达到这一目的; 其中提出各种模型可用来解释在分析 "统计原料" (特别是由金融时间序列所形成的 "统计原料") 时所显示的这样那样的性质.

对随机变量 $h_1, \cdots, h_n$ 的分布 $\mathrm{Law}(h_1, \cdots, h_n)$ 作高斯性假定, 从理论分析的视角和从发展成熟的 "正态分布统计" 的视角来看, 当然是最吸引人的. 但是, 正如上面所注意到, 已经证实 (并且确认), 许多金融时间序列数据的统计处理指出, 高斯性假定并非总是适当地反映价格性态的真实图景.

如果试图寻求序列 $h = (h_n)_{n \leqslant 1}$ 的无条件分布 $\mathrm{Law}(h_1, \cdots, h_n)$ 的高斯性假定的替代物, 那么考虑通过引进条件数学期望 $\mathsf{E}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ 来决定的 "Doob 分解" 的形式, 完全自然的是提出这样的想法: 假设不是无条件概率分布, 而是条件概率分布 $\mathrm{Law}(h_n, \mathscr{F}_{n-1})$ 是高斯分布:

$$\mathrm{Law}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mathscr{N}(\mu_n, \sigma_n^2), \tag{1}$$

其中 $\mu_n = \mu(\omega)$ 和 $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(\omega)$ 是某些 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测随机变量.[1)]

确切地说, (1) 意味着 (正则) 条件分布 $\mathsf{P}(h_n \leqslant x \mid \mathscr{F}_{n-1})$ 由下式给定 (对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 和 $\omega \in \Omega$)

$$\mathsf{P}(h_n \leqslant x \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-\mu_n(\omega))^2}{2\sigma_n^2(\omega)}} dy.$$

由这个条件分布的正则性得出 (参见 [439; 第 II 章 §7]), $\mathsf{E}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega)$ 可用通常的积分来求得 (对于每个固定的 $\omega \in \Omega$):

$$\mathsf{E}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x d\mathsf{P}(h_n \leqslant x \mid \mathscr{F}_{n-1})(\omega),$$

而在所考察的情形下, 导得公式

$$\mathsf{E}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mu_n. \tag{2}$$

---

1)避免讨论要求专门解释的平凡情形, 我们将在以后处处假定对于所有 n 和 ω, 量 $\sigma_n(\omega) \neq 0$.

类似地有

$$\mathsf{D}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \sigma_n^2. \tag{3}$$

这样一来, "参数" μ_n 和 σ_n^2 有简单的 "传统" 意义: (条件) 分布 $\mathrm{Law}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ 的条件均值和条件方差.

分布 $\mathrm{Law}(h_n)$ 本身因而也是条件高斯分布 $\mathrm{Law}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ 关于量 μ_n 和 σ_n^2 的分布的平均而得的提升 (或混合).

注意, 由带有 "随机" 参数 $\mu = \mu(\omega)$, $\sigma = \sigma(\omega)$ 的正态分布 $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ 的 "提升" 是非常广的. 这种分布的各种特殊情形我们将在以后多次遇到.

除了联系序列 $h = (h_n)$ 以外, 还可独立引入 $\mathscr{F}_n$-可测随机变量的 "标准" 条件高斯序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\leqslant 1}$, 使得

$$\mathrm{Law}(\varepsilon_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mathscr{N}(0,1), \quad 其中 \quad \mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}.$$

很明显, 这个序列是鞅差, 因为 $\mathsf{E}(\varepsilon_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = 0$. 尤其是, 这将是有标准正态分布 $\mathscr{N}(0,1)$ 的独立随机变量序列, 因为

$$\mathrm{Law}(\varepsilon_n | \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}) = \mathscr{N}(0,1).$$

由上面作出的假定 $\sigma_n(\omega) \neq 0$ $(n \geqslant 1, \omega \in \Omega)$, 公式 $\varepsilon_n \equiv (h_n - \mu_n)/\sigma_n$ 所确定的量 ε_n $(n \geqslant 1)$ 形成标准高斯序列. 因此, 可以认为, 所考察的 (关于流 $(\mathscr{F}_n)$ 和概率P的) 条件高斯序列可表示为

$$h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n, \tag{4}$$

其中 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 是有标准正态分布 $\mathscr{N}(0,1)$ 的独立 $\mathscr{F}_n$-可测随机变量序列. (关于序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 在一般情形 (即当 σ_n 可能为零的情形) 下的表示, 参见 [303; 第 13 章 §1].)

很明显, 序列 $h = (h_n)$, 也就是 $S = (S_n)$, 其概率性质的更细致的研究依赖于量 μ_n 和 σ_n^2 的具体结构. 在下面提出的模型中要做的也正是这一点.

我们察觉, 从序列 $h = (h_n)$ 的分布的视角来看, 并且指望它有独立的条件高斯性, 合适的是在下列框架中来讨论这一性质. 设 $(\mathscr{G}_n)$ 是 $(\mathscr{F}_n)$ 的子渗透, 即 $\mathscr{G}_n \subseteq \mathscr{F}_n$, $\mathscr{G}_n \subseteq \mathscr{G}_{n+1}$; 例如, $\mathscr{G}_n = \mathscr{F}_{n-1}$.

假定, $\mathrm{Law}(h_n \mid \mathscr{G}_n) = \mathscr{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, $\mu_n = \mathsf{E}(h_n \mid \mathscr{G}_n)$, $\sigma_n^2 = \mathsf{D}(h_n \mid \mathscr{G}_n)$. 在这一情形下, 分布 $\mathrm{Law}(h_n)$ 也是高斯分布的混合.

现在我们转向某个具体的 (线性和非线性) 高斯和条件高斯模型, 其中对于 $n \geqslant 1$ 规定值 μ_n, σ_n, 以及还必须对于 h 和 ε 给定初始条件 $(\cdots, h_{-1}, h_0)$ 和 $(\cdots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)$.

2. p **阶自回归模型** $AR(p)$. 在这一模型中, 假定

$$\mathscr{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \tag{5}$$

以及

$$\mu_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \cdots + a_p h_{n-p}, \tag{6}$$

$$\sigma_n \equiv \sigma = \text{Const} \quad (\sigma > 0). \tag{7}$$

这样一来, 这里有

$$h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \cdots + a_p h_{n-p} + \sigma \varepsilon_n.$$

序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 称为 p 阶自回归模型 (AutoRegressive model), 为定义它要求给定初值 $h_{1-p}, \cdots, h_0$. 如果这些值是常数, 那么序列 $(h_n)_{n\geqslant 1}$ 将不仅是条件高斯序列, 并且也是 (简单) 高斯序列. 在 §2b 中, 我们将对一阶 ($p=1$) 自回归模型的性质进行更详细的考察.

3. 移动平均模型 $MA(q)$**.** 在这个模型 (缩写为MA, 意味着 "Moving Average") 给定初值 $(\varepsilon_{1-q}, \cdots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)$, 并假定

$$\begin{aligned} \mu_n &= b_0 + b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \cdots + b_q \varepsilon_{n-q}, \\ \sigma_n &\equiv \sigma = \text{Const}. \end{aligned} \tag{8}$$

因此,

$$h_n = b_0 + b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \cdots + b_q \varepsilon_{n-q} + \sigma \varepsilon_n. \tag{9}$$

4. 自回归移动平均模型 $ARMA(p,q)$**.** 假定 $\mathscr{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$, 给定初值条件 $(\varepsilon_{1-q}, \cdots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)$, $(h_{1-p}, \cdots, h_{-1}, h_0)$, 并认为

$$\begin{aligned} \mu_n &= (a_0 + a_1 h_{n-1} + \cdots + a_p h_{n-p}) \\ &\qquad + (b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \cdots + b_q \varepsilon_{n-q}), \\ \sigma_n &\equiv \sigma = \text{Const}. \end{aligned} \tag{10}$$

这种 (p,q) 阶类型的模型记为$ARMA(p,q)$ (AutoRegressive Moving Average), 并称为(p,q) 阶自回归移动平均模型; 如果

$$\begin{aligned} h_n &= (a_0 + a_1 h_{n-1} + \cdots + a_p h_{n-p}) \\ &\qquad + (b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_{n-2} + \cdots + b_q \varepsilon_{n-q}) + \sigma \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{11}$$

这个模型就被实现.

所有这三个模型, $AR(p)$, $MA(q)$ 和$ARMA(p,q)$ 都是线性高斯模型 (如果 "初值" 条件比如是常数).

现在我们转向某些有意义的条件高斯模型, 与上面不同的是, 它们是非线性的.

5. 自回归条件异方差模型$ARCH(p)$. 再次假定, 序列 $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 是 (唯一的) 随机源, $\mathscr{F}_n=\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$,

$$\mu_n=\mathsf{E}(h_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=0, \tag{12}$$

$$\sigma_n^2=\mathsf{E}(h_n^2\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i h_{n-i}^2, \tag{13}$$

其中 $\alpha_0>0$, $\alpha_i\geqslant 0$, $i=1,\cdots,p$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$, 以及 $h_{1-p},\cdots,h_0$ 是给定的初始常数.

换句话说, 条件方差 σ_n^2 是值 $h_{n-1}^2,\cdots,h_{n-p}^2$ 的函数.

这个模型, 正如已经在第一章 §2e 中所注意到, 是 1982 年 R. F. Engle [140] 所提出的, 它称为$ARCH(p)$ (AutoRegressive Conditional Heteroskedastic model, 自回归条件异方差模型); 这种模型用来解释金融时间序列的许多非平凡性质 (例如, 量 h_n 的值的聚集性) 非常合适.

这样,

$$h_n=\sigma_n\varepsilon_n,\qquad n\geqslant 1, \tag{14}$$

其中 $\varepsilon=(\varepsilon_n)$ 是独立正态分布随机变量序列. $\varepsilon_n\sim\mathscr{N}(0,1)$, 而 σ_n^2 由公式 (13) 来确定.

如果我们以

$$\mu_n=a_0+a_1h_{n-1}+\cdots+a_rh_{n-r} \tag{15}$$

取代 (12), 而 σ_n^2 满足条件 (13), 那么 (4) 取下列形式:

$$h_n=a_0+a_1h_{n-1}+\cdots+a_rh_{n-r}+\sigma_n\varepsilon_n. \tag{16}$$

这些模型有时记作 $AR(r)/ARCH(p)$.

令 (认为 $\mathsf{E}h_n^2<\infty$)

$$\nu_n=h_n^2-\sigma_n^2. \tag{17}$$

那么由 (13),

$$h_n^2=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i h_{n-i}^2+\nu_n, \tag{18}$$

其中

$$\mathsf{E}(\nu_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1})=\mathsf{E}(h_n^2\,|\,\mathscr{F}_{n-1})-\sigma_n^2=0,$$

即, 序列 $\nu=(\nu_n)$ 形成鞅差.

这样一来, $ARCH(p)$ 模型可看作序列 (h_n^2) 带有鞅差 "噪声" $\nu=(\nu_n)$ 的自回归模型$AR(p)$.

6. 广义自回归异方差模型$GARCH(p,q)$. $ARCH(p)$ 模型应用的成功导致它的各种推广、细化、修正等等的出现.

下面介绍的$GARCH(p,q)$ (Generalized $ARCH$, 广义自回归条件异方差模型) 由 T. Bollerslev [48] 于 1986 年引入; 它是诸如此类的推广之一.

与前面一样, 认为

$$\mu_n = \mathsf{E}(h_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}) = 0,$$

取代 (13), 我们将假定

$$\sigma_n^2 = \mathsf{E}(h_n^2 \,|\, \mathscr{F} + n - 1) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{n-j}^2, \tag{19}$$

其中 $\alpha_0 > 0, \alpha_j, \beta_j \geqslant 0$, 并且为了简单起见, "初始" 条件 $(h_{1-p}, \cdots, h_0)$ 和 $(\sigma_{1-q}^2, \cdots, \sigma_0^2)$ 可认为是常数.

$GARCH(p,q)$ 模型就是序列 $h = (h_n)$,

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \tag{20}$$

其中 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots,)$ 是独立同分布 $\mathscr{N}(0,1)$ 随机变量序列, 而 σ_n^2 满足关系式 (19).

我们将记

$$\alpha(L) h_{n-1}^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{n-i}^2, \tag{21}$$

其中 L 是位移算子 ($L^i h_{n-1}^2 = h_{(n-1)-i}^2$; 参见后面 §2a 中的第 2 点), 以及

$$\beta(L) \sigma_{n-1}^2 = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{n-j}^2. \tag{22}$$

在这样的记号下,

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha(L) h_{n-1}^2 + \beta(L) \sigma_{n-1}^2.$$

如果与上面一样, 令 $\nu_n = h_n^2 - \sigma_n^2$, 那么我们得到

$$\begin{aligned} h_n^2 &= \nu_n + \sigma_n^2 = \nu_n + \alpha_0 + \alpha(L) h_{n-1}^2 + \beta(L)(h_{n-1}^2 - \nu_{n-1}) \\ &= \alpha_0 + (\alpha(L) + \beta(L)) h_{n-1}^2 - \beta(L) \nu_{n-1} + \nu_n. \end{aligned}$$

换句话说,

$$h_n^2 = \alpha_0 + (\alpha(L) + \beta(L)) h_{n-1}^2 + \nu_n - \beta(L) \nu_{n-1}. \tag{23}$$

这样一来, $GARCH(p,q)$ 模型可看作自回归移动平均模型 $ARMA(\max(p,q), q)$, 其中序列 (h_n^2) 带有鞅差 "噪声" (ν_n).

尤其是, 对于

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \qquad \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2$$

的模型$ARCH(1)$, 令 $\nu_n \equiv h_n^2 - \sigma_n^2$, 我们求得

$$h_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \nu_n,$$

其中 "噪声" (ν_n) 形成鞅差.

ARCH 模型和*GARCH* 模型的各种推广 (诸如*EGARCH, AGARCH, STARCH, NARCH, MARCH, HARCH,* 等等) 最终都联系着量 $\sigma_n^2 = \mathsf{E}(h_n^2 \,|\, \mathscr{F}_{n-1})$ 作为关于 σ-代数 $\mathscr{F}_{n-1} = \sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1})$ 的可测函数的这样那样的规定.

7. 随机波动率模型. 在所有上述模型中, 随机源只有一个. 它是通过独立高斯随机变量序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 来给定的. 随机波动率模型包含两个随机源: $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 和 $\delta = (\delta_n)$, 它们在最简单的情形下都假定为独立标准高斯序列, 即由独立 $\mathscr{N}(0,1)$ 分布随机变量所组成的序列.

设 $\mathscr{G}_n = \sigma(\delta_1, \cdots, \delta_n)$. 令

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \tag{24}$$

其中 σ_n 为 $\mathscr{G}_n$-可测.

于是很明显,

$$\mathrm{Law}(h_n \,|\, \mathscr{G}_n) = \mathscr{N}(0, \sigma_n^2), \tag{25}$$

即, h_n 的 $\mathscr{G}_n$-条件分布是带参数 0 和 σ_n^2 的高斯分布.

令

$$\sigma_n = e^{\frac{1}{2}\Delta_n}. \tag{26}$$

那么 $\sigma_n^2 = e^{\Delta_n}$, 其中 Δ_n 为 $\mathscr{G}_n$-可测. 相当流行的模型是其中序列 (Δ_n) 为自回归模型, $(\Delta_n) \in AR(p)$,

$$\Delta_n = a_0 + a_1 \Delta_{n-1} + \cdots + a_p \Delta_{n-p} + c\delta_n.$$

(24) 的自然推广是其中

$$h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n \tag{27}$$

的模式, 这里 μ_n 和 σ_n 为 $\mathscr{G}_n$-可测.

当 (27) 中的序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 形成 $\mathsf{E}\varepsilon_n = 0$, $\mathsf{E}\varepsilon_n^2 = 1$ 的正态分布平稳序列, 而 $\sigma = (\sigma_n)$ 不依赖于 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 时, 在这种情形下, 对应的模型就是所谓 "*Taylor* 模型".

我们在这里结束金融数学和金融工程中所应用的一系列高斯模型和条件高斯模型的简短讨论. 这些模型的性质的更为详细的研究将在以后的第 2 和第 3 节进行.

§1e. 价格演变的二叉树模型

1. 在概率论中, *Bernoulli* 模式起着独特的作用; 它就是由只取比如 1 和 0 两个值的独立同分布随机变量所构成的序列:

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots),$$

这里假定取 1 和 0 的概率分别是 p 和 q, $p+q=1$.

第一个概率论的极限定理: 大数定律, 就是对于这种模式来得到的 (J. Bernoulli, "Ars Conjectandi (猜度术)", 1713 年); 这一定律断言, 对于每个 $\varepsilon > 0$,

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

其中 $\dfrac{S_n}{n}\left(= \dfrac{\delta_1 + \cdots + \delta_n}{n}\right)$ 是在 $\delta_1, \cdots, \delta_n$ 中出现 "1" 的频率.

正是对于这个模式建立了概率论的许多引人注目的结果 (*de Moivre-Laplace* 极限定理, 强大数定律, 重叠对数定律, 反正弦定律等等); 它们都正如它们所显示的, 有着极为广阔的应用领域.

在这一意义下, 下面引入的*Cox-Ross-Rubinstein* 二叉树模型 ([82]) 在金融数学和金融工程中所起的作用类似于 Bernoulli 模式在经典概率论中的作用; 利用这一非常简单的模型, 有可能对许多诸如期权的公平价格、对冲策略等等金融特征作完全计算 (参见后面的第六章).

2. 我们将认为所有金融运作都在由银行账户 $B = (B_n)_{n\geqslant 0}$ 和价格为 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 的股票所构成的 (B,S)-市场中进行.

我们把 B 和 S 的演变表示为下列形式:

$$B_n = (1+r_n)B_{n-1}, \tag{1}$$

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}; \tag{2}$$

或者等价地表示为

$$\Delta B_n = r_n B_{n-1},$$

$$\Delta S_n = \rho_n S_{n-1},$$

且 $B_0 > 0$, $S_0 > 0$.

银行账户与股票的主要不同在于 ("银行" 利率)

$$r_n \text{ 为 } \mathscr{F}_{n-1}\text{-可测},$$

而 (股票的 "市场" 收益率)

$$\rho_n \text{ 为 } \mathscr{F}_n\text{-可测},$$

其中 $(\mathscr{F}_n)$ 是给定的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的渗透 (信息流).

在 *Cox-Ross-Rubinstein*-(B, S)-市场的二叉树模型 ("CRR-模型") 中, 假定

$$r_n \equiv r = \text{Const}$$

以及 $\rho = (\rho_n)_{n\geqslant 1}$ 是取两个值的独立同分布随机变量 $\rho_1, \rho_2, \cdots$ 的 Bernoulli 序列, 其中

$$\rho_n = \begin{cases} b, \\ a, \end{cases} \qquad a < b.$$

把 ρ_n 记作下列形式:

$$\rho_n = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\varepsilon_n \tag{3}$$

或者

$$\rho_n = a + (b-a)\delta_n, \tag{4}$$

我们求得

$$\rho_n = \begin{cases} b \\ a \end{cases} \Longleftrightarrow \varepsilon_n = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \delta_n = \begin{cases} +1 \\ 0 \end{cases}.$$

作出假设 $r_n \equiv \text{Const}$, 而 ρ_n 只取两个值, 使得我们从一开始就可认为出发的概率空间 Ω 是二值序列空间 Ω:

$$\Omega = \{a, b\}^\infty \text{ 或 } \Omega = \{-1, 1\}^\infty, \text{ 或 } \Omega = \{0, 1\}^\infty.$$

由 (2) 得到,

$$S_n = S_0 \prod_{k\leqslant n}(1+\rho_k). \tag{5}$$

把这个表达式与 §1a 中的 (5) 相比较, 我们看到, ρ_k 重合于上面引入的量 $\widehat{h}_k$. 显然, S_n 也可表示为下列形式:

$$S_n = S_0 e^{H_n} = S_0 e^{h_1+\cdots+h_n},$$

其中 $h_n = \ln(1+\rho_k)$. 比较 §1a 中的公式 (1) 和 (10).

3. 我们讨论一个特殊情形, 其中值 a 和 b 取为:

$$a = \lambda^{-1} - 1, \qquad b = \lambda - 1,$$

这里 $\lambda > 1$.

在这样的情形下,

$$S_n = \begin{cases} \lambda S_{n-1}, & \text{当 } \rho_n = b, \\ \lambda^{-1} S_{n-1}, & \text{当 } \rho_n = a. \end{cases} \tag{6}$$

如果定义 (3) 中的 $\varepsilon_n(=\pm 1)$, 那么 S_n 可表示为下列形式

$$S_n = S_0\lambda^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n} \tag{7}$$

或者, 同样有

$$S_n = S_0 e^{h_1+\cdots+h_n}, \tag{8}$$

其中 $h_k = \varepsilon_k \ln\lambda$.

由此可见, 在所考察的情形下, $S=(S_n)$ 无非就是集合

$$E_{S_0} = \{S_0\lambda^k \colon k = 0, \pm 1, \cdots\}$$

上的*几何随机游走*. 如果 $S_0 \in E = \{\lambda^k \colon k=0,\pm 1,\cdots\}$, 那么 $E_{S_0} = E$. 在这一情形下, 我们说, $S=(S_n)$ 是相集合 $E=\{\lambda^k \colon k=0,\pm1,\cdots\}$ 上的*Markov 游走*.

所考察的二叉树模型是*几何布朗运动* $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ 的离散类似; 所谓几何布朗运动就是如下表示 (比较 (8)) 的随机过程:

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t},$$

其中 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 为标准维纳过程, 或者标准布朗运动 (参见第三章 §3a).

在这一联系中, 自然会记起通常的布朗运动的离散类似是*算术随机游走* $S_n = S_{n-1} + \xi_n$ 其中 $\xi = (\xi_n)_{n\geqslant 1}$ 是某个 Bernoulli 序列.

4. 在上面的叙述中, 所有考察都是在带某个概率测度的某个渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$ 上进行的. 一般来说, 问题在于怎样的概率测度 P; 也就是说, 怎样取值 $p = \mathsf{P}(\rho_n = b)$ 和 $q = \mathsf{P}(\rho_n = a)$. 这远不是一个简单问题. 在一定的意义下, 更为现实的是假定在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上给定的不是一个概率测度P, 而是整个一族概率测度 $\mathscr{P} = \{\mathsf{P}\}$, 对于它们来说, 相应的值 $p = \mathsf{P}(\rho_n = b)$ 落在区间 $(0,1)$ 中.

至于所考察的二叉树的可能推广问题, 我们注意到, 相当现实的是还可假定量 ρ_n 不只取两个值 a 和 b, 而是在区间 $[a,b]$ 中的值; 这时, 一般来说, ρ_n 的概率分布可以是 $[a,b]$ 上的任何分布. 第五章 §1c 中考察的正是这样的模型, 它与所谓*不完全市场*上的期权合理定价理论相联系. 同样是在这一节, 还将考察*非概率方法*, 它基于把 ρ_n 表示为 "混沌" 变量. (关于用动态 "混沌" 模型的价格演变描述, 参见以后的 §§4a, b.)

§1f. 带离散干预机会的模型

1. 在研究序列 $H=(H_n)_{\geqslant 0}$ 时, 把它们 "嵌入" 到连续时间模式中, 经常是很方便的.

我们把原来的随机基底 $\mathscr{B} = (\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 与下列有连续时间 $(t \geqslant 0)$ 的基底 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 相联系:

$$\widetilde{\mathscr{B}} = (\Omega, \mathscr{F}, (\widetilde{\mathscr{F}}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P}),$$

其中 $\widetilde{\mathscr{F}_t} = \mathscr{F}_{[t]}$, $[t]$ 是 t 的整数部分.

我们也可根据随机序列 $H = (H_n, \mathscr{F}_n)$ 来定义新的 (带连续时间的) 序列 $\widetilde{H} = (\widetilde{H}_t, \widetilde{\mathscr{F}_t})$, 并令[1])

$$\widetilde{H}_t = H_{[t]}.$$

这样一来 (参见图 13), 轨线 $\widetilde{H}_t, t \geqslant 0$, 为按段常数, 在时刻 $t = 1, 2, \cdots$, 发生跳跃 $\Delta \widetilde{H}_t = \widetilde{H}_t - \widetilde{H}_{t-}$, 并且右连续. 这时, $\Delta \widetilde{H}_n = \Delta H_n = h_n$.

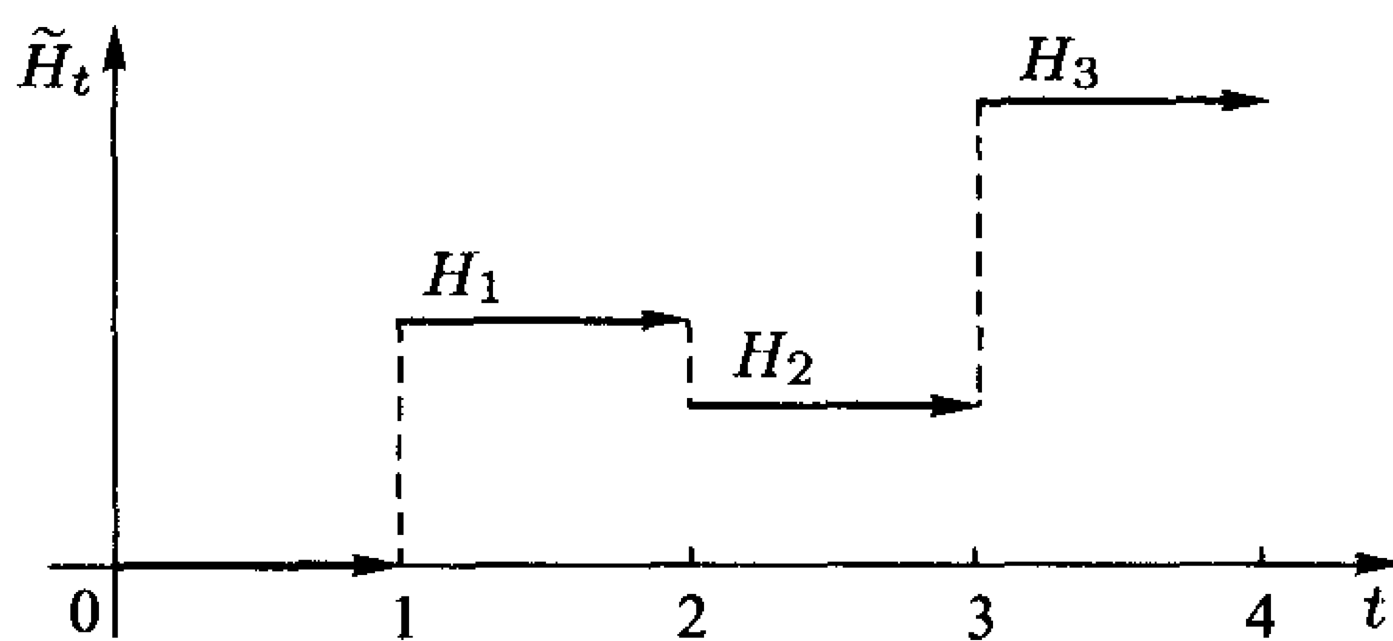


图 13 带离散时间的序列 (H_n) 在带连续时间的模式中的嵌入

显然, 反过来也一样: 给定在某个随机基底 $\widetilde{\mathscr{B}} = (\Omega, \mathscr{F}, (\widetilde{\mathscr{F}_t})_{t \geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上的随机过程 $\widetilde{H} = (\widetilde{H}_t, \widetilde{\mathscr{F}_t})_{t \geqslant 0}$, 如果它为按段常数, 右连续, 且在时刻 $t = 1, 2, \cdots$ 上有跳跃, 那么它在实质上就是上面所考察的带离散时间的过程.

2. 直到现在为止, 在讨论各种价格的动态模型时, 我们或者涉及其中价格 $S = (S_n)$ 固定在离散时刻 $n = 0, 1, \cdots$, 的模型 (作为基础), 或者 (正如在 Bachelier 情形下) 涉及其中价格 $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ 用带连续时间 $t \geqslant 0$ 的连续随机过程 (例如, 布朗运动) 来描述的模型.

其实, 实际价格 $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ 的演变的统计分析指出, 它们的结构在某种意义下是混合型的.

更确切地说, 其含义如下. 根据多项观察数据, 价格 $S = (S_t)_{t \geqslant 0}$ 的轨线结构如同图 14 所描述.

换句话说, 记 S_t 为这样的形式: $S_t = S_0 e^{H_t}$, 我们求得, 轨线 $(H_t)_{t \geqslant 0}$ 有下列形式:

$$H_t = \sum_{k \geqslant 1} h_k I(\tau_k \leqslant t), \tag{1}$$

其中 $\tau_1, , \tau_2, \cdots$ 是跳跃时刻, 而 h_k 是跳跃量 $(\Delta H_{\tau_k} \equiv H_{\tau_k} - H_{\tau_k -} = h_k)$.

如果认为所有讨论都在随机基底 $(\Omega, \mathscr{F}, (\widetilde{\mathscr{F}_t})_{t \geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上进行, 那么在 (随机) 跳跃时刻 τ_k $(k \geqslant 1)$ 上, 以及在量 h_k $(k \geqslant 1)$ 上, 自然要附加某些 "可测性" 条件, 以保

[1]) 正如在离散时间情形下那样, 记号 $\widetilde{H} = (\widetilde{H}_t, \widetilde{\mathscr{F}}_t)$ 理解为量 $\widetilde{H}_t$ 对于每个 $t \geqslant 0$ 为 $\widetilde{\mathscr{F}}_t$-可测. (即它是所谓 "适应过程". —— 译者注)

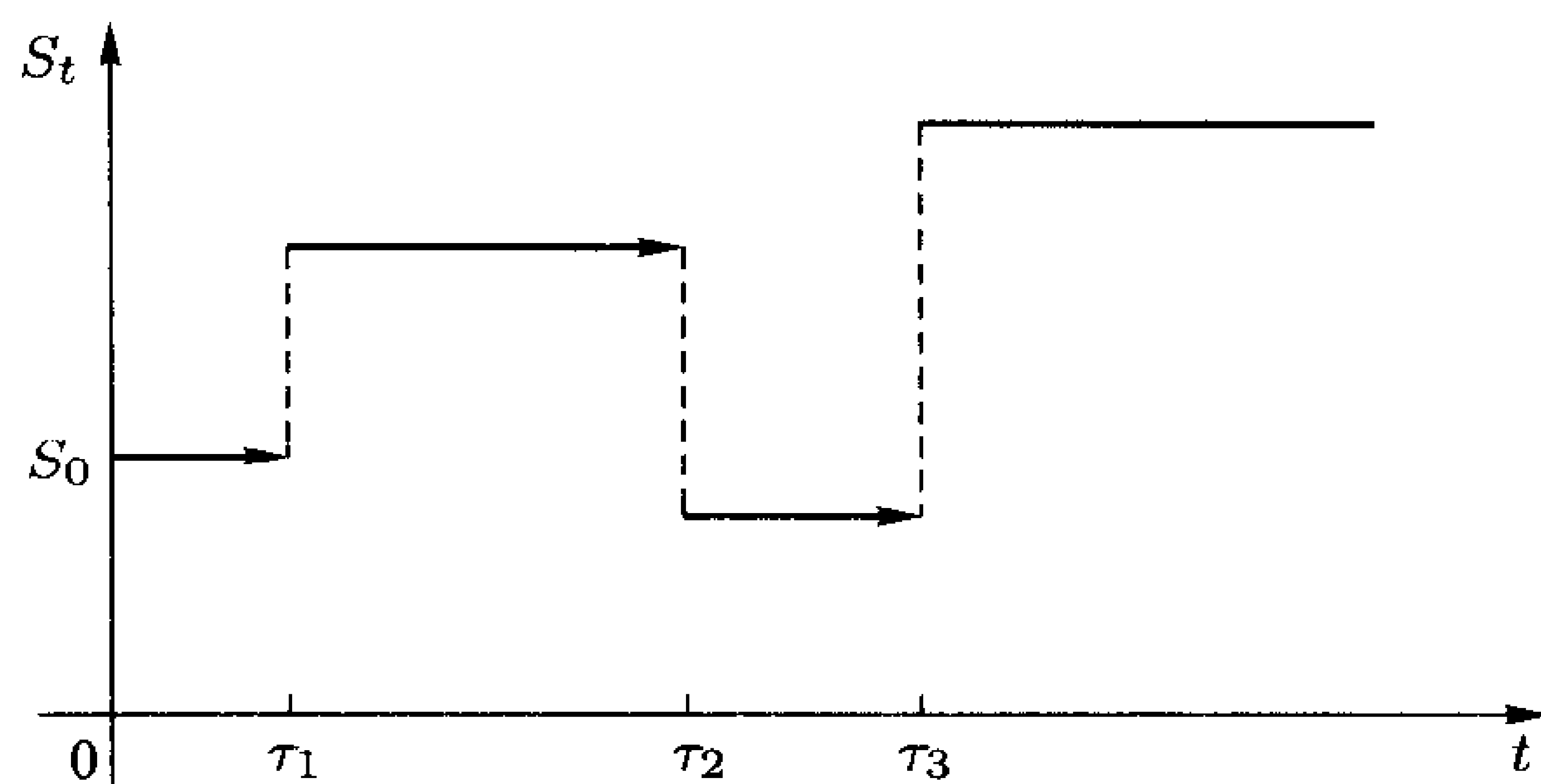


图 14　带离散干预 (在时刻 $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \cdots$) 情形的过程

证至少对于每个 $t \geqslant 0$, 量 H_t 为 $\mathscr{F}_t$-可测, 即, 它是由在时间区间 $[0,t]$ 可接受的 "信息" 来确定的.

3. 为了这个目标, 我们引入一系列定义, 其中把随机变量 $\tau = \tau(\omega)$ 的非负延拓理解为映射[1)]

$$\Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+ \equiv [0, \infty].$$

定义 1. 我们说, 随机变量 $\tau = \tau(\omega)$ 的非负延拓是*Markov* 时刻, 或者不依赖于未来的随机变量, 是指对于每个 $t \geqslant 0$, 集合

$$\{\omega \colon \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t. \tag{2}$$

Markov 时刻也称为停止时刻或简称停时, 尽管有时这个术语只留给这样的 Markov 时刻 $\tau = \tau(\omega)$: 或者对于所有 $\omega \in \Omega$ 有 $\tau(\omega) < \infty$, 或者 $\mathsf{P}(\tau(\omega) < \infty) = 1$.

条件 (2) 的直观意义是非常清楚的, 这只要把 $\tau(\omega)$ 解释为需要采取某个 "决策" 的时刻. 由于 $\mathscr{F}_t$ 是 σ-代数, 故条件 (2) 等价于 $\{\tau(\omega) > t\} \in \mathscr{F}_t$, 它意味着在时刻 t "决策" 所带来的在更晚的时刻 (不包括 t) 的后果仅仅与在 $[0,t]$ 上可接受的信息 $\mathscr{F}_t$ 有关, 而不依赖于 "未来" (时刻 t 以后).

定义 2. 设 $\tau = \tau(\omega)$ 是停时. 我们以 $\mathscr{F}_\tau$ 表示具有下列性质的集合 $A \in \mathscr{F}$ 的全体: 对于每个 $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$,

$$A \cap \{\omega \colon \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t. \tag{3}$$

我们以 $\mathscr{F}_{\tau-}$ 表示由 $\mathscr{F}_0$ 和所有形为 $A \cap \{\omega \colon \tau(\omega) < t\}$ 的集合所生成的 σ-代数, 其中 $A \in \mathscr{F}_t$, $t \in \mathbb{R}_+$.

不难断定, $\mathscr{F}_\tau$ 是 σ-代数.

如果把 $\mathscr{F}_t$ 解释为在包括 t 在内的 t 时刻以前所发生的事件全体, 那么 $\mathscr{F}_\tau$ 和 $\mathscr{F}_{\tau-}$ 自然可分别解释为在时间区间 $[0,\tau]$ 和 $[0,\tau)$ 上观察到的事件全体.

[1)] 我们记得, 根据传统的概率论定义, 实随机变量只取有限值, 即, 在 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 中的值.

4. 我们回到过程 $H=(H_t)_{t\geqslant 0}$ 作为 (在时刻 $\tau_1,\tau_2,\cdots$) "带离散干预机会的过程" 的表示式 (1); 参见图 14. 我们将假定, 对于每个 $\omega\in\Omega$ (或者对于 P-几乎所有 $\omega\in\Omega$)

$$0<\tau_1(\omega)<\tau_2(\omega)<\cdots,$$

并且对每个 $k\geqslant 1$, 时刻 $\tau_k=\tau_k(\omega)$ 是停时, 而量 $h_k=h_k(\omega)$ 为 $\mathscr{F}_{\tau_k}$-可测.

由这些假定和条件 (2) 和 (3) 特别是导出, 过程 $H=(H_t)_{t\geqslant 0}$ 与流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 相协调, 或相适应, 即对于每个 $t\geqslant 0$, 量

$$H_t \text{ 为 } \mathscr{F}_t\text{-可测}.$$

这样一来, 为与上面 (§1c) 所采用的记号相一致, 过程 $H=(H_t)_{t\geqslant 0}$ 可记为下列形式: $H=(H_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

在 (1) 中定义的实值过程 $H=(H_t)_{t\geqslant 0}$ 是在相空间 $\mathbb{E}$ (在所考察的情形下, $\mathbb{E}=\mathbb{R}$) 中取值的*多元点过程*的特殊情形, [250]. 同样的术语*点过程*或*计数过程*, 通常是指 $h_n\equiv 1$ 的情形, 即, 是指过程

$$N_t=\sum_k I(\tau_k\leqslant t),\qquad t\geqslant 0. \tag{4}$$

注. 有时 "点过程" 仅仅与时刻序列 $\tau=(\tau_1,\tau_2,\cdots)$ 相联系, 而与这个序列相对应的, 即由公式 (4) 所给定的过程 $N=(N_t)_{t\geqslant 0}$ 称为 "计数过程". 显然, 在 τ 和 N 之间存在一一对应关系: N 由 τ 决定, 而 τ 由 N 所决定, 因为

$$\tau_k=\inf\{t\colon N_t=k\}.$$

注意, 如果集合 $\{t\colon N_t=k\}=\varnothing$, 那么通常假定 $\tau_k(\omega)$ 等于 $+\infty$. 这样, 对于轨线如图 15 所描绘的 "单点" 点过程, 可以认为, 对应的时刻 $\tau_2=\tau_3=\cdots=+\infty$.

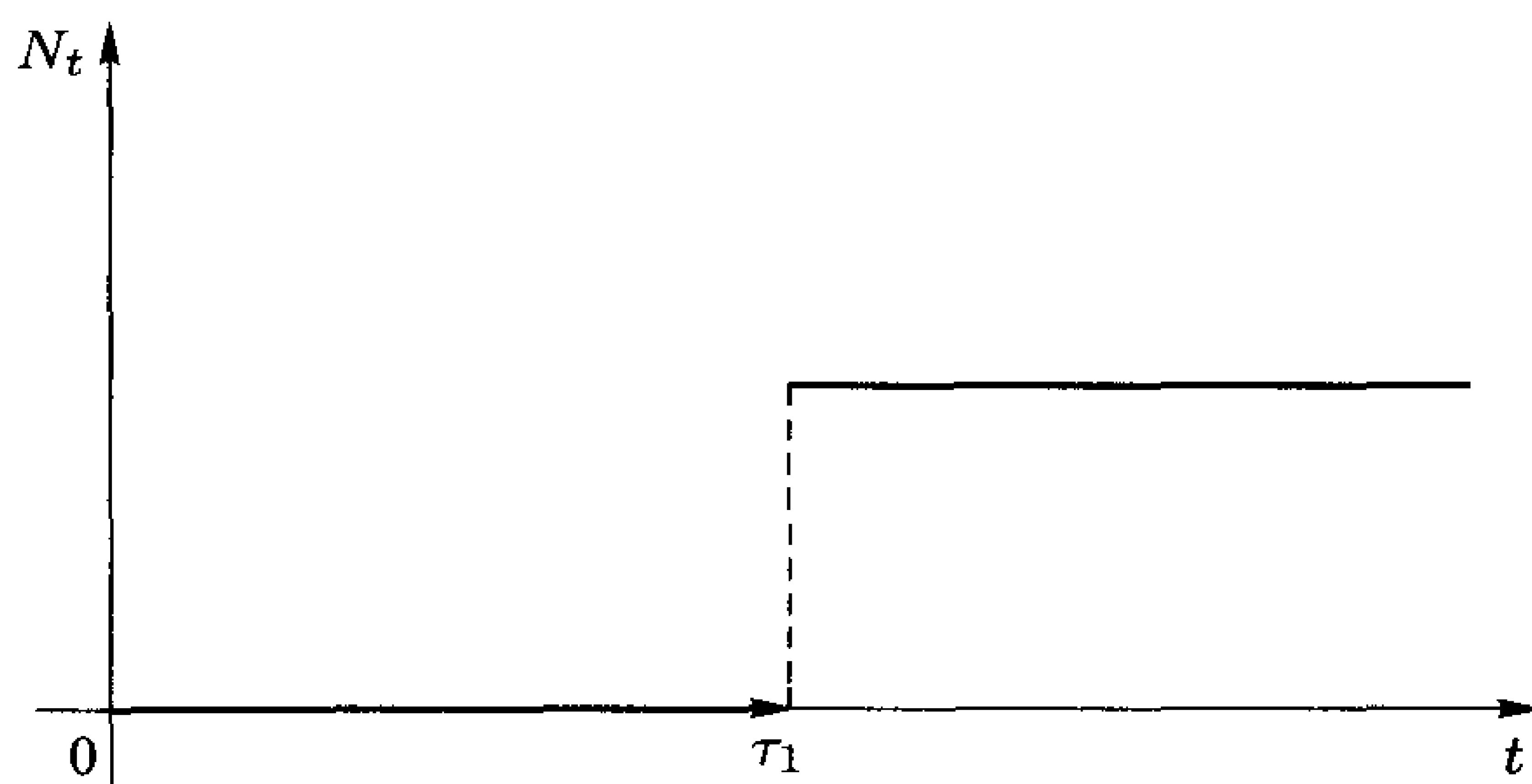


图 15 "单点" 点过程

5. 用公式 (4) 来确定的点过程 $N=(N_t)_{t\geqslant 0}$ 也可用随机时间替换来给出另一种等价描述, [250; 第 II 章, §3].

定义 3. 我们说, 给定在随机基底 $\mathscr{B}=(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}},\mathsf{P})$ 上取值在 $\mathbb{N}=\{0,1,\cdots\}$ 或 $\overline{\mathbb{N}}=\{0,1,\cdots,\infty\}$ 中的随机变量族 $\sigma=(\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ 形成随机时间替换, 是指

(i) 对于每个 t, 量 σ_t 是 (关于 $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的) 停时;
(ii) $\sigma_0=0$;
(iii) 轨线 $\sigma_t(\omega)$ $(t\geqslant 0)$ 中的每一条递增、右连续, 并带有等于单位 1 的跳跃.

我们把 $\sigma=(\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ 与有连续时间的随机基底 $\mathscr{B}^\sigma$ 相联系:

$$\mathscr{B}^\sigma=(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_{\sigma_t})_{t\geqslant 0},\mathsf{P}),$$

并令

$$\tau_k=\inf\{t\colon \sigma_t\geqslant k\},\qquad k\in\mathbb{N}.$$

不难指出, 关于定义为 $\mathscr{G}_t=\mathscr{F}_{\sigma_t}$ 的流 $(\mathscr{G}_t)_{t\geqslant 0}$, 时刻 $\tau_k=\tau_k(\omega)$ 是停时. 这时, 如果对于所有 $t\in\mathbb{N}$, $\sigma_t<\infty$, 那么

$$H_t=\sum_{k\geqslant 1}h_k I(\tau_k\leqslant t)=\sum_{1\leqslant k\leqslant\sigma_t}h_k. \tag{5}$$

同样明显的是

$$\sigma_t=\sum_{k\geqslant 1}I(\tau_k\leqslant t),$$

即, σ_t 是在区间 $[0,t]$ 上发生变化的时刻的个数. 换句话说, 根据序列 $(\tau_1,\tau_2,\cdots)$ 所构造的随机时间替换 $\sigma=(\sigma_t)_{t\geqslant 0}$ 无非就是对应这个序列的计数过程 $N=(N_t)$,

$$N_t=\sum_{k\geqslant 1}I(\tau_k\leqslant t).$$

在所有所引入的公式中, t 起着现实 (“物理”) 时间的作用. σ_t 同样是 “时间”, 但它起着运作时间的作用, 指示 “物理” 时间 t 的改变次数. (关于金融时间序列经验分析中的运作时间问题, 我们将到第四章的 §3d 中讨论.)

还要注意到, 如果

$$\sigma_t=[t],$$

那么 $\mathscr{B}^\sigma=\widetilde{\mathscr{B}}$, 其中 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 就是上面考察的、满足 $\widetilde{\mathscr{F}_t}=\mathscr{F}_{[t]}$ 的带离散时间的随机基底 $(\Omega,\mathscr{F},(\widetilde{\mathscr{F}_t})_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$.

6. 由 §1b 得到, 在序列 $H=(H_n)_{n\geqslant 0}$ 的随机分析中, Doob 分解起着关键作用, 它使得 H 分解为依赖于可接受信息 (在金融框架中就是有关市场状态的信息) 流 $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 的 “鞅” 成分和 “可料” 成分.

类似的 (Doob-Meyer) 分解既对于计数过程 N 成立, 也对于多元点过程 H 成立; 它正如在离散时间情形中那样, 在引进 “鞅性” 和 “可料性” 概念的随机分析中作为基本出发点 (参见后面的第三章中的 §5b 和更详尽的 [250]).

2. 线性随机模型

金融指数演变的经验分析自然与许多其他的指数 (经济、社会等等) 一样, 必定首先从构造适当的概率统计 (或者其他的) 模型开始; 模型的正确选择是一件非常不简单的事.

在一般的时间序列理论中, 有各种各样的 "标准" 线性模型的整个工具库, 其中首先就应该看到在 §1c 中考察的诸如$MA(q)$, $AR(p)$, $ARMA(p,q)$ 等. 这些模型, 也就是q 阶移动平均模型, p 阶自回归模型, (p,q) 阶自回归移动平均混合模型, 在时间序列理论中详细研究, 特别是在它们的平稳性假定之下.

这些模型流行的原因一方面在于它们很简单, 另一方面在于只要不多的参数就可很好地逼近很广的平稳序列类.

然而, 远非是所有的 "经济" 时间序列是平稳的. 分析指出, 在统计数据中, 经常很突出地显露出下列三种成分:

- 缓慢变化的 (例如 "通货膨胀") 倾向 (x),
- 周期或非周期的循环 (y),
- 不规则的 ("随机的" 或者 "混沌的") 波动成分 (z).

这时, 在观察的数据 (h) 中, 它们可能以非常不同的方式参与, 并可有条件地表示为

$$h = x * y * z,$$

其中复合运算 "$*$" 可表现为例如加法 "$+$", 乘法 "$\times$" 等等.

有足够多的书本、专著致力于时间序列及其应用, 特别是有关金融数据的分析. (参见例如, [62], [193], [202], [211], [212], [351] 和 [460].)

下面我们将讨论某些线性 (随后是非线性) 模型, 目标是给出其在金融数据经验分析中应用的结构、特点和性质的表示.

在这里不妨说, 归根到底, 金融指数的统计数据的经验分析的重要目标之一在于预料、预测 "未来的价格运动":

这一预料的可信程度自然依赖于恰当的模型选择, 确定其参数的估计精度以及 (线性或非线性) 外推估计的质量.

在这方面, 第四章中所进行的汇率时间序列分析是一个标志. 那里指出, 怎样从简单的线性高斯模型出发, 把它们逐步修正、复杂化, 使得最终得到 "把握" 经验分析中所揭示的现象 (比如, 对高斯性的偏离, 聚集效应和价格上的 "长记忆").

如果把模式 "$h = x * y * z$" 理解为在形成价格时的三种成分 x, y 和 z 的复合, 那么应该注意到, 在我们的叙述中最为强调的是首先是要把 "波动" 成分 z 置于最后, 然后 (在汇率情形下) 是周期 (季节性) 成分 y.

我们不详细讨论倾向成分 x 的分析, 然而要注意到, 正是这一成分经常造成所

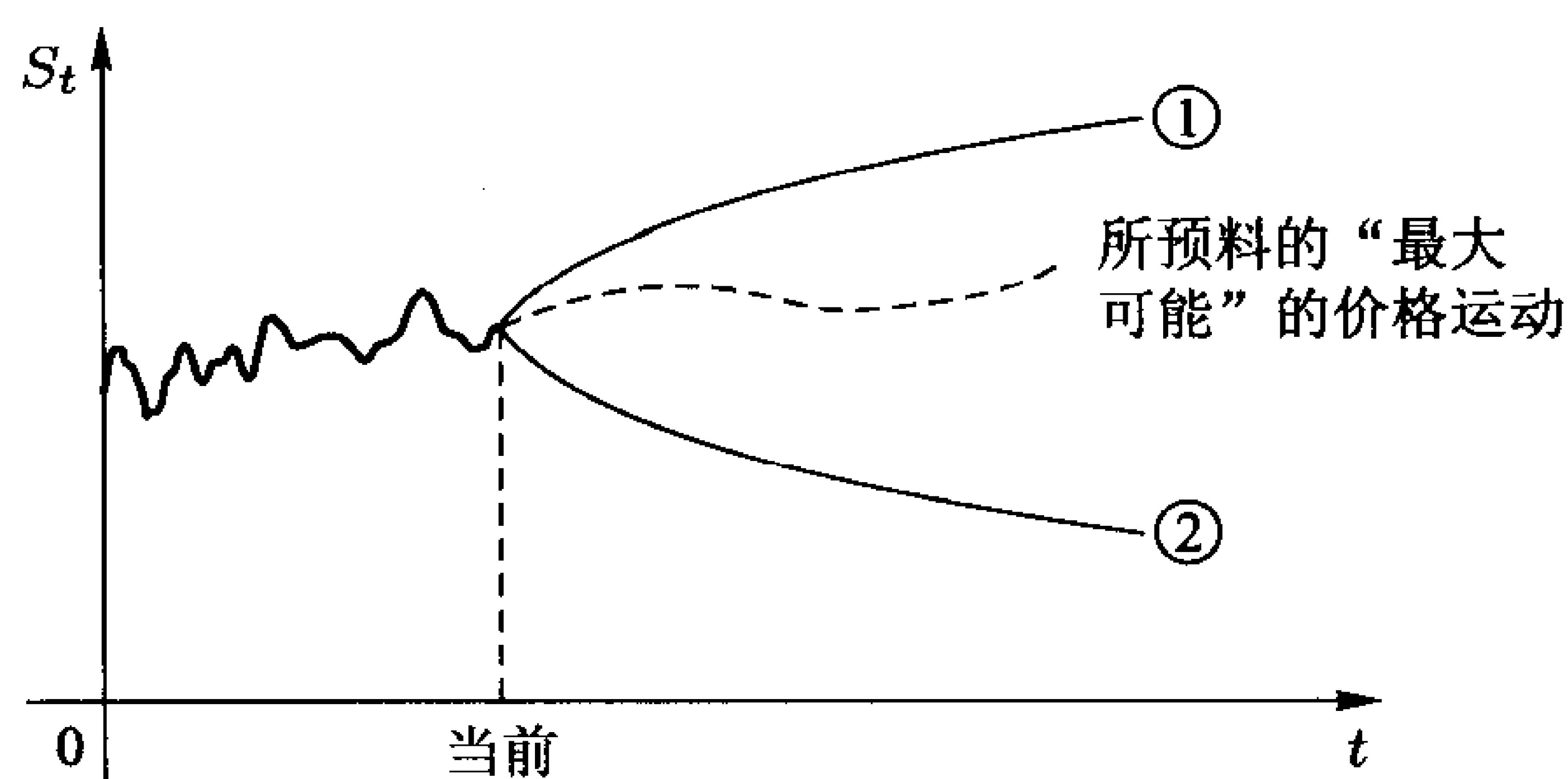


图 16　曲线 1 和 2 之间的区域是 (带有某种置信度) 的置信区域, 其中将发生可预料的价格的"未来"运动

考察的模型的"非平稳"特征, 其中的经典例子就是所谓 $ARIMA(p,d,q)$ 模型, 即整合自回归移动平均混合模型 (I 来自 integrated; d 是"整合"的阶数), 它被 G. E. P. Box, G. M. Jenkins [53] 所广泛运用和传播. 详情参见 §2c.

§2a. 移动平均模型 $MA(q)$

1. 在今后考察的所有 (线性和非线性) 模型中都假定给定某个"基底"序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$, 它在时间序列理论中通常认为是白噪声 (参见图 17), 并且当作确定所研究的概率统计对象的随机特征的随机源.

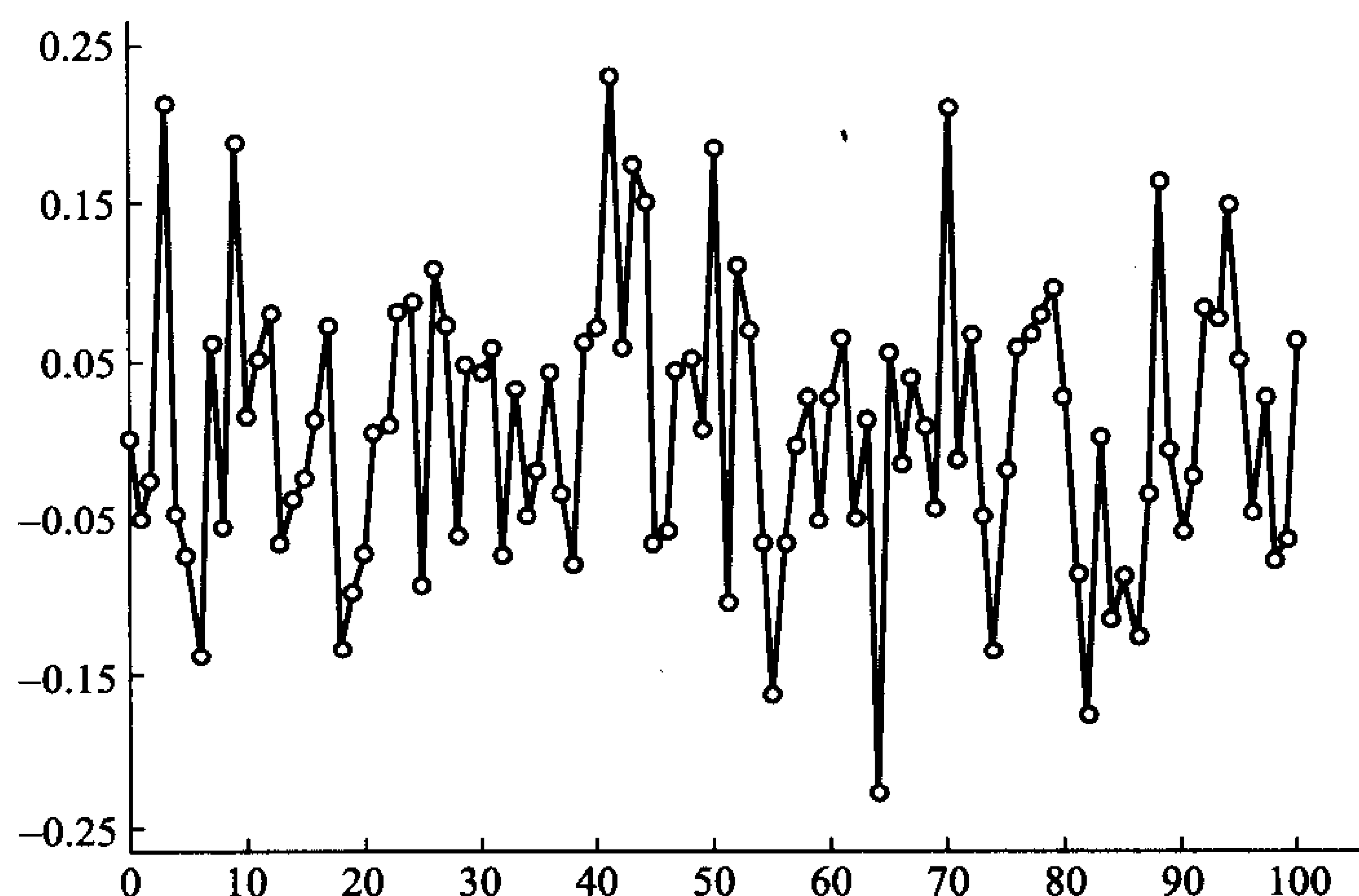


图 17　白噪声 $h_n = \sigma\varepsilon_n$ 的计算机仿真图像, 其中 $\sigma = 0.1$, 而 $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0,1)$

这时, (在"L^2-理论"中) 我们说, 序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 是广义白噪声, 是指 $\mathsf{E}\varepsilon_n = 0$, $\mathsf{E}\varepsilon_n^2 < \infty$, 并且对于所有 $n \neq m$, 有

$$\mathsf{E}\varepsilon_n\varepsilon_m = 0 \tag{1}$$

(时间参数 n 现在适当地认为取值 $0, \pm 1 \pm 2, \cdots$.)

换句话说, 广义白噪声就是有零均值的不相关的平方可积的随机变量序列.

如果在这个定义中再附加高斯性 (正态性) 的要求, 那么所得到的序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 就称为狭义白噪声或者(高斯) 白噪声; 它也等价于 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 为独立正态分布随机变量 $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0, \sigma_n^2)$ 的序列. 以后我们将认为 $\sigma_n^2 \equiv 1$. (在这一情形下, 经常说, $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 是标准高斯序列; 把这个概念与也在金融数据统计中运用的分形高斯噪声相比较是有益的; 参见第三章 §2d.)

2. 在描述序列 $h = (h_n)$ 的移动平均模型 $MA(q)$ 中, 假定以下列方式根据广义白噪声 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 来陈述值 h_n:

$$h_n = (\mu + b_1 \varepsilon_{n-1} + \cdots + b_q \varepsilon_{n-q}) + b_0 \varepsilon_n, \tag{2}$$

其中参数 q 确定依赖 "过去" 的阶数, 而 ε_n 起着包含在 $\mathscr{F}_{n-1} = \sigma(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \cdots)$ 中的 "更新" 信息的量的作用; 参见图 18.

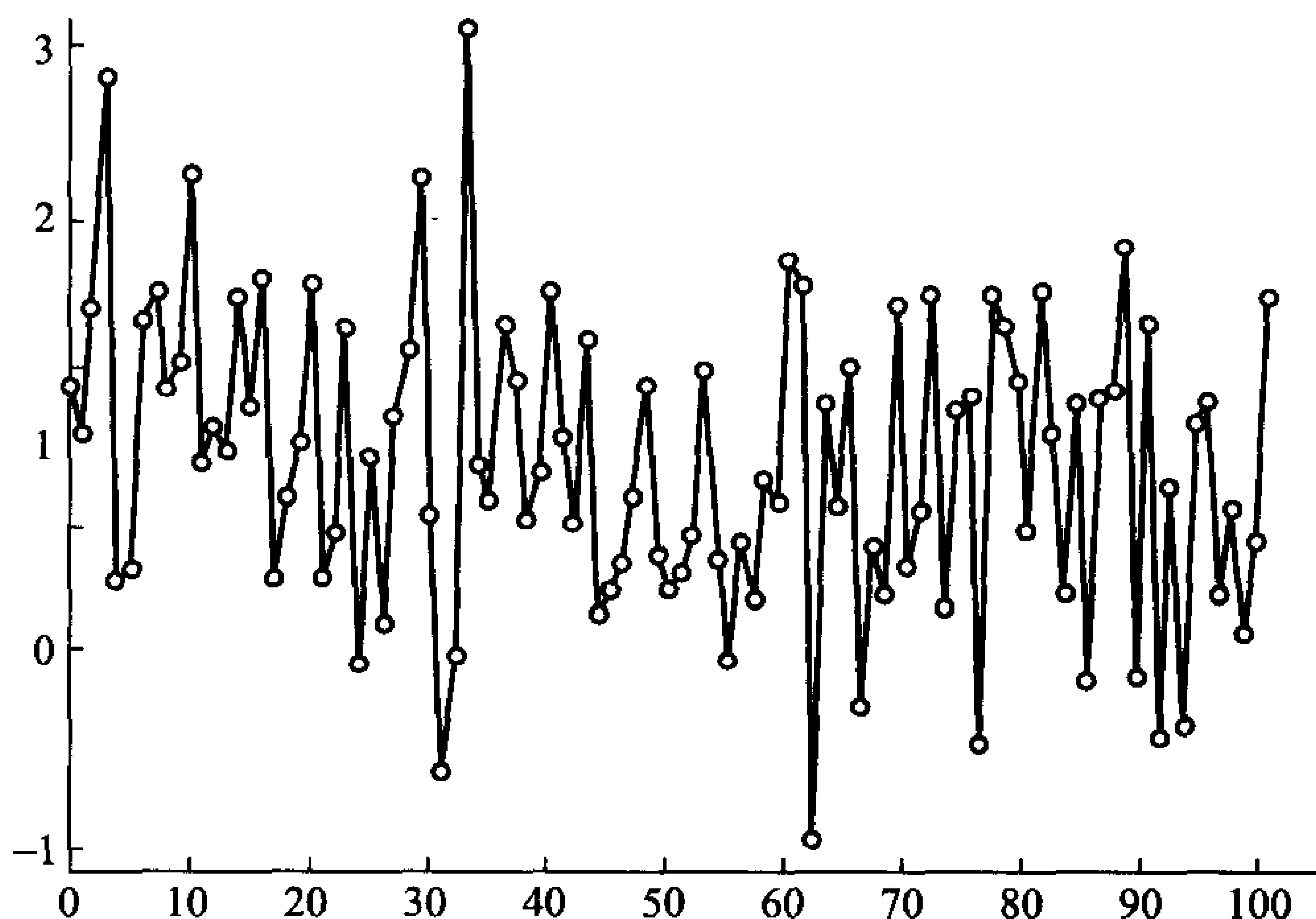


图 18 服从$MA(1)$-模型 $h_n = \mu + b_1 \varepsilon_{n-1} + b_0 \varepsilon_n$ 的序列 $h = (h_n)$ 的计算机仿真图像, 其中参数 $\mu = 1$, $b_1 = 1$, $b_0 = 0.1$ 以及 $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0, 1)$

为使叙述更紧凑, 引入 "向后" 位移算子是适宜的, 它按照下列公式作用在数列 $x = (x_n)$ 上:

$$Lx_n = x_{n-1}. \tag{3}$$

由于 $L(Lx_n) = Lx_{n-1} = x_{n-2}$, 故 L^2 自然表示按照下列公式来作用的算子:

$$L^2 x_n = x_{n-2},$$

并且一般来说, $L^k x_n = x_{n-k}$ 对于所有 $k \geqslant 0$ 成立.

我们注意算子 L 的尽管简单、但很有用的下列性质 (c, c_1, c_2 为常数):

$$\begin{aligned} L(cx_n) &= cLx_n, \\ L(x_n + y_n) &= Lx_n + Ly_n, \\ (c_1L + c_2L^2)x_n &= c_1Lx_n + c_2L^2x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2}, \\ (1-\lambda_1L)(1-\lambda_2L)x_n &= x_n - (\lambda_1+\lambda_2)x_{n-1} + (\lambda_1\lambda_2)x_{n-2}. \end{aligned}$$

借助于算子 L, 关系式 (2) 可记为下列紧凑形式:

$$h_n = \mu + \beta(L)\varepsilon_n, \tag{4}$$

其中

$$\beta(L) = b_0 + b_1L + \cdots + b_qL^q.$$

3. 我们转向关于序列 $h = (h_n)$ 的概率特征的问题.

设 $q = 1$. 在这一情形下,

$$h_n = \mu + b_0\varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1}, \tag{5}$$

并直接求得

$$\mathsf{E}h_n = \mu, \qquad \mathsf{D}h_n = b_0^2 + b_1^2, \tag{6}$$

$$\mathsf{Cov}(h_n, h_{n+1}) = b_0b_1, \qquad \mathsf{Cov}(h_n, h_{n+k}) = 0, \quad k > 1. \tag{7}$$

最后两个性质意味着 $h = (h_n)$ 是相邻值 (h_n 和 h_{n+1}) 相关的序列, 同时, h_n 和 h_{n+k} 的相关值当 $k \geqslant 2$ 时为零.

我们顺便还察觉, 如果 $b_0b_1 > 0$, 那么量 h_n 和 h_{n+1} 正相关. 而如果 $b_0b_1 < 0$, 那么量 h_n 和 h_{n+1} 负相关. (我们以后将在第四章 §3c 中遇到这种局面, 以解释汇率情形下的负相关效应.)

由 (6) 和 (7) 得到, 在序列 $h = (h_n)$ 的元素中的均值、方差和协方差都不依赖于 n. (这当然是由于假定 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 是广义白噪声、且 $\mathsf{E}\varepsilon_n = 0$, $\mathsf{D}\varepsilon_n^2 = 1$ 以及 (5) 中的系数不依赖于 n.) 尤其是, 序列 $h = (h_n)$ 为 (完全根据定义) 广义平稳. 如果再假定序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 是高斯序列, 那么序列 $h = (h_n)$ 也将是高斯序列, 因而, 其所有的概率性质都可仅用均值、方差和协方差这几个术语来表达. 在这一情形下, 序列 $h = (h_n)$ 为狭义平稳, 即

$$\mathrm{Law}(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n}) = \mathrm{Law}(h_{i_1+k}, \cdots, h_{i_n+k})$$

对于所有 $n \geqslant 1$, $i_1, \cdots, i_n$ 和任意的 k 成立.

4. 设 $(h_1, \cdots, h_n)$ 是由量 h_k 在时刻 $k = 1, \cdots, n$ 的观察结果所得到的某个实现, 并且

$$\overline{h}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k \tag{8}$$

是其时间均值.

从统计的视角来看待"统计量" $\overline{h}_n$, 其意义在于 $\overline{h}_n$ 是估计均值 μ 的自然"备选物".

在用均方偏差 $\Delta_n^2 = \mathsf{E}|\overline{h}_n - \mu|^2$ 来度量这个量的估计质量的情形下, 下列判别准则是有用的:

$$\Delta_n^2 \to 0 \iff \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{R}(k) \to 0, \tag{9}$$

其中 $\mathsf{R}(k) = \mathsf{Cov}(h_n, h_{n+k})$ 以及 $h = (h_n)$ 是任意的广义平稳序列.

其实, 为简单起见, 设 $\mu = \mathsf{E}h_n = 0$. 于是

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{R}(k)\right|^2 = \left|\mathsf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k\right) h_0\right|^2 \leqslant \mathsf{E}h_0^2 \mathsf{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k\right|^2,$$

而这意味着 (9) 中的蕴涵关系 "$\Longrightarrow$" 成立.

另一方面,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k\right|^2 &= \frac{1}{n^2}\mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} h_k^2 + 2\sum_{k\neq l}^{n} h_k h_l\right)\\ &= \frac{2}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{l-1} \mathsf{R}(k) - \frac{1}{n}\mathsf{R}(0).\end{aligned}$$

选取 $\delta > 0$, 并设 $n(\delta)$ 满足对于所有 $l \geqslant n(\delta)$ 有

$$\left|\frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} \mathsf{R}(k)\right| \leqslant \delta.$$

这样, 对于 $n \geqslant n(\delta)$, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=0}^{l-1} \mathsf{R}(k)\right| &= \left|\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n(\delta)}\sum_{k=0}^{l-1} \mathsf{R}(k) + \frac{1}{n^2}\sum_{l=n(\delta)+1}^{n}\sum_{k=0}^{l-1} \mathsf{R}(k)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\left|\sum_{l=1}^{n(\delta)}\sum_{k=0}^{l-1} \mathsf{R}(k)\right| + \frac{1}{n^2}\left|\sum_{l=n(\delta)+1}^{n} l \cdot \frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} \mathsf{R}(k)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\left|\sum_{l=1}^{n(\delta)}\sum_{k=0}^{l-1} \mathsf{R}(k)\right| + \delta,\end{aligned}$$

以及由于 $n(\delta) < \infty$, $|\mathsf{R}(0)| \leqslant \mathrm{Const}$, 故

$$\varlimsup_{n} \mathsf{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k\right|^2 \leqslant \delta,$$

再由于 $\delta > 0$ 的任意性, 这就证明了蕴涵关系 "$\Longleftarrow$".

这样一来, 所考察的模型$MA(1)$ 在下列含义下是 "遍历的": 时间均值 $\overline{h}_n$ (在 L^2) 中收敛于值 μ, 或者还可以说, 收敛于总体均值. (关于 "遍历性"、"混合"、"遍历性定理" 的一般概念, 参见例如 [439; 第 V 章].)

这个 "遍历性" 结果从统计的视角来看的重要性是完全清楚的; 它论证了用观察值 $h_1, h_2, \cdots$ 所构造的时间均值来估计均值的可能性. 显然, "遍历性" 在论证样本估计的统计方法上不仅是对均值, 并且也对其他统计特征, 诸如各阶矩、协方差等等, 都起着关键作用.

5. 我们记得, 按照协方差 $\mathsf{Cov}(h_n, h_m)$ 可用下列公式来定义相关系数 $\mathsf{Corr}(h_n, h_m)$:

$$\mathsf{Corr}(h_n, h_m) = \frac{\mathsf{Cov}(h_n, h_m)}{\sqrt{\mathsf{D}h_n h_m}}. \tag{10}$$

由 Cauchy-Bunyakovskiĭ 不等式得到 $|\mathsf{Corr}(h_n, h_m)| \leqslant 1$.

在平稳情形下, $\mathsf{Cov}(h_n, h_{n+k})$ 不依赖于 n. 把这个量记为 $\mathsf{R}(k)$, 并令

$$\rho(k) = \mathsf{Corr}(h_n, h_{n+k}) = \frac{\mathsf{R}(k)}{\mathsf{R}(0)}, \tag{11}$$

我们由 (7) 求得, 在模型$MA(1)$ 的情形下,

$$\rho(k) \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \dfrac{b_0 b_1}{b_0^2 + b_1^2}, & k = 1, \\ 0, & k > 1. \end{cases} \tag{12}$$

值得注意的是, 如果令 $\theta_1 = b_1/b_0$, 那么我们求得

$$\rho(1) = \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} = \frac{(1/\theta_1)}{1+(1/\theta_1)^2}, \tag{13}$$

因而, 不同的值 (θ_1 和 $1/\theta_1$) 在这里允许有同样的值 $\rho(1)$.

6. 现在转向模型$MA(q)$:

$$h_n = \mu + \beta(L)\varepsilon_n, \qquad \beta(L) = b_0 + b_1 L + \cdots + b_q L^q.$$

容易发现,

$$\mathsf{E}h_n = \mu,$$
$$\mathsf{D}h_n = b_0^2 + b_1^2 + \cdots + b_q^2$$

以及

$$\mathsf{R}(k) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{q-k} b_j b_{k+j}, & k = 1, \cdots, q, \\ 0, & k > q. \end{cases} \tag{14}$$

由公式 (14) 我们看到, $MA(q)$ 型的模式可 (通过系数 b_i 的变化) 用来尝试对序列 $h=(h_n)$ 具有 "量 h_n 和 h_{n+k} 的相关系数当 $k>q$ 时为零" 的性态进行建模.

注. 既然提到关于这样那样的模型拟合经验数据的问题, 或者, 如同我们上面所说的 "对序列 $h=(h_n)$ 的性态建模", 那么应该注意到下面提出的一般的作用原理.

对于样本值 $h_1,h_2,\cdots$ 首先要建立某些经验特征, 例如, 样本均值

$$\overline{h}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h_k,$$

样本方差

$$\widehat{\sigma}_n^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(h_k-\overline{h}_n)^2,$$

样本 (k 阶) 相关系数

$$r_n(k)=\frac{1}{n\widehat{\sigma}_n^2}\sum_{i=k+1}^{n}(h_i-\overline{h}_n)(h_{i-k}-\overline{h}_n),$$

样本偏相关系数等等.

然后, 运用逼近模型的对应的理论特征 (例如, (12) 和 (14)) 来改变参数 (诸如 (12) 和 (14) 中的 b_i), 以使得经验特征与理论特征相拟合. 最后, 在终结阶段, 基于经验特征的分布值与其理论分布的偏差, 来导入拟合质量评估.

7. 模型$MA(q)$ 以后的自然的一步是考察模型$MA(\infty)$, 即有下列表达的模型:

$$h_n=\mu+\sum_{j=0}^{\infty}b_j\varepsilon_{n-j}. \tag{15}$$

当然, 为使 (15) 中的级数收敛, 需要对系数赋以某些条件. 如果要求

$$\sum_{j=0}^{\infty}b_j^2<\infty, \tag{16}$$

那么 (15) 中的级数将在均方意义下收敛.

在这一假定下,

$$\mathsf{E}h_n=\mu,\qquad \mathsf{D}h_n=\sum_{j=0}^{\infty}b_j^2 \tag{17}$$

以及

$$\mathsf{R}(k)=\sum_{j=0}^{\infty}b_{k+j}b_j,\qquad k\geqslant 0. \tag{18}$$

在平稳随机过程理论中, 关于对 $h=(h_n)$ 的极限照例说, h_n 是 "当输入是序列 $\varepsilon=(\varepsilon_n)$ 时", "带有脉冲传递函数 $b=(b_j)$ 的物理上可实现的滤波器的反应结果."

尤其引人注目的是, 在极限意义下, 每个 "正则" (广义) 平稳序列 $h = (h_n)$ 可表示为满足性质 (16) 的形式 (15). 关于这个结果的确切陈述, 以至所有联系着平稳系列有 *Wold* 展开而变为 "奇异" 成分和 "正则" 成分 ("正则" 成分可表示为形式 (15)) 之和的问题的整个复合体, 参见后面的 §2d, 以及更为详细的, 例如, [439; 第 VI 章, §5].

§2b. 自回归模型 $AR(p)$

1. 与 §1d 中的定义相对应, 我们说, 序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 服从 *p 阶自回归模型* (模式) $AR(p)$, 是指

$$h_n = \mu_n + \sigma\varepsilon_n, \tag{1}$$

其中

$$\mu_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \cdots + a_p h_{n-p}. \tag{2}$$

也可以说, 序列 $h = (h_n)$ 服从 p 阶*差分方程*:

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \cdots + a_p h_{n-p} + \sigma\varepsilon_n, \tag{3}$$

借助于 §2a 中引入的算子 L, 它可改写为下列形式:

$$(1 - a_1 L - \cdots - a_p L^p) h_n = a_0 + \sigma\varepsilon_n, \tag{4}$$

或者更紧凑的形式:

$$\alpha(L) h_n = w_n, \tag{5}$$

其中 $\alpha(L) = 1 - a_1 L - \cdots - a_p L^p$, $w_n = a_0 + \sigma\varepsilon_n$.

在 $n \geqslant 1$ 的情形下, 为了用差分方程 (3) 完全描述序列 $h = (h_n)$ 的演变, 正如在 §1d 中所注意到, 还要给定*初始条件* $(h_{1-p}, h_{2-p}, \cdots, h_0)$.

经常假定 $h_{1-p} = \cdots = h_0 = 0$. 也可认为它们是随机的, 不依赖于值序列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$. 在 "遍历性" 情形下, 当 $n \to \infty$ 时, h_n 的渐近性态不依赖于初始条件, 并且在这一含义下, 它们的具体化并非是相当本质的. (尽管如此, 在下面的叙述中, 我们仍将明确说到关于初始条件的所有假定.)

在下面的图 19 中, 引入了自回归模型 $AR(2)$ 的计算机仿真.

2. 我们先详细考察简单情形 $p = 1$, 其中

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + \sigma\varepsilon_n. \tag{6}$$

这种情形与一般的 $AR(p)$ 模型类的区别在于, 在 (3) 中对 h_n 有影响的 "过去" 的量 $h_{n-1}, h_{n-2}, \cdots, h_{n-p}$ 中只有 (按时间) 最近的值 h_{n-1}.

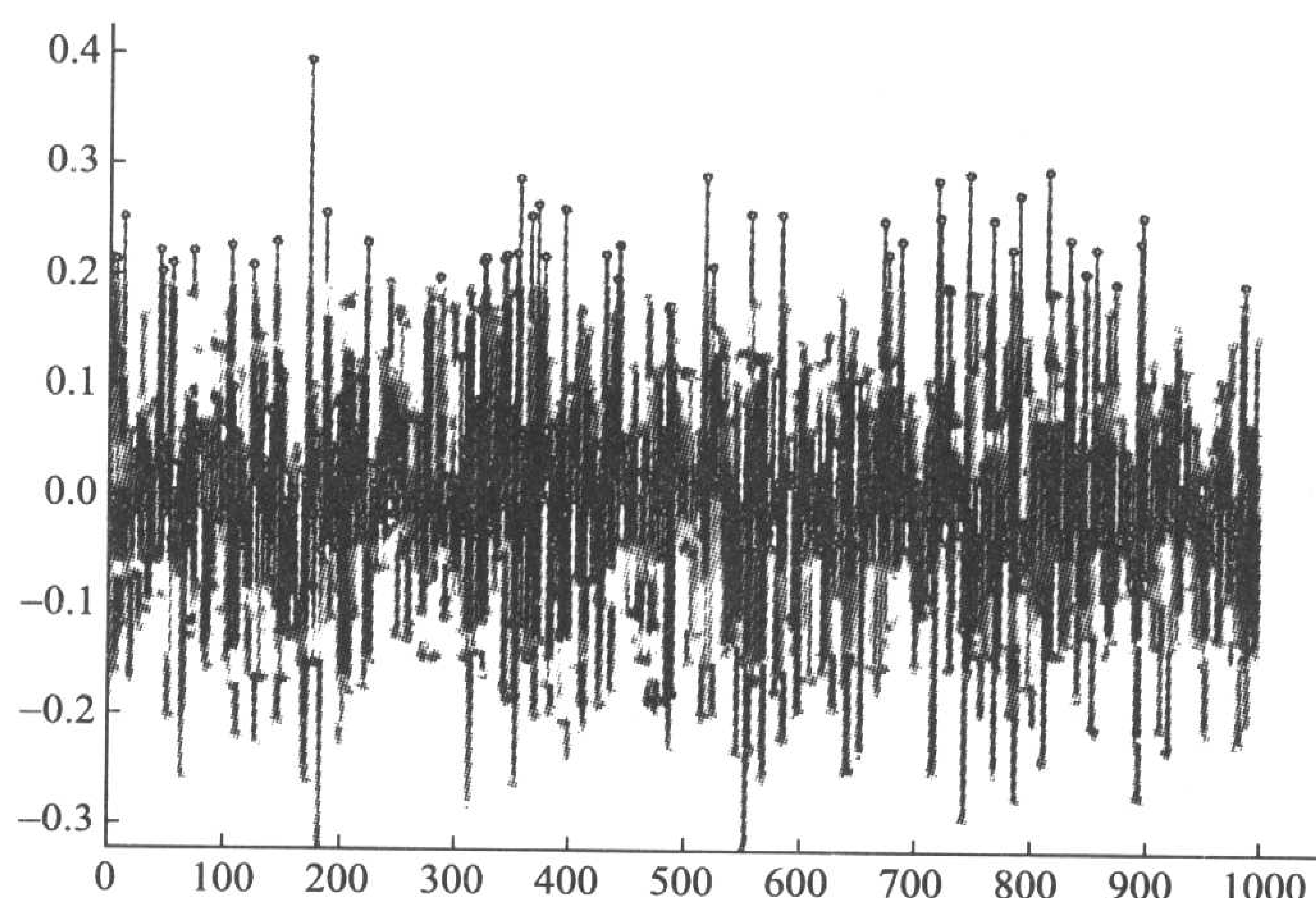


图 19 服从$AR(2)$-模型 $h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \sigma\varepsilon_n$ 的序列 $h = (h_n)$ 的计算机仿真图像, 其中参数 $a_0 = 0$, $a_1 = -0.5$, $a_2 = 0.01$, $\sigma = 0.1$; $h_0 = h_1 = 0$; $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0,1)$ 以及 $2 \leqslant n \leqslant 1000$

如果 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 是独立随机变量序列, h_0 不依赖于 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$, 那么序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 将是构造给定的*Markov* 链的经典例子. 由 (6) 中的递推方式, 我们求得

$$h_n = a_0(1 + a_1 + \cdots + a_1^{n-1}) + a_1^n h_0 + \sigma(\varepsilon_n + a_1\varepsilon_{n-1} + \cdots + a_1^{n-1}\varepsilon_1). \tag{7}$$

由此可见, 序列 $h = (h_n)$ 的性质本质上依赖于参数值 a_1, 这时可分为三种情形: $|a_1| < 1$, $|a_1| = 1$ 以及 $|a_1| > 1$, 其中 $|a_1| = 1$ 的情形起着某种“边界”作用, 其确切的意义将在以后的叙述中明确.

由 (7) 我们求得, 对于 $n - k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}h_n &= a_1^n \mathsf{E}h_0 + a_0(1 + a_1 + \cdots + a_1^{n-1}),\\
\mathsf{D}h_n &= a_1^{2n}\mathsf{D}h_0 + \sigma^2(1 + a_1^2 + \cdots + a_1^{2(n-1)}),\\
\mathsf{Cov}(h_n, h_{n-k}) &= a_1^{2n-k}\mathsf{D}h_0 + \sigma^2 a_1^k(1 + a_1^2 + \cdots + a_1^{2(n-k-1)}).
\end{aligned}$$

由这些公式可见, 在 $|a_1| < 1$ 和 $\mathsf{E}|h_0| < \infty$ 的情形下, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\mathsf{E}h_n = a_1^n \mathsf{E}h_0 + \frac{a_0(1 - a_1^n)}{1 - a_1} \to \frac{a_0}{1 - a_1}$$

并且 (如果 $\mathsf{D}h_0 < \infty$)

$$\mathsf{D}h_n = a_1^{2n}\mathsf{D}h_0 + \frac{\sigma^2(1 - a_1^{2n})}{1 - a_1^2} \to \frac{\sigma^2}{1 - a_1^2},$$

$$\mathsf{Cov}(h_n, h_{n-k}) \to \frac{\sigma^2 a_1^k}{1 - a_1^2}.$$

在这一情形 ($|a_1| < 1$) 下, 序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 0}$ 当 $n \to \infty$ "被平稳化". 尤其是, 如果 h_0 的初始分布是高斯分布,

$$h_0 \sim \mathscr{N}\left(\frac{a_0}{1-a_1}, \frac{\sigma^2}{1-a_1^2}\right),$$

那么 $h = (h_n)_{n\geqslant 0}$ 形成平稳 (既是广义的, 又是狭义的) 高斯序列, 且

$$\mathsf{E}h_n = \frac{a_0}{1-a_1}, \qquad \mathsf{D}h_n = \frac{\sigma^2}{1-a_1^2} \tag{8}$$

以及

$$\mathsf{Cov}(h_n, h_{n+k}) = \frac{\sigma^2 a_1^k}{1-a_1^2}. \tag{9}$$

我们记得, 狭义平稳性理解为对于所有允许的 m 和 k, 满足下列性质:

$$\mathrm{Law}(h_0, h_1, \cdots, h_m) = \mathrm{Law}(h_k, h_{1+k}, \cdots, h_{m+k});$$

而广义平稳性意味着

$$\mathrm{Law}(h_i, h_j) = \mathrm{Law}(h_{i+k}, h_{j+k}).$$

如果

$$\rho(k) = \mathsf{Corr}(h_n, h_{n=k}) = \frac{\mathsf{Cov}(h_n, h_{n+k})}{\sqrt{\mathsf{D}h_n \mathsf{D}h_{n+k}}},$$

那么由 (8) 和 (9) 我们求得, 当 $|a_1| < 1$ 时,

$$\rho(k) = a_1^k, \tag{10}$$

即值 h_n 和 h_{n+k} 之间的相关系数以几何方式递减于零.

如果把表示式 (7) 与上节中的公式 (2) 相比较, 那么可以察觉, 对于每个固定的 n, 模型$AR(1)$ 中的值 h_n 可解释为有 $q = n - 1$ 的模型$MA(q)$ 的对应的值 h_n. 在这一意义下, 有时会含糊地说, "模型$AR(1)$ 可看作模型$MA(\infty)$."

在模型$AR(1)$ 中, 情形 $|a_1| = 1$ 对应经典的随机游走 (比较第一章中的 §2a, 它讨论随机游走假设和有效市场概念). 如果比如设 $a_1 = 1$, 那么

$$h_n = a_0 n + h_0 + \sigma(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n).$$

由此可见,

$$\mathsf{E}h_n = a_0 n + \mathsf{E}h_0$$

以及

$$\mathsf{D}h_n = \sigma^2 n \to \infty, \qquad n \to \infty.$$

情形 $|a_1| > 1$ 是 "爆炸" 情形 (其含义为, 例如均值 $\mathsf{E}h_n$ 和方差 $\mathsf{D}h_n$ 都随 n 的增长而指数增长).

3. 我们现在考察 $p = 2$ 的情形:

$$h_n = a_0 + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \sigma\varepsilon_n. \tag{11}$$

借助于上面引入的算子 L, 这个差分方程可表达为下列形式:

$$(1 - a_1 L - a_2 L^2) h_n = a_0 + \sigma\varepsilon_n. \tag{12}$$

如果 $a_2 = 0$, 那么对应的方程

$$(1 - a_1 L) h_n = a_0 + \sigma\varepsilon_n \tag{13}$$

恰好就是上面考察的$AR(1)$ 的情形.

令 $w_n = a_0 + \sigma\varepsilon_n$. 于是 (13) 有下列形式:

$$(1 - a_1 L) h_n = w_n, \tag{14}$$

并且对这个关系式 "求逆", 自然就有可能对 "输入信号" (w_n) 来求得值 h_n.

基于算子 L 的性质 (参见 §2a 中的第 2 点), 我们求得

$$(1 + a_1 L + a_2^2 L^2 + \cdots + a_1^k L^k)(1 - a_1 L) = (1 - a_1^{k+1} L^{k+1}). \tag{15}$$

对关系式 (13) 的两端作用算子 $1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \cdots + a_1^k L^k$. 于是, 考虑到 (15), 我们得到

$$h_n = (1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \cdots + a_1^k L^k) w_n + a_1^{k+1} L^{k+1} h_n. \tag{16}$$

在这里令 $k = n - 1$ 和 $w_n = a_0 + \sigma\varepsilon_n$, 我们得到等式

$$h_n = (a_0 + \sigma\varepsilon_n) + a_1(a_0 + \sigma\varepsilon_{n-1}) + \cdots + a_1^{n-1}(a_0 + \sigma\varepsilon_1) + a_1^n h_0, \tag{17}$$

它恰好重合于以前求得的表示式 (7).

当 $k = n - 1$ 时, 由 (16) 并考虑 (14), 我们看到

$$h_n = (1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \cdots + a_1^{n-1} L^{n-1})(1 - a_1 L) h_n + a_1^n h_0. \tag{18}$$

如果 $|a_1| < 1$, 且 n 充分大, 那么近似地有

$$h_n \approx (1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \cdots + a_1^{n-1} L^{n-1})(1 - a_1 L) h_n. \tag{19}$$

这样一来, 就可看得很清楚, "逆算子" $(1 - a_1 L)^{-1}$ 自然应该定义为算子 $1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \cdots + a_1^n L^n$ 当 $n \to \infty$ 时 (在适当的意义下) 的极限. (与对于 $|z| < 1$ 的代数表示式 $(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \cdots$ 相比较.)

这些引导性的思考可以例如用下列方式来形式化.

我们考察平稳序列 $\widetilde{h} = (\widetilde{h}_n)$:

$$\widetilde{h}_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_1^j w_{n-j} \tag{20}$$

(级数在均方意义下收敛). 不难看到, $(\widetilde{h}_n)$ 是差分方程 (14) 的解. 我们指出, 在具有有限二阶矩的平稳解类中, 这个解是唯一的.

设 $h = (h_n)$ 是另一个平稳解. 于是由 (16),

$$h_n = \sum_{j=0}^{k} a_1^j w_{n-j} + a_1^{k+1} h_{n-(k+1)}, \tag{21}$$

而这意味着当 $k \to \infty$ 时,

$$\mathsf{E}\left|h_n - \sum_{j=0}^{k} a_1^j w_{n-j}\right|^2 = a_1^{2k+1}\mathsf{E}h_{n-(k+1)}^2 = a_1^{2k+1}\mathsf{E}h_0^2 \to 0. \tag{22}$$

由此和由 (20) 得到, 方程 (13) 的 (具有有限二阶矩的) 平稳解存在且唯一.

4. 所引入的讨论指出, 通过怎样的途经可对差分方程 (12) "求逆", 使得可按照序列 (w_n) 的值来得到序列 (h_n) 的值.

由于对任何 λ_1, λ_2, 有

$$(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)L + \lambda_1\lambda_2 L^2, \tag{23}$$

故通过方程组

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= a_1, \\ \lambda_1\lambda_2 &= -a_2, \end{aligned} \tag{24}$$

确定 λ_1, λ_2, 我们得到

$$1 - a_1 L - a_2 L^2 = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L). \tag{25}$$

由 (24), λ_1 和 λ_2 显然是下列二次方程的根:

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0, \tag{26}$$

即

$$\lambda_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2}.$$

换句话说, $\lambda_1 = z_1^{-1}$, $\lambda_2 = z_2^{-1}$, 其中 z_1, z_2 是下列方程的根:

$$1 - a_1 z - a_2 z^2 = 0, \tag{27}$$

而代数表达式 $1-a_1z-a_2z^2$ 就是由算子表达式 $1-a_1L-a_2L^2$ 对应替换 $L\to z$ 来得到的.

考虑 (25), 方程 (12) 可重新记为下列形式:

$$(1-\lambda_1L)(1-\lambda_2L)h_n=w_n,$$

由此, 在两端 "乘以" $(1-\lambda_2L)^{-1}(1-\lambda_1L)^{-1}$, 我们求得

$$h_n=(1-\lambda_2L)^{-1}(1-\lambda_1L)^{-1}w_n. \tag{28}$$

如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 那么我们就纯形式地得到关系式

$$\frac{1}{(1-\lambda_1L)(1-\lambda_2L)}=(\lambda_1-\lambda_2)^{-1}\left[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1L}-\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2L}\right], \tag{29}$$

因而,

$$h_n=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}(1-\lambda_1L)^{-1}w_n-\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}(1-\lambda_2L)^{-1}w_n. \tag{30}$$

假定 $|\lambda_i|<1$, $i=1,2$, 或者等价地, 假定特征方程 (27) 的根在单位圆周之外, 我们求得

$$(1-\lambda_iL)^{-1}=1+\lambda_iL+\lambda_i^2L^2+\cdots,\qquad i=1,2, \tag{31}$$

而根据 (30), 这意味着方程 (12) 的 (具有有限二阶矩的) 平稳解有下列形式:

$$h_n=\sum_{j=0}^{\infty}(c_1\lambda_1^j+c_2\lambda_2^j)w_{n-j}, \tag{32}$$

其中系数

$$c_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2},\qquad c_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

(这个解是方程 (12) 的唯一平稳解, 其证明与对于方程 (13) 的证明一样.)

5. 最后, 我们转向一般模型 $AR(p)$:

$$h_n=a_0+a_1h_{n-1}+\cdots+a_ph_{n-p}+\sigma\varepsilon_n, \tag{33}$$

或者设 $w_n=a_0+\sigma\varepsilon_n$, 有

$$(1-a_1L-a_2L^2-\cdots-a_pL^p)h_n=w_n. \tag{34}$$

遵循在 $p=1$ 和 $p=2$ 情形下运用的同样的方法, 我们考虑 "因式分解"

$$1-a_1L-a_2L^2-\cdots-a_pL^p=(1-\lambda_1L)(1-\lambda_2L)\cdots(1-\lambda_pL) \tag{35}$$

(其中 λ_i, $i=1,\cdots,p$, 互不相等).

如果 $|\lambda_i| < 1, i = 1, \cdots, p$, 那么由 (34) 我们求得在具有有限二阶矩的解类中的 (按时间) "来自" $-\infty$ 的唯一解:

$$h_n = (1 - \lambda_1 L)^{-1} \cdots (1 - \lambda_p L)^{-1} w_n. \tag{36}$$

数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 是下列方程的根:

$$\lambda^p - a_1 \lambda^{p-1} - \cdots - a_{p-1}\lambda - a_p = 0 \tag{37}$$

(比较 (26)). 运用等价形式, 可以说, $\lambda_i = z_i^{-1}$, 其中 z_i^{-1} 是方程 $1 - a_1 z - a_2 z^2 - \cdots - a_p z^p = 0$ 的根 (比较 (27)).

如果这个方程的所有根都在单位圆周之外, 那么我们就得到平稳解 $h = (h_n)$.

为了得到 (30) 或 (32) 类型的表示式, 我们考察分解式 (29) 的类似

$$\frac{1}{(1 - \lambda_1 z) \cdots (1 - \lambda_p z)} = \frac{c_1}{1 - \lambda_1 z} + \cdots + \frac{c_p}{1 - \lambda_p z}, \tag{38}$$

其中 $c_1, \cdots, c_p$ 是待定常数.

在 (38) 的等式两端乘上 $(1 - \lambda_1 z) \cdots (1 - \lambda_p)$, 我们看到, 常数 $c_1, \cdots, c_p$ 必定对于所有 z 满足

$$1 = \sum_{i=1}^{p} c_i \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ k \neq i}} (1 - \lambda_k z). \tag{39}$$

这个等式对于所有 z 都满足, 尤其是对于 $z = \lambda_1^{-1}, \cdots, z = \lambda_p^{-1}$ 满足; 由此给出 $c_1, \cdots, c_p$ 的下列值:

$$c_i = \frac{\lambda_i^{p-1}}{\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ k \neq i}} (\lambda_i - \lambda_k)}. \tag{40}$$

(我们察觉 $c_1 + \cdots + c_p = 1$.)

由 (36), (38) 和 (40), 我们得到

$$h_n = \sum_{l=0}^{\infty} (c_1 \lambda_1^l + \cdots + c_p \lambda_p^l) w_{n-l}, \tag{41}$$

它把 (32) 推广到 $p \geqslant 2$ 的情形.

表示式 (41) 使得有可能来计算序列 $h = (h_n)$ 的各种数字特征, 诸如 $\mathsf{E} h_n^k$, 协方差, 条件数学期望 $\mathsf{E}(h_{n+k} \mid \mathscr{F}_n)$ $(\mathscr{F}_n = \sigma(\cdots, w_{-1}, w_0, \cdots, w_n))$ 等等.

在平稳性假定下, 矩 $\mathsf{E} h_n \equiv \mu$ 容易直接由 (33) 求得:

$$\mu = \frac{a_0}{1 - (a_1 + \cdots + a_p)}. \tag{42}$$

至于协方差 $\mathsf{R}(k) = \mathsf{Cov}(h_n, h_{n+k})$, 则由 (33) 也可容易求得对于 $k = 1, 2, \cdots$, 有

$$\mathsf{R}(k) = a_1 \mathsf{R}(k-1) + \cdots + a_p \mathsf{R}(k-p). \tag{43}$$

如果 $k=0$, 那么

$$\mathsf{R}(0)=a_1\mathsf{R}(1)+\cdots+a_p\mathsf{R}(p)+\sigma^2. \tag{44}$$

对于相关函数 $\rho(k)$, $k\geqslant 0$, 也有同样的方程 (43) 和 (44) 成立, 它们就是所谓*Yule-Walker 方程* (G. U. Yule, G. T. Walker; [271]).

6. 自回归模式$AR(q)$ 的统计的中心问题之一是 (1) 和 (2) 中的参数 $\theta=(a_0, a_1,\cdots,a_p,\sigma)$ 的估计, 这里现在为了确定起见, 我们将认为 $h_0,h_{-1},\cdots$ 是已知常数.

如果假定广义白噪声 $\varepsilon=(\varepsilon_n)$ 是高斯噪声, 那么基本估计方法是最大似然法. 根据这一方法, 参数 θ (在观察值为 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 的条件下) 取值为

$$\widehat{\theta}_n=\arg\max_\theta p_\theta(h_1,h_2,\cdots,h_n),$$

其中 $p_\theta(h_1,h_2,\cdots,h_n)$ 是 (高斯) 向量 $(h_1,h_2,\cdots,h_n)$ 的联合密度.

与最大似然法相联系的一般原理可以以$AR(1)$ 为例来说明, 其中 $h_n=a_0+a_1h_{n-1}+\sigma\varepsilon_n$, 并且 σ 将认为是已知参数 $(\sigma>0)$, $h_0=0$, $n\geqslant 1$.

由于这里 $\theta=(a_0,a_1)$, 故

$$p_\theta(h_1,\cdots,h_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\frac{(h_k-a_0-a_1h_{k-1})^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

不难看出, 估计 $\widehat{\theta}=(\widehat{a}_0,\widehat{a}_1)$ 可转化为由下列函数的最小值条件来得到:

$$\psi(a_0,a_1)=\sum_{k=1}^n(h_k-a_0-a_1h_{k-1})^2.$$

设 $a_0\in\mathbb{R}$ 和 $a_1\in\mathbb{R}$, 我们看到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial a_0}=0 &\iff 2\sum_{k=1}^n(h_k-a_0-a_1h_{k-1})=0,\\ \frac{\partial\psi}{\partial a_1}=0 &\iff 2\sum_{k=1}^n(h_k-a_0-a_1h_{k-1})h_{k-1}=0.\end{aligned} \tag{45}$$

解这个线性方程组, 我们就求得 $\widehat{a}_0$ 和 $\widehat{a}_1$.

我们把注意力集中到参数 a_1 估计量 $\widehat{a}_1=\widehat{a}_1(h_1,\cdots,h_n)$, $n\geqslant 1$, 并为了简化叙述, 认为参数 a_0 已知 $(a_0=0)$, 而 $\sigma=1$.

在这些假定下, $h_n=a_1h_{n-1}+\varepsilon_n$, 并且由 (45) 我们求得

$$\widehat{a}_1=\frac{\sum_{k=1}^n h_{k-1}h_k}{\sum_{k=1}^n h_{k-1}^2}.$$

也就是,

$$\widehat{a}_1=a_1+\frac{\sum_{k=1}^n h_{k-1}\varepsilon_k}{\sum_{k=1}^n h_{k-1}^2}.$$

令

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} h_{k-1}\varepsilon_k.$$

序列 $M = (M_n)$ (对任何参数值 a_1) 是鞅, 其平方特征为

$$\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} h_{k-1}^2.$$

因此, 如果 a_1 是原来的未知参数值, 那么

$$\widehat{a}_1 = a_1 + \frac{M_n}{\langle M\rangle_n}. \tag{46}$$

由这个表示式我们看到, 最大似然估计量 $\widehat{a}_1$ 是强相容估计, 即, 当 $n \to \infty$ 时, 以概率 1 有 $\widehat{a}_1 \to a_1$; 这是因为 $\langle M\rangle_n \to \infty$ (P-a.s.), 并且根据对于平方可积鞅的强大数定律 ([439; 第 VII 章, §5]; 也可比较 §1b 中的 (12)),

$$\frac{M_n}{\langle M\rangle_n} \to 0 \qquad (\text{P-a.s.}).$$

如果在所考察的情形 ($a_0 = 0$, $\sigma = 1$) 下, 计算*Fisher* 信息

$$I_n(a_1) = \mathsf{E}_{a_1}\left\{-\frac{\partial^2 \ln \mathsf{P}_{a_1}(h_1, \cdots, h_n)}{\partial a_1^2}\right\},$$

其中 E_{a_1} 是对测度

$$\mathsf{P}_{a_1} = \mathrm{Law}(h_1, \cdots, h_n \,|\, \theta = a_1)$$

的数学期望, 那么我们求得

$$I_n(a_1) = \mathsf{E}_{a_1}\langle M\rangle_n = \mathsf{E}_{a_1}\sum_{k=1}^{n} h_{k-1}^2.$$

利用上面对于 $\mathsf{E}h_{k-1}$ 和 $\mathsf{D}h_{k-1}$ 所引入的公式, 我们得到

$$I_n(a_1) \sim \begin{cases} \dfrac{n}{1-a_1^2}, & |a_1| < 1, \\ \dfrac{n^2}{2}, & |a_1| = 1, \\ \dfrac{a_1^{2n}}{(a_1^2-1)^2}, & |a_1| > 1. \end{cases} \tag{47}$$

正如我们所看到的, 情形 $|a_1| = 1$ 在某种意义下, 是特殊的 "边界" 状态. 在这一情形下, $h = (h_n)$ 是随机游走 (比较第一章中的 §2a: 随机游走假设和有效市场概念). 当 $|a_1| \neq 1$ 时, 对应的序列 $h = (h_n)$ 是 Markov 序列. 这时, 在情形 $|a_1| < 1$ 下, 当 $n \to \infty$ 时, 序列 $h = (h_n)$ 被 "平稳化".

这点说明了在序列 $h = (h_n)$ 的统计中, 为什么人们要对求解下列问题尤为注意: 两个假设

$$H_0\colon |a_1| = 1 \quad \text{或者} \quad H_1\colon |a_1| > 1$$

中的哪一个更有可能?

在计量经济学的文献中, 其中包括那些有关金融模型的文献, 与是否有 $|a_1| = 1$ 相联系的一系列问题常称为 "单位根 (unit root) 问题".

我们 (不加证明, 其详情例如可在 [445], [452] 以及在这些著作中所引的相应文献中找到) 介绍某些关于偏差 $\widehat{a}_1 - a_1$ 的极限分布的结果.

定理 1. 当 $n \to \infty$ 时,

$$\lim_n \mathsf{P}_{a_1}\{\sqrt{I_n(a_1)}(\widehat{a}_1 - a_1) \leqslant x\} = \begin{cases} \Phi(x), & |a_1| < 1, \\ \mathrm{H}_{a_1}(x), & |a_1 = 1, \\ \mathrm{Ch}(x), & |a_1| > 1, \end{cases} \tag{48}$$

其中 $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_{(0,1)}(y)dy$ 是标准正态分布, $\mathrm{Ch}(x)$ 是密度为 $\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ 的 Cauchy 分布以及 $\mathrm{H}_{a_1}(x)$ 是随机变量

$$a_1 \frac{W^2(1) - 1}{2\sqrt{2}\displaystyle\int_0^1 W^2(s)ds}$$

的分布, 这里 $(W(s))_{s \leqslant 1}$ 是标准维纳过程 (布朗运动; 参见第三章 §3a).

值得注意的是, 当 $|a_1| \neq 1$ 时, 极限分布密度关于零点对称. 然而, 分布密度 $\mathrm{H}_{a_1}(x)$ 是非对称的. (这点容易由观察到 $\mathsf{P}(W^2(1) - 1 > 0) \neq \frac{1}{2}$ 而发现.)

下列结果指出, 借助于偏差 $(\widehat{a}_1 - a_1)$ 的随机正态化 (其含义在于运用随机 Fisher 信息 $\langle M \rangle_n$ 来取代 Fisher 信息 $I_n(a_1)$), 可以仅仅得到两种极限分布, 而不再是 (48) 中的三种.

定理 2. 当 $n \to \infty$ 时,

$$\lim_n \mathsf{P}_{a_1}\{\sqrt{\langle M \rangle_n}(\widehat{a}_1 - a_1) \leqslant x\} = \begin{cases} \Phi(x), & |a_1| \neq 1, \\ \mathrm{H}'_{a_1}(x), & |a_1| = 1, \end{cases} \tag{49}$$

其中 $\mathrm{H}'_{a_1}(x)$ 是随机变量

$$a_1 \frac{W^2(1) - 1}{2\sqrt{\displaystyle\int_0^1 W^2(s)ds}}$$

的概率分布.

最后, 除了随机正态化以外再运用序贯最大似然估计量, 就导致唯一的极限正态分布.

定理 3. 设 $\theta > 0$,

$$\tau(\theta) = \inf\{n \geqslant 1 \colon \langle M\rangle_n \geqslant \theta\} \tag{50}$$

以及

$$\widehat{a}_1(\tau(\theta)) = \frac{\sum_{k=1}^{\tau(\theta)} h_{k-1}h_k}{\sum_{k=1}^{\tau(\theta)} h_{k-1}^2} \tag{51}$$

是序贯最大似然估计量. 那么对于任何值 $a_1 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}_{a_1}\left\{\sqrt{\langle M\rangle_{\tau(\theta)}}[\widehat{a}_1(\tau(\theta)) - a_1] \leqslant x\right\} = \Phi(x). \tag{52}$$

我们把这个结果与断言 (48) 作比较.

如果原来的时间参数是 "时间" n, 那么参数 θ 可看作根据随机 Fisher 信息 $\langle M\rangle$ 来确定的 "新的"、"运作" 时间. 我们察觉, Fisher 信息改变较小的 (大) 时间区间, 在 "新的 θ-时间" 中对应较小的区间, 反之也一样. 因此, 在 "新的"、"运作" 时间中, 信息流变得均匀一致. 在这个 "新的" θ-时间中, 所获得的数据变得有 "同等价值", 在某种意义下对于所有参数值 a_1 来说 "同分布", 并且归根到底, 确立了极限分布是唯一的和正态的.

关于 "新" 时间的有关问题我们以后在第四章 §3d 中再来讨论; 在那里我们将针对汇率数据的 "平坦化", 来足够详细地阐述这一时间转换的含义, 其中周期特征以其 "地理" 成分性态清晰可见.

7. 关于最大似然估计量的性质的补充信息可由下列结果得到 (参见 [258], [445], [452]).

首先是

$$\sup_{a_1\in\mathbb{R}} \mathsf{E}_{a_1}|\widehat{a}_1 - a_1| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

其次, 设 $U(a_1)$ 是估计量 $\widetilde{a}_1$ 的类, 对于它的偏移

$$b_{a_1}(\widetilde{a}_1) \equiv \mathsf{E}_{a_1}(\widetilde{a}_1 - a_1) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

以及

$$\frac{db_{a_1}}{da_1}(\widetilde{a}_1) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

(最大似然估计量 $\widehat{a}_1$ 当 $|a_1| \neq 1$ 时属于类 $U(a_1)$.)

对于 $|a_1| \neq 1$, 最大似然估计量 $\widehat{a}_1$ 在类 $U(a_1)$ 中按下列意义渐近有效: 对于所有 $\widetilde{a}_1 \in U(a_1)$,

$$\overline{\lim_{n}} \frac{\mathsf{E}_{a_1}\langle M\rangle_n(\widehat{a}_1 - a_1)^2}{\mathsf{E}_{a_1}\langle M\rangle_n(\widetilde{a}_1 - a_1)^2} \leqslant 1.$$

对于 $|a_1| < 1$ ("平稳" 情形), 估计量 $\widehat{a}_1$ 也在通常意义下渐近有效: 对于所有 $\widetilde{a}_1 \in U(a_1)$,

$$\overline{\lim_n} \frac{\mathsf{D}_{a_1}\widehat{a}_1}{\mathsf{D}_{a_1}\widetilde{a}_1} \leqslant 1.$$

序贯最大似然估计量具有下列渐近一致性质: 当 $\theta \to \infty$ 时,

$$\sup_{|a_1|\leqslant 1} \sup_x \left| \mathsf{P}_{a_1}\left\{ \sqrt{\langle M\rangle_{\tau(\theta)}}[\widehat{a}_1(\tau(\theta)) - a_1] \leqslant x \right\} - \Phi(x) \right| \to 0,$$

$$\sup_{1<r\leqslant|a_1|\leqslant R} \sup_x \left| \mathsf{P}_{a_1}\left\{ \sqrt{\langle M\rangle_{\tau(\theta)}}[\widehat{a}_1(\tau(\theta)) - a_1] \leqslant x \right\} - \Phi(x) \right| \to 0.$$

§2c. 自回归移动平均模型 $ARMA(p,q)$ 和整合模型 $ARIMA(p,d,q)$

1. 这些模型体现了上面考察的两种模型$MA(q)$ 和$AR(p)$ 的特点, 使得构造模型时有足够广阔的可能性, 来 "很好" 说明统计 "原材料" 的概率本性.

与上面一样, 假定有给定的渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathsf{P})$, 其中目前方便地认为 $\mathscr{F}_n = \sigma(\cdots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 联系着 (广义) "白噪声" $\varepsilon = (\varepsilon_n)$.

根据定义 (比较 §1d), 序列 $h = (h_n)$ 为$ARMA$ 模型, 是指

$$h_n = \mu_n + \sigma\varepsilon_n, \tag{1}$$

其中

$$\mu_n = (a_0 + a_1 h_{n-1} + \cdots + a_p h_{n-p}) + (b_1\varepsilon_{n-1} + b_2\varepsilon_{n-2} + \cdots + b_q\varepsilon_{n-q}). \tag{2}$$

不妨害一般性, 值 σ 可假定为已知并等于 1: $\sigma = 1$. 于是由 (1) 和 (2), 我们求得

$$\begin{aligned} h_n &- (a_1 h_{n-1} + \cdots + a_p h_{n-p}) \\ &= a_0 + [\varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1} + b_2\varepsilon_{n-2} + \cdots + b_q\varepsilon_{n-q}] \end{aligned} \tag{3}$$

或者

$$\alpha(L)h_n = a_0 + \beta(L)\varepsilon_n, \tag{4}$$

其中

$$\alpha(L) = 1 - a_1 L - \cdots - a_p L^p \tag{5}$$

以及

$$\beta(L) = 1 + b_1 L + \cdots + b_q L^q. \tag{6}$$

我们注意到, 在 $q = 0$ 的情形下,

$$\alpha(L)h_n = w_n,$$

这里 $w_n = a_0 + \varepsilon_n$, 即, 我们得到$AR(p)$ 模型. (比较 §2b 中的 (5).)

同样, 在 $p = 0$ 的情形下, 关系式 (3) 取下列形式:

$$h_n = a_0 + \beta(L)\varepsilon_n, \tag{7}$$

即, 变为$MA(q)$ 模型. (比较 §2a 中的 (4).)

由 (4) 通过形式求逆, 我们求得

$$h_n = \mu + \frac{\beta(L)}{\alpha(L)}\varepsilon_n, \tag{8}$$

其中

$$\mu = \frac{a_0}{1 - (a_1 + \cdots + a_p)} \tag{9}$$

(假定 $a_1 + \cdots + a_p \neq 1$).

现在转向方程 (3) 的 (L^2 类中的) 平稳解的存在问题. 由 (8) 和上面 (在 §2b 的第 5 点中) 的讨论得到, "平稳性" 由算子 $\alpha(L)$ 的性质所决定, 即由$ARMA(p,q)$ 模型的自回归成分所决定.

如果 §2b 中的方程 (37) 的所有根按其模都小于 1 (对此必须有 $a_1+\cdots+a_p \neq 1$), 那么这时对这个模型 (在 L^2 类中) 存在唯一的平稳解 $h = (h_n)$.

由 (8) 我们得到, 对于平稳解,

$$\mathsf{E}h_n = \frac{a_0}{1 - (a_1 + \cdots + a_p)}. \tag{10}$$

(比较 §2b 中的 (42).)

由 (3) 不难求得, 对于 $k > q$ 的协方差 $\mathsf{R}(k) = \mathsf{Cov}(h_n, h_{n+k})$ 满足关系式

$$\mathsf{R}(k) = a_1\mathsf{R}(k-1) + \cdots + a_p\mathsf{R}(k-p), \tag{11}$$

它与在模型$AR(p)$ 的情形下一样. (比较 §2b 中的 (43).)

2. 我们考察模型$AR(1)$ 和$MA(1)$ 的下列组合$ARMA(1,1)$ 来作为说明:

$$h_n - a_1 h_{n-1} = a_0 + \varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1}. \tag{12}$$

我们将假定 $|a_1| < 1$ ("平稳性"). 在这一情形下,

$$\alpha(L) = 1 - a_1 L, \qquad \beta(L) = 1 + b_1 L, \tag{13}$$

以及 (8) 取下列形式:

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{1+b_1L}{1-a_1L}\varepsilon_n \\ &= \frac{a_0}{1-a_1} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_1^k L^k\right)(1+b_1L)\varepsilon_n \\ &= \frac{a_0}{1-a_1} + (a_1+b_1)\sum_{k=1}^{\infty} a_1^{k-1}\varepsilon_{n-k} + \varepsilon_n. \end{aligned} \tag{14}$$

由此直接求得 $\mathsf{R}(k) = \mathsf{Cov}(h_n, h_{n+k})$ 满足下列关系式:

$$\begin{aligned} &\mathsf{R}(k) = a_1\mathsf{R}(k-1), \qquad k \geqslant 2, \\ &\mathsf{R}(1) = a_1\mathsf{R}(0) + b_1, \\ &\mathsf{R}(0) = a_1\mathsf{R}(1) + (1 + a_1b_1 + b_1^2). \end{aligned} \tag{15}$$

由此得到

$$\mathsf{R}(0) = \mathsf{D}h_n = \frac{1+2a_1b_1+b_1^2}{1-a_1^2}$$

以及

$$\rho(k) = \frac{\mathsf{R}(k)}{\mathsf{R}(0)} = \frac{(1+a_1b_1)(a_1+b_1)}{1+2a_1b_1+b_1^2}a_1^{k-1}. \tag{16}$$

在拟合具体的统计数据时, 试图利用模型$ARMA(1,1)$ (以至更一般的模型$ARMA(p,q)$) 时, 重要的是要注意到, 当 $|a_1| < 1$ 时, 相关系数随着 $k \to \infty$ 而以几何方式递减.

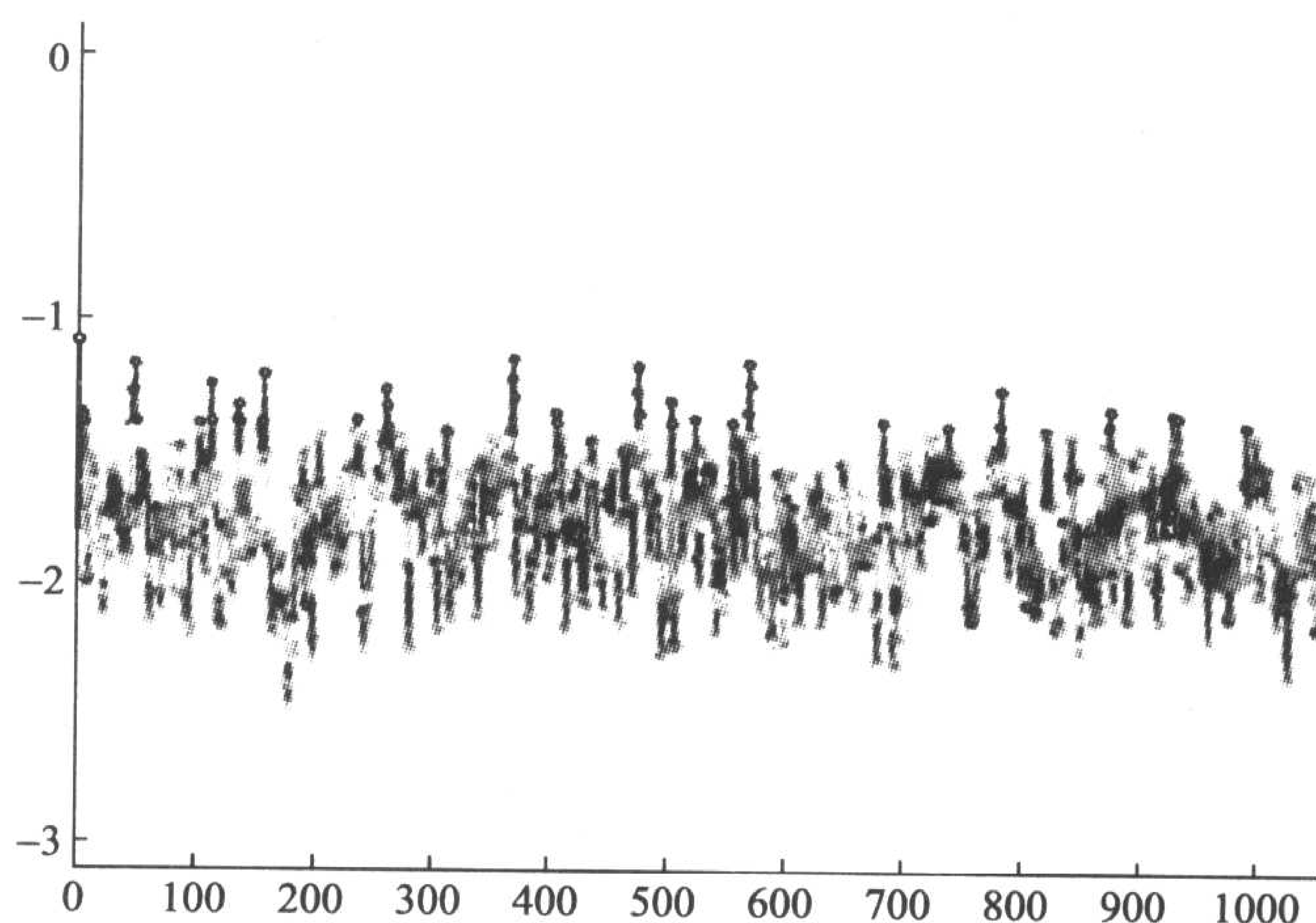


图 20 服从$ARMA(1,1)$ 模型 $h_n = a_0 + a_1h_{n-1} + b_1\varepsilon_{n-1} + \sigma\varepsilon_n$ 的序列 $h = (h_n)$ 的计算机仿真图像, 其中参数 $a_0 = -1$, $a_1 = 0.5$, $b_1 = 0.1$, $\sigma = 0.1$; $h_0 = h_1 = 0$; 以及 $2 \leqslant n \leqslant 1000$

3. 上面考察的模型$ARMA(p,q)$ 已得到充分研究和成功应用, 主要用来描述平稳时间序列. 在时间序列 $x=(x_n)$ 中有非平稳性的情形下, 有时简单地取差分 $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ 或者 d 阶差分 $\Delta^d x_n$ 就可成功地得到 "较" 平稳的序列 $\Delta^d x = (\Delta^d x_n)$.

对此联系下列术语: 我们说序列 $x=(x_n)$ 是$ARIMA(p,d,q)$ 模型, 是指 $\Delta^d x = (\Delta^d x_n)$ 形成$ARMA(p,q)$ 模型.

在一种符号形式下, 这可表示为下列样式:

$$\Delta^d ARIMA(p,d,q) = ARMA(p,q).$$

为了揭示这一模型的含义, 我们考察它的特殊情形: 模型$ARIMA(0,1,1)$. 这意味着 $\Delta x_n = h_n$, 而 (h_n) 服从模型$MA(1)$, 即,

$$\Delta x_n = \mu + (b_0 + b_1 L)\varepsilon_n.$$

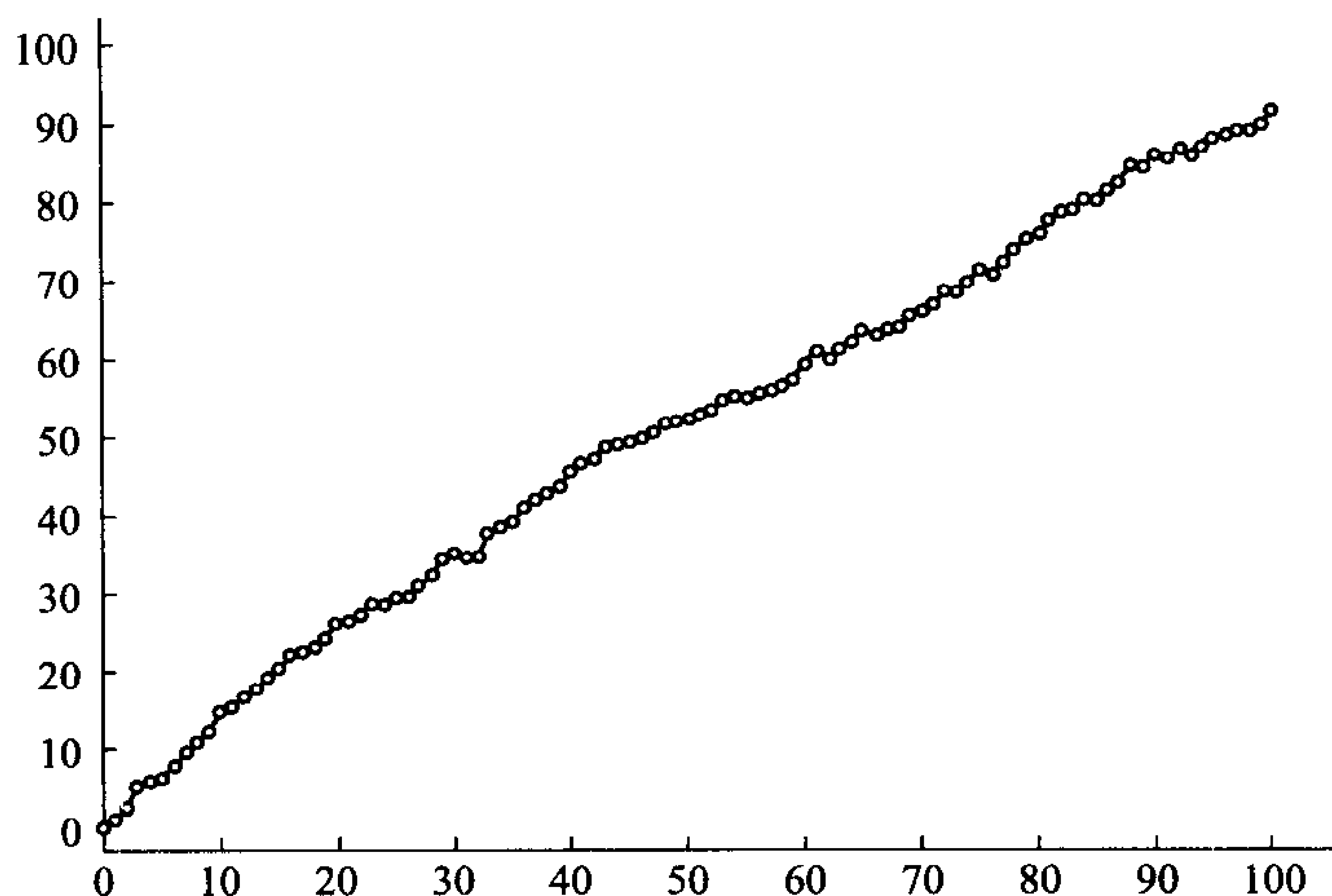


图 21 服从$ARIMA(0,1,1)$ 模型 $\Delta x_n = \mu + b_1\varepsilon_{n-1} + b_0\varepsilon_n$ 的序列 $x=(x_n)$ 的计算机仿真图像, 其中参数 $\mu = 1$, $b_1 = 1$, $b_0 = 0.1$; $x_0 = 0$

如果引入求和算子 ("积分" 或 "整合 (integration)" 算子) S, 它由公式 $S = \Delta^{-1}$ 来定义, 或者等价地定义为

$$S = 1 + L + L^2 + \cdots = (1-L)^{-1},$$

那么形式上可记为

$$x_n = (Sh)_n,$$

其中 $h_n = \mu + (b_0 + b_1 L)\varepsilon_n = \mu + b_0\varepsilon_n + b_1\varepsilon_{n-1}$.

这样, $x=(x_n)$ 就可看作服从模型$MA(1)$ 的序列 $h=(h_n)$ 的 "整合" 结果, 它也说明了$ARIMA$ 这一称号的来源:

$$ARIMA = AR + I + MA,$$

其中字母 I 来自 “Integrated (整合)”. (比较图 18 和 21.)

正如已经注意到, 这些模型在 Box-Jenkins 理论 [53] 中被广泛运用. 在金融数据统计中应用这些模型的更多的资料例如可参见 [351].

§2d. 线性模型中的预测

1. 在本节的引言中, 曾注意到, (根据 “过去的” 数据) 构造概率统计模型不是一个自我目标, 而是归根结底它对于给出 “未来” 价格运动的预测是必要的.

在极为稀罕的情形下, 才可能根据 “过去” 数据给出无误差的预测. (这样的局面例如为所谓奇异平稳序列所固有; 参见后面的第 4 点, 以及详见例如, [439; 第 VI 章].)

当然, 典型的情形是, 在给出这样那样的预测时, 我们不可避免地定出某种误差, 它的大小确定了基于所得到的预测所作决策的风险程度.

2. 在线性平稳模型中, 有一种精心制作 (和漂亮的) (均方意义下) 最优线性估计量构造理论; 它主要是在 A. N. Kolmogorov 和 N. Wiener (维纳) 的著作中发展起来的.

正如我们在上面看到, 许多被考察的序列可表示为单边移动平均形式:

$$h_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{1}$$

其中 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, 而某个 “基底” 序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 是广义白噪声. (对于模型$MA(q)$, $MA(\infty)$ 参见 §2a 中的 (15); 对于模型$AR(p)$ 参见 §2b 中的 (41); 对于模型 $ARMA(p, q)$ 参见 §2c 中的 (8).)

为了叙述有关这样的序列的外推的结果, 我们需要某些记号和概念.

如果 $\xi = (\xi_n)$ 是随机序列, 那么记 $\mathscr{F}_n^\xi = \sigma(\cdots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ 是由 “过去的” $\{\xi_k,\ k \leqslant n\}$ 所生成的 σ-代数; $\mathscr{F}_{\infty-}^\xi = \bigvee \mathscr{F}_n^\xi$ 是所有量 $\xi = (\xi_n)$ 所生成的 σ-代数; H_n^ξ 是量 $\{\xi_k,\ k \leqslant n\}$ (在 L^2 中) 所生成的闭线性流形 $\overline{\mathscr{L}}(\cdots, \xi_{n-1}, \xi_n)$, 以及 H_∞^ξ 是所有量 $\xi = (\xi_n)$ 所生成的闭线性流形, 即, $H_\infty^\xi = \overline{\mathscr{L}}(\xi_k,\ k < \infty)$.

设 $\eta = \eta(\omega)$ 是具有有限二阶矩的某个随机变量, $\mathsf{E}\eta^2(\omega) < \infty$. 我们提出根据观察序列 ξ 来估计随机变量 η 的课题.

这里最为流行的是下面两种方法.

如果值 $(\cdots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ 是应当观察的, 那么在第一种方法中, 取所有 $\mathscr{F}_n^\xi$-可测估计量 $\widetilde{\eta}_n$ 作为估计量, 然后在其中取最佳 (最优) 的 $\widehat{\eta}_n$, 它达到均方偏差的最小值:

$$\mathsf{E}|\eta - \widehat{\eta}_n|^2 = \inf_{\widetilde{\eta}_n} \mathsf{E}|\eta - \widetilde{\eta}_n|^2. \tag{2}$$

如所周知, 在这一意义下的最优估计量有下列形式:

$$\widehat{\eta}_n = \mathsf{E}(\eta \mid \mathscr{F}_n^\xi), \tag{3}$$

其中 $\mathsf{E}(\cdot|\cdot)$ 是条件数学期望, 它一般来说, 是观察值 $(\cdots,\xi_{n-1},\xi_n)$ 的非线性函数. (对于充分广的随机过程类的最优非线性滤波、外推和内插问题例如在 [303] 中讨论.)

在另一种我们现在关注的方法中, 被考虑的仅仅是线性估计量, 即 H_n^ξ 中的函数, 而 H_n^ξ 的元素 (按照定义) 或者是量 $\{\xi_k, k\leqslant n\}$ 的有限线性组合, 或者是它们的 L^2-极限.

类似于 (2), 量 η 的最佳 (最优) 线性估计量 $\widehat{\lambda}_n\in H_n^\xi$, 它使得

$$\mathsf{E}|\eta-\widehat{\lambda}_n|^2=\inf_{\widetilde{\lambda}_n\in H_n^\xi}\mathsf{E}|\eta-\widetilde{\lambda}_n|^2. \tag{4}$$

这时, 对于 $\widehat{\lambda}_n$ 采用下列记号 (比较 (3)):

$$\widehat{\lambda}_n=\widehat{\mathsf{E}}(\eta|H_n^\xi), \tag{5}$$

其中 $\widehat{\mathsf{E}}(\cdot|\cdot)$ 是广义条件数学期望.

3. 我们回到 h_n $(n\geqslant 1)$ 的 (线性) 预测值问题上, 其中序列 $h=(h_n)$ 可用公式 (1) 来描述, 而所依据的 "信息" 是时刻 0 以前的. 当所有 "过去的信息" 不是由 $h=(h_n)_{n\leqslant 0}$, 而是由 $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\leqslant 0}$ 生成时, 即, 考虑

$$H_0^\varepsilon=\overline{\mathscr{L}}(\cdots,\varepsilon_{-1},\varepsilon_0)$$

时, 这个问题的求解比较简单:

事实上,

$$\begin{aligned}\widehat{h}_n^{(\varepsilon)}\equiv\widehat{\mathsf{E}}(h_n|H_0^\varepsilon)&=\widehat{\mathsf{E}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k\varepsilon_{n-k}+\sum_{k=n}^{\infty}a_k\varepsilon_{n-k}\,\Big|\,H_0^\varepsilon\right)\\&=\sum_{k=n}^{\infty}a_k\varepsilon_{n-k}+\widehat{\mathsf{E}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}a_k\varepsilon_{n-k}\,\Big|\,H_0^\varepsilon\right)=\sum_{k=n}^{\infty}a_k\varepsilon_{n-k},\end{aligned} \tag{6}$$

这是因为对于 $i\geqslant 1$, 有

$$\widehat{\mathsf{E}}(\varepsilon_i|H_0^\varepsilon)=\mathsf{E}\varepsilon_i(=0),$$

它容易由 "白噪声" $\varepsilon=(\varepsilon_i)$ 的成分的正交性得到.

这时, 不难求得外推误差为

$$\sigma_n^2=\mathsf{E}|h_n-\widehat{\mathsf{E}}(h_n|H_0^\varepsilon)|^2=\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|^2.$$

很明显, $\sigma_n^2\leqslant\sigma_{n+1}^2$, 并且

$$\lim_n\sigma_n^2=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\,(=\mathsf{E}h_n^2).$$

由此得到, 随着 n 的增长, "过去的信息" $H_0^\varepsilon = \overline{\mathscr{L}}(\cdots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_0)$ 在预测量 h_n 的值中, 作用变得 "越来越小", 并在极限情形 $(n \to \infty)$ 下, 应该干脆取数学期望来作为最佳估计量, 即在所考察的情形下为零.

当然, 外推问题不仅仅是对无限个值 $\{\varepsilon_k, k \leqslant 0\}$ 提出的, 它也对某有限个值 (例如 $\{\varepsilon_k, l \leqslant k \leqslant 0\}$) 来提出, 这样更有意义. 然而, 应该注意到, 这后一个问题在技巧上要比我们现在所考察的更加复杂.

所得到的表示式为

$$\widehat{h}_n^{(\varepsilon)} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{7}$$

它解决了量 h_n 根据 (线性) "信息" H_0^ε (而不是包含在 $\overline{\mathscr{L}}(\cdots, h_{-1}, h_0)$ 中的 "信息" H_0^h) 的外推问题.

当然, 很明显, 如果假定

$$H_0^\varepsilon = H_0^h, \tag{8}$$

那么至少在原理上, 由 (7) 也可得到形为 $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \widehat{a}_k h_{n-k}$ 的对应估计量 $\widehat{\mathsf{E}}(h_n | H_0^h)$.

4. 联系所作的假定 (1) 和 (8), 这里适宜再提起某些平稳随机序列理论的一般结果.

设 $\xi = (\xi_n)$ 是某个 (广义) 平稳序列.

每个元素 $\eta \in H(\xi)$ 可表示为两个正交成分之和的形式:

$$\eta = \widehat{\mathsf{E}}(\eta | S(\xi)) + [\eta - \widehat{\mathsf{E}}(\eta | S(\xi))],$$

其中 $S(\xi) = \bigcap_n H_n^\xi$ 是包含在 "无限远过去" 中的 (线性) 信息. 以 $R(\xi)$ 表示形为 $\eta - \widehat{\mathsf{E}}(\eta | S(\xi))$ 的元素集合, 其中 $\eta \in H(\xi)$, 我们求得, 集合 $H(\xi)$ 本身可表示为正交和: $H(\xi) = S(\xi) \oplus R(\xi)$.

平稳序列 $\xi = (\xi_n)$ 称为*正则的*, 是指 $H(\xi) = R(\xi)$, 而称为*奇异的*, 是指 $H(\xi) = S(\xi)$.

条件 $H(\xi) = S(\xi)$ 的直观含义非常清楚: 它意味着由序列 ξ 的值所提供的所有信息, "位于无限远过去". 因此, 奇异序列也称为*纯决定的*或者*完全决定的*. 当子空间 $S(\xi) = \varnothing$, 即 $H(\xi) = R(\xi)$ 时, 序列 ξ 称为*纯不决定的*或者*完全不决定的*.

所引入的概念的内容在下列结果中揭示.

命题 1. *每个非退化广义平稳随机序列* $\xi = (\xi_n)$ *有且仅有唯一的分解*

$$\xi_n = \xi_n^r + \xi_n^s,$$

其中 $\xi^r = (\xi_n^r)$ *是正则序列, 而* $\xi^s = (\xi_n^s)$ *是奇异序列; 这时,* ξ^r *和* ξ^s *是正交的* $(\mathsf{Cov}(\xi_n^r, \xi_m^s) = 0$ *对于所有* n *和* m *成立*$)$.

(详情参见 [439; 第 VI 章 §5].)

我们引入下列重要的

定义. 随机序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 称为对于 $\xi = (\xi_n)$ 的更新序列, 是指

a) $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 是广义白噪声, 即 $\mathsf{E}\varepsilon_n = 0$, $\mathsf{E}\varepsilon_n\varepsilon_m = 0$, $n \neq m$, $\mathsf{E}|\varepsilon_n|^2 = 1$;

b) $H_n^\xi = H_n^\varepsilon$ 对于所有 n 都成立.

术语 "更新" 的直观含义在于: 由序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 的元素的正交性, ε_{n+1} 可看作那种 ("新的") "更新" 了包含在 H_n^ε 中的信息的信息, 并给出了形成 H_{n+1}^ε 的可能性. 既然 $H_n^\xi = H_n^\varepsilon$ 对于所有 n 成立, 故同样有 ε_{n+1} 也 "更新" 了 H_n^ξ 中的信息. (比较第一章中的 §2a, 其中考察了随机游走假设, 并讨论了有效市场的概念.)

下列命题建立了上面引入的这些概念之间的联系.

命题 2. 非退化序列 $\xi = (\xi_n)$ 正则的充要条件为可求得这样的更新序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 以及数 $(a_k)_{k\geqslant 0}$, 满足 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, 使得 (P-a.s.)

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}. \tag{9}$$

(证明参见例如 [439; 第 VI 章, §5.)

由上述两个命题直接导出

命题 3. 如果 $\xi = (\xi_n)$ 是非退化平稳序列, 那么它有 *Wold* 展开:

$$\xi_n = \xi_n^s + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{10}$$

其中 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty$ 以及 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 是某个 (对于 ξ^r 的) 更新序列.

5. 如果假定序列 $h = (h_n)$ 有带 (对于 h 的) 更新序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 的表示式 (1), 那么

$$\widehat{h}_n \equiv \widehat{\mathsf{E}}(h_n|H_0^h) = \widehat{\mathsf{E}}(h_n|H_0^\varepsilon) \ \left(= \widehat{h}_n^{(\varepsilon)}\right).$$

由 (6), 它意味着,

$$\widehat{h}_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k} = \sum_{k=n}^{\infty} \widehat{a}_k^{(n)} h_{n-k}, \tag{11}$$

其中后一个等式是由 $H_n^\varepsilon = H_n^h$ 对于所有 n 都成立而得到的.

公式 (11) 在原理上解决了根据 "过去的" 信息 $\{h_k, k \leqslant 0\}$ 对值 h_n 作最优线性外推的问题. 但是, 这里自然产生下列两个问题: 什么时候序列 $h = (h_n)$ 有带更新序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 的表示式 (1), 以及怎样求得 (11) 中的系数 $\widehat{a}_k$.

第一个问题的答案包含在命题 2 中: 序列 $h = (h_n)$ 必须是正则的. 这里有著名的 Kolmogorov 判别准则成立: *如果 $h = (h_n)$ 是有谱密度 $f = f(\lambda)$ 的广义平稳序列, 满足*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda > -\infty, \tag{12}$$

那么这个序列是正则的. (参见例如 [439; 第 VI 章, §5].)

6. 我们记得, 每个带 $\mathsf{E}\xi_n = 0$ 的广义平稳序列 $\xi = (\xi_n)$ *有谱表示*

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} z(d\lambda), \tag{13}$$

其中对于 $\Delta \in \mathscr{B}([-\pi, \pi])$, $z = z(\Delta)$ 是有正交值的复随机测度: $\mathsf{E}z(\Delta_1)\overline{z}(\Delta_2) = 0$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$; (参见例如 [439; 第 VI 章, §3]).

这时, 协方差函数 $\mathsf{R}(n) = \mathsf{Cov}(\xi_{k+n}, \xi_k)$ 有表示式

$$\mathsf{R}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} F(d\lambda), \tag{14}$$

其中*谱测度* $F(\Delta) = \mathsf{E}|z(\Delta)|^2$.

如果存在 (非负) 函数 $f = f(\lambda)$, 使得

$$F(\Delta) = \int_{\Delta} f(\lambda) d\lambda, \tag{15}$$

那么它称为*谱密度*. 函数 $F(\lambda) = F((-\infty, \lambda])$ 本身称为*谱函数*.

这样一来, 只要先验地已知原来的序列 $h = (h_n)$ 是带满足条件 (12) 的谱密度 $f = f(\lambda)$ 的广义平稳序列, 那么这个序列就是正则的, 并且有带更新序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 的表示式 (9).

7. 在上面考察的我们感兴趣的线性模型中, 序列 $h = (h_n)$ 并没有给出谱表示, 而是级数 (1) 的形式, 其中 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 为某个正交序列, 满足条件 $\mathsf{E}\varepsilon_n = 0$ 和 $\mathsf{E}\varepsilon_i\varepsilon_j = \delta_{ij}$, 这里 δ_{ij} 是 Kroneker 记号:

$$\delta_{ij} = 1, \quad 当 \quad i = j, \qquad \delta_{ij} = 0, \quad 当 \quad i \neq j.$$

显然, 序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 是平稳的, 它的相关 (= 协方差) 函数

$$\mathsf{R}_\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \tag{16}$$

以及谱密度

$$f_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2\pi}, \qquad -\pi \leqslant \lambda < \pi. \tag{17}$$

$\left(\text{因为 } \mathsf{R}_\varepsilon(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \frac{1}{2\pi} d\lambda.\right)$

如果 $h_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}$, 并且系数 a_k 满足 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, 那么不难看出, 序列 $h = (h_n)$ 的协方差函数

$$\mathsf{R}_h(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_h(\lambda) d\lambda, \tag{18}$$

其中

$$f_h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\Phi(e^{-i\lambda})|^2 \tag{19}$$

以及

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{20}$$

现在假定, 级数 (20) 有收敛半径 $r > 1$, 且在区域 $|z| \leqslant 1$ 中没有零点. 在这个假定下, 最优线性预测 $\widehat{h}_n$ 的表示式 (11) 中的系数 $\widehat{a}_k$ 的求值问题可用下列方式来解决 (详情参见例如 [439; 第 VI 章, §6]).

设

$$\widehat{\varphi}_n(\lambda) = e^{i\lambda n} \frac{\Phi_n(e^{-i\lambda})}{\Phi(e^{-i\lambda})}, \tag{21}$$

其中

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k. \tag{22}$$

把 $\widehat{\varphi}_n(\lambda)$ 展开为 Fourier 级数:

$$\widehat{\varphi}_n(\lambda) = \widehat{a}_n^{(n)} + \widehat{a}_{n+1}^{(n)} e^{-i\lambda} + \widehat{a}_{n+2}^{(n)} e^{(-2i\lambda)} + \cdots. \tag{23}$$

系数 $\widehat{a}_n^{(n)}, \widehat{a}_{n+1}^{(n)}, \cdots$ 将精确地确定量 h_n 的最优线性预测 $\widehat{h}_n$:

$$\widehat{h}_n \equiv \widehat{\mathsf{E}}(h_n | H_0^h) = \sum_{k=n}^{\infty} \widehat{a}_k^{(n)} h_{n-k}. \tag{24}$$

这样一来, 我们就有可能按照过去的值 $\{\cdots, h_{-1}, h_0\}$ 来构造值 h_n 的预测, 只要我们能够求得表示式 (23).

8. 为了解释上面叙述的方法, 我们考察对于平稳模型 $MA(q)$, $AR(p)$, $ARMA(p,q)$ 的一系列例子; 这里我们只限于某些值 p 和 q 引入预测公式. 至于一般公式参见例如, [439; 第 IV 章, §6].

例 1 (模型 $MA(q)$). 设

$$h_n = \beta(L) \varepsilon_n, \tag{25}$$

其中

$$\beta(L) = b_0 + b_1 L + \cdots + b_q L^q, \tag{26}$$

即

$$h_n = \sum_{k=0}^{q} b_k \varepsilon_{n-k}. \tag{27}$$

把这个表示式与 (1) 相比较, 我们看到, 对于 $0 \leqslant k \leqslant q$, 有 $a_k = b_k$, 以及对于 $k > q$, 有 $a_k = 0$.

因此,

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{q} b_k z^k$$

以及

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} \sum_{k=n}^{q} b_k z^k, & n \leqslant q, \\ 0, & n > q. \end{cases}$$

从而对于 $n \leqslant q$, 有

$$\widehat{\varphi}_n(\lambda) = e^{i\lambda n} \frac{\sum_{k=n}^{q} e^{-i\lambda k} b_k}{\sum_{k=0}^{q} e^{-i\lambda k} b_k} \tag{28}$$

以及对于 $n > q$, 有 $\widehat{\varphi}_n(\lambda) = 0$.

这样, 如果 $n > q$, 那么在展开式 (23) 中所有系数 $\widehat{a}_n = 0$, 而这意味着, 在这种情形下, 最优预测 $\widehat{h}_n = 0$; 这点并不使人惊讶, 因为当 $n > q$ 时, h_n 与量 $h_0, h_{-1}, \cdots$, 中的每一个之间的相关系数为零.

如果 $q = 1$, 那么

$$h_n = b_0 \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1}$$

以及

$$\widehat{\varphi}_1(\lambda) = e^{i\lambda} \frac{e^{-i\lambda} b_1}{b_0 + e^{-i\lambda} b_1} = \frac{b_1}{b_0 + e^{-i\lambda} b_1}.$$

当然, 可立即认为 $b_0 = 1$ 以及令 $b_1 = \theta$, 其中 $|\theta| < 1$, 以保证 $\Phi(z) = 1 + \theta z$ 在区域 $|z| \leqslant 1$ 中没有零点. 于是

$$\widehat{\varphi}_1(\lambda) = \frac{\theta}{1 + \theta e^{-i\lambda}} = \theta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\theta e^{-i\lambda})^k = \theta \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} (-1)^k \theta^k.$$

把这个展开式与 (23) 作比较, 我们求得, 对于 $q = 1$ 和 $n = 1$, 有

$$\begin{aligned} \widehat{a}_1^{(1)} &= \theta, \\ \widehat{a}_2^{(1)} &= (-1) \cdot \theta^2, \\ \widehat{a}_3^{(1)} &= \theta^3, \\ &\cdots \\ \widehat{a}_k^{(1)} &= (-1)^{k-1} \theta^k, \\ &\cdots \end{aligned}$$

因此, 对于模型$MA(1)$, 值 h_1 根据 "过去" 的 $(\cdots, h_{-1}, h_0)$ 的预测由下列公式来确定:

$$\begin{aligned}\widehat{h}_1 &= \widehat{a}_1^{(1)} h_0 + \widehat{a}_2^{(1)} h_{-1} + \cdots + \widehat{a}_k^{(1)} h_{1-k} + \cdots \\ &= \theta(h_0 - \theta h_{-1} + \theta^2 h_{-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\theta^{k-1} h_{1-k} + \cdots) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \theta^{k+1} h_{-k}.\end{aligned}$$

由此可见, 对量 h_1 的预测值有最大贡献的是 "最近的过去" 的值 h_0, 而过去的值的贡献按几何方式递减 (h_{-k} 的贡献带有系数 θ^k, 其中 $|\theta| < 1$).

例 2 (模型$AR(p)$). 我们将假定 (比较 §2b 中的 (33)), 对于 $-\infty < n < \infty$, 有

$$h_n = a_1 h_{n-1} + \cdots + a_p h_{n-p} + \varepsilon_n, \tag{29}$$

这时, 在因子分解表示式 (35) (§2b) 中, 值 λ_i 相互不同, $i = 1, \cdots, p$, 以及 $|\lambda_i| < 1$.

对应 §2b 中的 (41), 方程 (29) 的平稳解有下列形式:

$$h_n = \sum_{k=0}^{\infty} (c_1 \lambda_1^k + \cdots + c_p \lambda_p^k) \varepsilon_{n-k}, \tag{30}$$

即, 在表示式 (1) 中,

$$a_k = c_1 \lambda_1^k + \cdots + c_p \lambda_p^k. \tag{31}$$

从原理的视角来看, 量 h_n 的根据值 $\{h_k, k \leqslant 0\}$ 的预测 $\widehat{h}_n$ 是用公式 (24) 给出的, 其中系数 $\widehat{a}_k^{(n)}$ 是由函数 $\widehat{\varphi}_n(x)$ 的 Fourier 级数展开来得到的 (参见 (21)–(23)), 其中考虑到在函数 $\widehat{\varphi}_n(\lambda)$ 的定义中的系数 a_k 的公式 (31).

在文献中, 有各种各样的方法来寻求应用方便的预测 $\widehat{h}_n$ 的公式 (参见例如, [211], 其中叙述根据 $\widehat{h}_1, \cdots, \widehat{h}_{n-1}$ 求出值 $\widehat{h}_n$ 的递推程序).

我们只限于说明对于平稳模型$AR(1)$ 的预测的计算:

$$h_n = \theta h_{n-1} + \varepsilon_n, \tag{32}$$

其中 $|\theta| < 1$.

我们记得, 在这一情形下, $\mathrm{R}(n) = \mathrm{Cov}(h_k, h_{k+n})$ 是用下列公式确定的:

$$\mathrm{R}(n) = \frac{\theta^k}{1-\theta^2}. \tag{33}$$

由此不难断定, 谱密度函数 $f = f(\lambda)$ 存在, 且由下列公式来给定:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|1 - \theta e^{-i\lambda}|^2}. \tag{34}$$

把 (33) 与 (19) 相比较, 我们求得

$$\Phi(z)=\frac{1}{1-\theta z}=\sum_{k=0}^{\infty}(\theta z)^k.$$

因而由 (21) 得到

$$\widehat{\varphi}_n(\lambda)=\theta^n,$$

而这意味着 (参见 (23) 和 (24))

$$\widehat{h}_n=\theta^n h_0,\qquad n\geqslant 1,$$

即, 对于量 h_n 根据 $\{h_k,k\leqslant 0\}$ 来预测, 只需知道值 h_0, 而由于序列 $h=(h_n)$ 的 Markov 特征, 这点并不令人奇怪.

例 3 (带参数 $p=q=1$ 的模型 $ARMA(p,q)$). 在这个模型中, 由 §2c, 带条件 $a_0=0$ 的方程 (12) 的平稳解由下列公式来确定:

$$h_n=(a_1+b_1)\sum_{k=1}^{\infty}a_1^{k-1}\varepsilon_{n-k}+\varepsilon_n,$$

其中 $|a_1|<1$ 和 $|b_1|<1$, 而这就是说, 在表示式 $h_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\widetilde{a}_k\varepsilon_{n-k}$ 中, 系数

$$\widetilde{a}_0=1,\qquad \widetilde{a}_k=(a_1+b_1)a_1^{k-1}. \tag{35}$$

在所考察的情形下, 函数

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{a}_kz^k=1+\frac{(a_1+b_1)}{a_1}\sum_{k=1}^{\infty}(a_1z)^k=1+\frac{a_1+b_1}{a_1}\cdot\frac{a_1z}{1-a_1z}$$

以及对于 $n\geqslant 1$ 有

$$\Phi_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\widetilde{a}_kz^k=\frac{a_1+b_1}{a_1}\sum_{k=n}^{\infty}(a_1z)^k=\frac{a_1+b_1}{a_1}(a_1z)^n\frac{1}{1-a_1z}.$$

因此, 根据 (21) 和 (22), 对于 $z=e^{-i\lambda}$, 我们得到

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_n(\lambda)&=e^{i\lambda n}\frac{\frac{a_1+b_1}{a_1}\cdot\frac{(a_1z)^n}{1-a_1z}}{1+\frac{a_1+b_1}{a_1}\cdot\frac{a_1z}{1-a_1z}}=\frac{(a_1+b_1)a_1^{n-1}}{1+b_1z}\\&=a_1^{n-1}(a_1+b_1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(b_1z)^k\end{aligned}$$

以及 (参见 (23))

$$\widehat{a}_k^{(n)}=a_1^{n-1}(a_1+b_1)(-1)^kb_1^k.$$

这样, 根据 (24),

$$\begin{aligned}\widehat{h}_n &= a_1^{n-1}(a_1+b_1)\{h_0+(-1)b_1h_{-1}+b_1^2h_{-2}+\cdots\}\\ &= a_1^{n-1}(a_1+b_1)\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k b_1^k h_{n-k}.\end{aligned}$$

注. 关于对一般模型$ARMA(p,q)$, $ARIMA(p,d,q)$ 的预测公式, 参见例如 [211].

3. 非线性随机条件高斯模型

把注意力转向非线性模型是为了对 (在金融统计中以及在一般的经济学中) 观察到的一系列现象的寻求解释而有其必要性. 这类现象包括价格的 "聚集性", 价格的 "灾难性" 变化, 量 $h_n = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ 的分布中具有 "厚尾", 在价格及其其他固有性质中具有 "长记忆", 等等, 它们都不能在线性模型框架内得到解释.

关于应该运用怎样的非线性模型: 随机的、混沌的 ("动态混沌"), 还是别的什么, 人们意见不一, 并且在运用这样那样的方法时, 总是有许多赞同者和反对者.

毫无疑问, 经济指标, 包括金融指数在内, 总有*波动*特征.

宏观经济指数 (产量、消费、投资、价格的一般水平、利率、政府储备等等) 反映了经济的 "平均"、"整体" 状况. *微观经济指数* (当前价格、股票交易量等等) 也是波动的. 这时, 波动可能有*极高频*和*极为不规则*的特征; 如所周知, 这些都既在随机模型中, 也在混沌模型中观察到, 并且都试图用这样的模型来解释波动演变, 急剧过渡, "灾难性" 崩盘, 价值的成群性 (聚集性) 等等.

许多经济指标有 "平均" *趋向*特征 (产量、人口、政府储备量), 然而, 这种运动或快或慢; 其增长可能走向*循环* (周期的或非周期的).

这样一来, 在统计数据的研究者的面前, 无论是涉及经济、金融, 还是其他自然科学技术领域, 都会发生远非简单的 "正确" 模型的选择问题.

下面我们给出在金融数学和金融统计中流行的*非线性随机模型*和*混沌模型*的一系列描述; 我们不求对这一方面的问题包罗万象, 而只求 "入门" 介绍. (关于某些非线性模型的叙述, 例如可推荐参考专著 [193], [202], [461], [462].)

§3a. $ARCH$ 和 $GARCH$ 模型

1. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 是出发的概率空间, $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 是独立正态分布随机变量序列, $\varepsilon_n\sim\mathscr{N}(0,1)$, 它为今后考察的模型中的 "随机性" 、"不确定性" 建模.

我们以 $\mathscr{F}_n$ 表示 σ-代数 $\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$.

我们将把 $S_n=S_n(\omega)$ 解释为在时刻 $n=0,1,\cdots,$ 的价格 (比如, 股价, 汇率). 时间可用年, 月,$\cdots$, 分, 秒,$\cdots$ 来度量.

正如上面 (§1d) 已经注意到, 为描述量 $h = (H_n)_{n\geqslant 1}$ 的演变, 其中

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}, \tag{1}$$

R. Engel [140] 转向条件高斯模型, 其中

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \tag{2}$$

这里 "波动率" σ_n 由下列方式确定:

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{n-i}^2, \tag{3}$$

其中 $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, $h_0 = h_0(\omega)$ 是不依赖于 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 的随机变量. (h_0 经常被认为是常数或者其平方的数学期望存在的随机变量, 后者来自值 $\mathsf{E}h_n^2$ $(n \geqslant 0)$ 的 "平稳性" 考虑.)

由 (3) 可见, 波动率 σ_n 是 $h_{n-1}^2, \cdots, h_{n-p}^2$ 的 (可料) 函数. 这时很明显, h_{n-i}^2 的大 (小) 值导致 σ_n^2 的大 (小) 值. 在假定前面的 $h_{n-1}^2, \cdots, h_{n-p}^2$ 取小值时, 较大的 h_n^2 的发生是由于较大的 ε_n 的值的出现引起的. 这样一来就变得很明显: 为什么所考察的 (非线性) 模型 (1)–(3) 可解释 "聚集性" 效应, 即 (h_n) 的值成堆地或 "大" 或 "小".

正如上面 (§1d) 所说, 这些考虑阐明了 R. Engle 在 [140] 中为什么把这个模型称为 $ARCH(p)$ (AutoRegressive Conditional Heteroskedastic model, 自回归条件异方差模型), 其中, 正如我们所看到的, 条件方差 (波动率) σ_n^2 本身是以非常不均匀的方式来引进的, 因为根据 (3), 它依赖于 "过去的" 值 $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \cdots$.

2. 我们转向考察用 $ARCH(p)$ 模型来描述的序列 $h = (h_n)$ 的一系列性质. 为了简化叙述, 我们限于 $p = 1$ 的情形. (关于 $ARCH(p)$ 模型及其应用的性质的详细研究参见例如, [193], [202] 和 [393]; 在 §3c 的第 6 点中, 我们将介绍有关在这样的模型中具有 "厚尾" 的结果.)

对于 $p = 1$ (参见图 22),

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2, \tag{4}$$

并且很明显, 对于 $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$, 我们有下列简单性质:

$$\mathsf{E}h_n = 0, \tag{5}$$

$$\mathsf{E}h_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \mathsf{E}h_{n-1}^2, \tag{6}$$

$$\mathsf{E}(h_n^2 \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2. \tag{7}$$

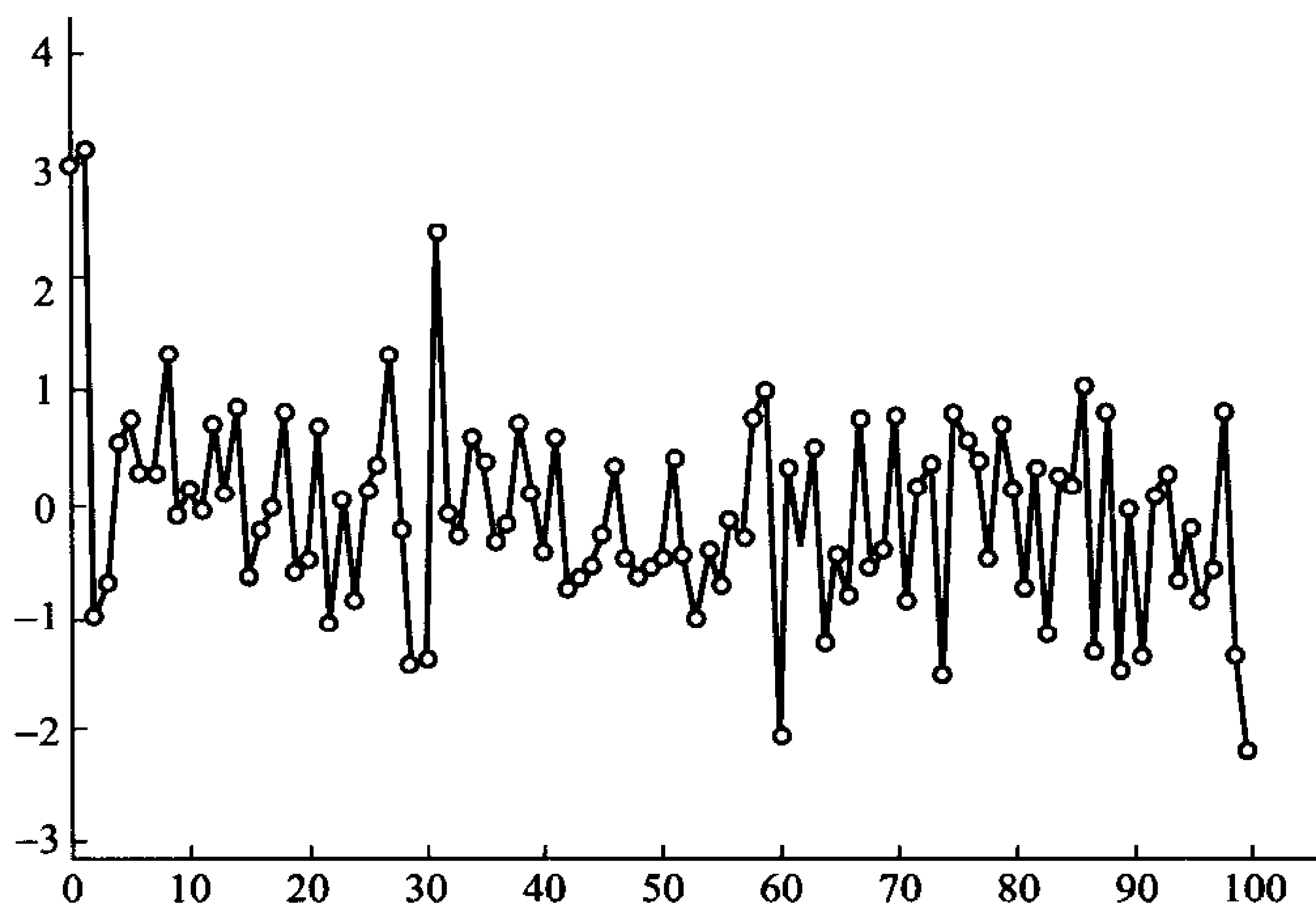


图 22 服从$ARCH(1)$ 模型 $h_n = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2}\varepsilon_n$ 的序列 $h = (h_n)$ 的计算机仿真图像, 其中参数 $\alpha_0 = 0.9$, $\alpha_1 = 0.2$; $h_0 = 3$ 以及 $0 \leqslant n \leqslant 100$

在

$$0 < \alpha_1 < 1$$

的假定下, 递推关系式 (6) 有唯一的 "平稳" 解

$$\mathsf{E}h_n^2 \equiv \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}, \qquad n \geqslant 0, \tag{8}$$

并且这样一来, 如果取 $h_0^2 = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$, 那么 $\mathsf{E}h_n^2$ 对于所有 $n \geqslant 1$ 都表达为公式 (8).

同时, 简单的计算指出,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}h_n^4 &= \mathsf{E}\sigma_n^4\,\mathsf{E}\varepsilon_n^4 = 3\mathsf{E}\sigma_n^4 = 3\mathsf{E}(\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2)^2 \\ &= 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1\mathsf{E}h_{n-1}^2 + \alpha_1^2\mathsf{E}h_{n-1}^4) \\ &= \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{1-\alpha_1} + 3\alpha_1^2\mathsf{E}h_{n-1}^4. \end{aligned} \tag{9}$$

在 $0 < \alpha_1 < 1$ 和 $3\alpha_1^2 < 1$ 的假定下, 由此我们求得 "平稳" 解 ($\mathsf{E}h_n^4 \equiv \mathrm{Const}$):

$$\mathsf{E}h_n^4 = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}. \tag{10}$$

由 (8) 和 (10) 得到, 峰度 (kurtosis) 系数的 "平稳" 值

$$K \equiv \frac{\mathsf{E}h_n^4}{(\mathsf{E}h_n^2)^2} - 3 = \frac{6\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2},$$

它的正性说明, 量 (h_n) 的 "稳态" 分布的密度在均值的邻域中是向上 "隆起" 的 (α_1^2 越大, "隆起" 越强). 我们记得, 对于正态分布来说, 峰度 $k = 0$.

注. 根据值 $h_1, h_2, \cdots, h_N$ 来计算的峰度系数的经验值 $\widehat{K}_N$ 由下列公式来求得:

$$\widehat{K}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(h_k - \overline{h}_N)^4 \Big/ \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(h_k - \overline{h}_N)^2\right)^2 - 3,$$

其中 $\overline{h}_N = \frac{1}{N}(h_1 + \cdots + h_N)$. 根据 S. Taylor [460] 的书中的数据, 峰度系数的正性多半是常规, 而不是例外. 峰度为负值的情形极为稀罕. 关于峰度经验系数 $\widehat{K}_N$ 的量值为正的情形可由下列表格得到证实, 其中有关金和银的价格, 英镑对美元的汇率以及通用汽车公司 (General Motors) 的股价 (根据月数据):

表 1

金/美元	1975–82	$\widehat{K}_N = 8.4$
银/美元	1970–74	$\widehat{K}_N = 8.4$
英镑/美元	1974–82	$\widehat{K}_N = 5.4$
通用汽车	1966–76	$\widehat{K}_N = 4.2$

4. 有 $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ 的序列 $h = (h_n)$ 当 $0 < \alpha_1 < 1$ 时, 是平方可积的鞅差, 从而是有正交值的序列:

$$\mathsf{Cov}(h_n, h_m) = 0, \qquad n \neq m.$$

这个性质自然并不意味着量 h_n 和 h_m 之间的独立性, 因为它们的联合分布 $\mathrm{Law}(h_n, h_m)$ 正如我们已经看到的, 当 $\alpha_1 > 0$ 时, 并非是高斯分布.

关于量 h_n 和 h_m 之间的依赖性特征可通过考察它们的平方 h_n^2 和 h_m^2 或者模 $|h_n|$ 和 $|h_m|$ 之间的相关依赖性来表示.

简单的计算给出

$$\mathsf{D}h_n^2 = \frac{2}{1-3\alpha_1^2}\left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right)^2, \tag{11}$$

$$\mathsf{E}h_n^2 h_{n-1}^2 = \frac{1+3\alpha_1}{1-3\alpha_1^2}\cdot\frac{\alpha_0^2}{1-\alpha_1}, \tag{12}$$

而这就是说,

$$\rho(1) \equiv \mathsf{Corr}(h_n^2, h_{n-1}^2) = \frac{\mathsf{Cov}(h_n^2, h_{n-1}^2)}{\sqrt{\mathsf{D}h_n^2 \mathsf{D}h_{n-1}^2}} = \alpha_1.$$

同时, 对于 $k < n$,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}h_n^2 h_{n-1}^2 &= \mathsf{E}[h_{n-k}^2 \mathsf{E}(h_n^2 \mid \mathscr{F}_{n-1})] = \mathsf{E}[h_{n-k}^2 \mathsf{E}(\sigma_n^2 \varepsilon_n^2 \mid \mathscr{F}_{n-1})] \\ &= \mathsf{E}[h_{n-k}^2(\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2)] = \alpha_0 \mathsf{E}h_{n-k}^2 + \alpha_1 \mathsf{E}h_{n-1}^2 h_{n-k}^2,\end{aligned}$$

它给出了在 "平稳" 情形下, 对于 $\rho(k) = \dfrac{\mathrm{Cov}(h_n^2, h_{n-k}^2)}{\sqrt{\mathrm{D}h_n^2 \mathrm{D}h_{n-k}^2}}$ 的递推关系式:

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1),$$

从而

$$\rho(k) = \alpha_1^k. \tag{13}$$

4. 在 §1d 中已经注意到, $ARCH(p)$ 模型与 (一般) 自回归模式$AR(p)$ 的联系最紧密.

事实上, 假设有一个$ARCH(p)$ 模型, $\nu_n = h_n^2 - \sigma_n^2$. 于是, 如果 $\mathrm{E}h_n^2 < \infty$, 那么序列 $\nu = (\nu_n)$ 形成 (关于流 $(\mathscr{F}_n)$) 的鞅差, 并且由 (3) 得到, 量 $x_n = h_n^2$ 满足自回归模型$AR(p)$:

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 x_{n-1} + \cdots + \alpha_p x_{n-p} + \nu_n, \tag{14}$$

其中 "噪声" $\nu = (\nu_n)$ 是鞅差.

在 $p = 1$ 的情形下,

$$x_n = \alpha_0 + \alpha_1 x_{n-1} + \nu_n, \tag{15}$$

并且我们看到, 上面求得的公式 (13) 恰好重合于 §2b 中的公式 (10).

5. $ARCH(p)$ 模型也以最紧密的方式联系着带随机系数的自回归模型, 它用于描述 "在随机介质中的随机游走".

为说明其实质, 仍然限于值 $p = 1$.

于是由 $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$ 和 $\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2$, 导出

$$h_n = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2}\, \varepsilon_n. \tag{16}$$

现在考察下列带随机系数的一阶自回归模型:

$$x_n = B_1 \eta_n x_{n-1} + B_0 \delta_n, \tag{17}$$

其中 (η_n) 和 (δ_n) 是两个独立标准高斯序列.

从有限维分布的视角来看, 有 $x_0 = 0$ (为了确定起见) 的 $x = (x_n)$ 与下列序列 $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_n)$ 有同样的构造:

$$\widetilde{x}_n = \sqrt{B_0^2 + B_1^2 \widetilde{x}_{n-1}^2}\, \widetilde{\varepsilon}_n, \qquad \widetilde{x}_0 = 0, \tag{18}$$

其中 $\widetilde{\varepsilon} = (\widetilde{\varepsilon}_n)$ 是标准高斯序列。

比较 (16) 和 (18) 指出, 更新序列 $h = (h_n)$ 和 $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_n)$ 的结构是一样的. 因此, 当 $B_0^2 = \alpha_0$ 和 $B_1^2 = \alpha_1$ 时, 序列 $h = (h_n)$ 和 $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_n)$ 在 $h_0 = \widetilde{x}_0 = 0$ 时的概率规律是一样的.

6. 假定量 $h=(h_n)$ 服从下列关系式:

$$h_n = \beta_0 + \beta_1 h_{n-1} + \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2}\,\varepsilon_n. \tag{19}$$

这是一个有点复杂的$ARCH(1)$ 模型. 在这种情形下, 我们说 $h=(h_n)$ 服从 $AR(1)/ARCH(1)$ 模型, 或者 $h=(h_n)$ 满足自回归模式$AR(1)$, 且带有$ARCH(1)$ 噪声 $\left(\sqrt{\alpha_0+\alpha_1 h_{n-1}^2}\,\varepsilon_n\right)_{n\geqslant 1}$.

这一模型的条件高斯特征使得有可能给出量 $h_1,\cdots,h_n$ 对于给定的参数值 $\theta=(\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1)$ 的联合分布 P_θ 的密度 $p_\theta(h_1,\cdots,h_n)$ 为下列形式 $(h_0=0)$:

$$p_\theta(h_1,\cdots,h_n) = (2\pi)^{-n/2}\prod_{k=1}^{n}(\alpha_0+\alpha_1 h_{k-1}^2)^{-1/2} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(h_k-\beta_0-\beta_1 h_{k-1})^2}{\alpha_0+\alpha_1 h_{k-1}^2}\right\}. \tag{20}$$

作为例子, 运用这一表示式, 在认为参数 β_0, α_0 和 α_1 已知的条件下, 来考察未知参数 β_1 的 (用最大似然法的) 估计问题.

对于参数 β_1 的最大似然估计量 $\widehat{\beta}_1$ 作为下列方程的根来确定:

$$\frac{d\mathsf{P}_{(\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1)}}{d\beta_1}(h_1,\cdots,h_n)=0.$$

考虑 (20) 和 (19), 我们求得

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(h_k-\beta_0)h_{k-1}}{\alpha_0+\alpha_1 h_{k-1}^2}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{h_{k-1}^2}{\alpha_0+\alpha_1 h_{k-1}^2}} \tag{21}$$

以及

$$\widehat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{M_n}{\langle M\rangle_n}, \tag{22}$$

其中

$$M_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{h_{k-1}\varepsilon_k}{\sqrt{\alpha_0+\alpha_1 h_{k-1}^2}}$$

是鞅, 而

$$\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{h_{k-1}^2}{\alpha_0+\alpha_1 h_{k-1}^2} \tag{23}$$

是它的平方特征. (比较 §2b 中的公式 (46).)

这里 $\langle M\rangle_n\to\infty$ (P-a.s.), 并且根据对于平方可积鞅的强大数定律 [439; 第 VII 章, §5], $\dfrac{M_n}{\langle M\rangle_n}\to 0$ (P-a.s.). 因此, 所构造的估计量 $\widehat{\beta}_1$ 在下列含义下是强相容的: 对于值 $\theta=(\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1)$, $\mathsf{P}(\widehat{\beta}_1\to\beta)=1$, 其中 $\beta\in\mathbb{R}$.

7. 我们考察 "价格的未来运动" 的预测问题, 其中认为序列 $h=(h_n)$ 服从模型$ARCH(p)$.

由于序列 $h=(h_n)$ 是鞅差, 故 $\mathsf{E}(h_{n+m}\,|\,\mathscr{F}_n)=0$, 而这意味着, 最优均方意义下的估计量

$$\widehat{h}_{n+m}\equiv\mathsf{E}(h_{n+m}\,|\,\mathscr{F}_n^h)=\mathsf{E}(\mathsf{E}(h_{n+m}\,|\,\mathscr{F}_n)\,|\,\mathscr{F}_n^h)=0.$$

这个估计量的不足取, 使得用 h_{n+m} 的非线性函数 (例如量 h_{n+m}^2, $|h_{n+m}|$) 来考察未来值的预测问题是适当的.

我们有 ($\mathscr{F}_n^h=\sigma(h_1,\cdots,h_n)$):

$$\begin{aligned}\widehat{h_{n+m}^2}&\equiv\mathsf{E}(h_{n+m}^2\,|\,\mathscr{F}_n^h)=\mathsf{E}(\sigma_{n+m}^2\varepsilon_{n+m}^2\,|\,\mathscr{F}_n^h)\\&=\mathsf{E}[\mathsf{E}(\sigma_{n+m}^2\varepsilon_{n+m}^2\,|\,\mathscr{F}_{n+m-1}^\varepsilon)\,|\,\mathscr{F}_n^h]\\&=\mathsf{E}[\sigma_{n+m}^2\,|\,\mathscr{F}_n^h]\quad(\equiv\widehat{\sigma_{n+m}^2}),\end{aligned}\tag{24}$$

由此很明显, 未来值 h_{n+m}^2 的预测问题归结为根据过去的观察结果 $h_0,h_1,\cdots,h_n$ 来预测 "波动率" σ_{n+m}^2 的问题.

由于

$$\sigma_{n+m}^2=\alpha_0+\alpha_1\sigma_{n+m}^2\varepsilon_{n+m-1}^2,$$

故由递推求得

$$\begin{aligned}\sigma_{n+m}^2&=\alpha_0+\alpha_1[\alpha_0+\alpha_1\sigma_{n+m-2}^2\varepsilon_{n+m-2}^2]\varepsilon_{n+m-1}^2\\&=\cdots=\\&=\alpha_0+\alpha_0\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{i=1}^{j}\alpha_1\varepsilon_{n+j-i+1}^2+\sigma_n^2\prod_{i=1}^{m}\alpha_1\varepsilon_{n+m-i}^2.\end{aligned}$$

由此取无条件数学期望 $\mathsf{E}(\cdot\,|\,\mathscr{F}_n^h)$, 并考虑在序列 (ε_n) 的量之间的独立性, 我们求得

$$\begin{aligned}\widehat{h_{n+m}^2}=\widehat{\sigma_{n+m}^2}&\equiv\mathsf{E}(\sigma_{n+m}^2\,|\,\mathscr{F}_n^h)=\alpha_0+\alpha_0\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_1^j+h_n^2\alpha_1^m\\&=\alpha_0\frac{1-\alpha_1^m}{1-\alpha_1}+\alpha_1^m h_n^2.\end{aligned}\tag{25}$$

正如我们所期待的, 当 $m\to\infty$ 时, 估计量 $\widehat{h_{n+m}^2}$ (以概率 1) 收敛于 "平稳" 值 $\mathsf{E}h_n^2\equiv\dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$.

8. 我们记得, 对于正态分布 $\mathscr{N}(\mu,\sigma^2)$ 来说, 区间 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 和 $(\mu-1.65\sigma,\mu+1.65\sigma)$ (以一定的精度) 对应置信水平为 68% 和 90% 的置信区间.

由于

$$S_{n+m}=S_ne^{h_{n+1}+\cdots+h_{n+m}}\tag{26}$$

以及

$$\mathsf{E}[(h_{n+1}+\cdots+h_{n+m})^2 \mid \mathscr{F}_n^h] = \mathsf{E}(h_{n+1}^2 \mid \mathscr{F}_n^h)+\cdots+\mathsf{E}(h_{n+m}^2 \mid \mathscr{F}_n^h)$$
$$= \widehat{\sigma_{n+1}^2}+\cdots+\widehat{\sigma_{n+m}^2},$$

故在一阶逼近中作为 (以值为 68% 和 90% 的水平的) 置信区间相应地可取为区间

$$\left(S_n e^{-\sqrt{\widehat{\sigma_{n+1}^2}+\cdots+\widehat{\sigma_{n+m}^2}}},\ S_n e^{+\sqrt{\widehat{\sigma_{n+1}^2}+\cdots+\widehat{\sigma_{n+m}^2}}}\right)$$

和

$$\left(S_n e^{-1.65\sqrt{\widehat{\sigma_{n+1}^2}+\cdots+\widehat{\sigma_{n+m}^2}}},\ S_n e^{+1.65\sqrt{\widehat{\sigma_{n+1}^2}+\cdots+\widehat{\sigma_{n+m}^2}}}\right).$$

这里必须要弄清楚的是, 所谓 "一阶逼近" 是与这样的事实相联系的: 实际上, 量 h_k 一般来说不是正态分布, 而问题在于上面引入的置信区间的原来的置信水平在多大程度上不同于 68% 和 90%, 要求对正态逼近的精度作进一步研究.

9. 条件高斯模型$ARCH(p)$ 的成功在于它对金融指数的性态中的一系列现象 ("聚集性", "厚尾", 量 h_n 的概率密度的 "尖峰 (leptokurtosis)" 等等) 给出了解释; 这促使它的各种各样的推广风起云涌, 以求 "把握" 和有可能解释一系列用统计分析方法所发现的其他效应.

历史上第一个$ARCH(p)$ 模型的推广, 正如在 §1d 中所注意到, 是 1986 年由 T. Bollerslev [48] 所引入的广义 (Generalized) $ARCH$ 模型, 它由两个参数来刻画, 记作$GARCH(p,q)$.

在这个模型中, 正如对于$ARCH(p)$ 模型那样, 再取 $h_n=\sigma_n\varepsilon_n$, 但关于 "波动率" σ_n 的陈述假定为

$$\sigma_n^2=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i h_{n-i}^2+\sum_{j=1}^{q}\beta_j\sigma_{n-j}^2, \tag{27}$$

其中 $\alpha_0>0$, $\alpha_i\geqslant 0$, $\beta_j\geqslant 0$. (如果所有 $\beta_j=0$, 那么我们得到模型$ARCH(p)$.)

与它的前辈$ARCH(p)$ 模型相比较, $GARCH(p,q)$ 模型的基本优势在于, 当用模型$ARCH(p)$ 预测统计数据时, 经常会遇到过大的 p 值, 而用$GARCH(p,q)$ 模型来预测, 可仅限于 (试验事实!) 不大的 p 和 q 的值. (在论文 [431] 中, 为描述 S&P500 指数演变的月数据, 要运用 12 阶自回归模型$AR(12)$. 也参见综述论文 [141].)

假定 "波动率" σ_n (以可料方式) 既依赖于 h_{n-i}^2, $i\leqslant p$, 又依赖于 σ_{n-j}^2, $j\leqslant q$. 那么模型$GARCH(p,q)$ 的分析类似于$ARCH(p)$ 模型的分析.

省略细节, 我们引入一系列有关模型$GARCH(1,1)$ 的简单公式:

$$h_n=\sigma_n\varepsilon_n, \qquad \sigma_n^2=\alpha_0+\alpha_1 h_{n-1}^2+\beta_1\sigma_{n-1}^2, \tag{28}$$

其中 $\alpha_0>0$, $\alpha_1\geqslant 0$, $\beta_1\geqslant 0$.

由此很明显,

$$\mathsf{E}h_n^2 = \alpha_0 + (\alpha_1+\beta_1)\mathsf{E}h_{n-1}^2$$

以及 "平稳" 值 $\mathsf{E}h_n^2$ 当 $\alpha_1+\beta_1<1$ 时存在, 并且由下列公式给定:

$$\mathsf{E}h_n^2 \equiv \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}. \tag{29}$$

如果 $3\alpha_1^2+2\alpha_1\beta_1+\beta_1^2<1$, 那么存在 "平稳" 值

$$\mathsf{E}h_n^4 \equiv \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1+\beta_1)}{(1-\alpha_1-\beta_1)(1-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1-3\alpha_1^2)}, \tag{30}$$

从而, "平稳" 峰度系数

$$K \equiv \frac{\mathsf{E}h_n^4}{(\mathsf{E}h_n^2)^2} - 3 = \frac{6\alpha_1^2}{1-\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1-3\alpha_1^2}. \tag{31}$$

也不难求得自相关函数 $\rho(k)$ 的 "平稳" 值 (比较 (13)):

$$\rho(1) = \frac{\alpha_1(1-\alpha_1\beta_1-\beta_1^2)}{1-2\alpha_1\beta_1-\beta_1^2}, \tag{32}$$

$$\rho(k) = (\alpha_1+\beta_1)^{k-1}\rho(1), \qquad k>1. \tag{33}$$

最后我们注意到, 公式 (25) 在$GARCH(1,1)$ 模型情形下推广为下列形式:

$$\widehat{h_{n+m}^2} = \widehat{\sigma_{n+m}^2} \equiv \mathsf{E}(\sigma_{n+m}^2 \mid \mathscr{F}_n^h) = \alpha_0\frac{1-\gamma^m}{1-\gamma} + \gamma^{m-1}(\alpha_1 h_n^2 + \beta_1\sigma_n^2),$$

其中 $\gamma = \alpha_1+\beta_1$.

10. 在离散时间中演变的$ARCH$ 族模型也在连续时间情形中有相应的类似. 尤其是, 在适当的规范下, 可得到用$ARCH$, $GARCH$ 等等模型所确定的随机差分方程的解 (弱) 收敛于对应的随机微分方程的解.

为了确定起见, 我们考察下列 $GARCH(1,1)$ 模型的修正 (在 [15] 中称为 $GARCH(1,1)$-M 模型).

设 Δ 是时间步长, $H^{(\Delta)} = (H_{k\Delta}^{(\Delta)})$, $k=0,1,\cdots$, 其中 $H_{k\Delta}^{(\Delta)} = H_0^{(\Delta)} + h_\Delta^{(\Delta)} + \cdots + h_{k\Delta}^{(\Delta)}$,

$$h_{k\Delta}^{(\Delta)} = c\left(\sigma_{k\Delta}^{(\Delta)}\right)^2 + \left(\sigma_{k\Delta}^{(\Delta)}\right)\varepsilon_{k\Delta}, \tag{34}$$

并且 $\varepsilon_{k\Delta} \sim \mathscr{N}(0,\Delta)$, c 是常数以及

$$\left(\sigma_{k\Delta}^{(\Delta)}\right)^2 = \alpha_0(\Delta) + \left(\sigma_{(k-1)\Delta}^{(\Delta)}\right)^2\left(\beta(\Delta) + \alpha_1(\Delta)\varepsilon_{(k-1)\Delta}^2\right). \tag{35}$$

我们将认为, 对所有 $\Delta>0$ 给定初始条件 $H_0^{(\Delta)} = H_0$, $\sigma_0^{(\Delta)} = \sigma_0$, 其中 (H_0,σ_0) 是不依赖于由独立随机变量组成的高斯序列 $(\varepsilon_{k\Delta})$ $(\Delta>0)$ 的随机变量对.

当 $k\Delta \leqslant t < (k+1)\Delta$ 时, 令

$$H_t^{(\Delta)} = H_{k\Delta}^{(\Delta)}, \qquad \sigma_t^{(\Delta)} = \sigma_{k\Delta}^{(\Delta)}. \tag{36}$$

我们把序列 $(H^{(\Delta)}, \sigma^{(\Delta)}) = (H_{k\Delta}^{(\Delta)}, \sigma_{k\Delta}^{(\Delta)})_{k\geqslant 0}$ 嵌入带连续时间 $t \geqslant 0$ 的模式.

由随机过程弱收敛理论的一般结果 (参见例如 [250], [304]), 自然期待, 在对 (34) 和 (35) 中的系数加上某些条件后, 过程序列 $(H^{(\Delta)}, \sigma^{(\Delta)})$ 弱收敛于某个扩散过程 $(H, \sigma) = (H_t, \sigma_t)_{t\geqslant 0}$.

正如在 [364] 中所指出, 当

$$\alpha_0(\Delta) = \alpha_0 \Delta, \qquad \alpha_1(\Delta) = \alpha\sqrt{\frac{\Delta}{2}}, \qquad \beta(\Delta) = 1 - \alpha\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)} - \beta\Delta$$

时, ($\Delta \to 0$ 的) 极限过程 (H, σ) 是服从下列随机微分方程的过程 (参见第三章 §3e):

$$dH_t = c\sigma_t^2 dt + \sigma_t dW_t^{(1)}, \tag{37}$$

$$d\sigma_t^2 = (\alpha_0 - \beta\sigma_t^2)dt + \alpha\sigma_t^2 dW_t^{(2)}, \tag{38}$$

其中 $(W^{(1)}, W^{(2)})$ 是两个与初始条件 $(H_0, \sigma_0) \equiv (H_0^{(\Delta)}, \sigma_0^{(\sigma)})$ 相独立的标准布朗运动.

§3b. *EGARCH, TGARCH, HARCH* 和其他模型

1. 1976 年 F. Black 对金融指数的性态发现下列现象: 量 h_{n-1} 和 σ_n 之间有负相关性, 它表现为经验协方差 $\widehat{\mathrm{Cov}}(h_{n-1}, \sigma_n) < 0$.

这种效应有个名称叫 "杠杆效应 (leverage effect)", 它导致在价格下跌以后, 即收益量减少以后, 波动率趋向于增加. 它也就是所谓 "反对称效应", 这一现象不能在模型*ARCH, GARCH* 的框架中得到解释, 因为其中波动率 σ_n^2 将依赖于以前的量 h_{n-i}^2 的平方, 而它对量 h_{n-j} 的符号没有反应, 以至值 $h_{n-j} = \Delta$ 和 $h_{n-j} = -\Delta$ 在*GARCH* 模型中导出未来波动率 σ_n^2 的同样的值.

为了解释 F. Black 所发现的效应, D. B. Nelson [366] 在 1990 年提出所谓 *EGARCH*(p, q) 模型, 或者说指数 (*Exponential*) *GARCH*(p, q) 模型, 其中顾及 "反对称性" 是通过把*GARCH*-模型中的量 $h_{n-i}^2 = \sigma_{n-i}^2\varepsilon_{n-i}^2$ 取代为引入量 ε_{n-i} 和 $|\varepsilon_{n-i}|$ 的线性组合. 也就是说, 重新认为 $h_n = \sigma_n\varepsilon_n$, 但对于 σ_n 假定满足下列关系式:

$$\ln\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left[\theta\varepsilon_{n-i} + \gamma\left(|\varepsilon_{n-i}| - \sqrt{2/\pi}\right)\right] + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \ln\sigma_{n-j}^2. \tag{1}$$

(注意, $\sqrt{2/\pi} = \mathsf{E}|\varepsilon_{n-i}|$.)

由于 $h_{n-i} = \sigma_{n-i}\varepsilon_{n-i}$ 和 $\sigma_{n-i} \geqslant 0$, 故 h_{n-i} 和 ε_{n-i} 的符号相同, 因而, 如果 $\varepsilon_{n-i} = \Delta > 0$, 那么叠加在 σ_n^2 上的相应项由量 $\Delta(\theta + \gamma)$ 来确定, 但如果 $\varepsilon_{n-i} = -\Delta < 0$, 那么该项将是 $\Delta(-\theta + \gamma)$.

2. $EGARCH$ 模型远不是既保留了模型$GARCH$ 的基本性质、又同时还允许 "把握" 反对称效应的唯一的模型. $TGARCH(p,q)$ 模型 (T 来自 Threshold (阈值)) 就可作为一个例子; 这种模型是由TAR (Threshold AR) 型的阈值模型所引起的:

$$h_n = \sum_{i=1}^{k} I_{A_i}(h_{n-d})(\alpha_0^i + \alpha_1^i h_{n-1} + \cdots + \alpha_p^i h_{n-p}), \tag{2}$$

其中 d 是延迟参数, $A_1, \cdots, A_k$ 是 $\mathbb{R}$ 中的不相交集合, 并且 $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \mathbb{R}$.①

例如, 设

$$h_n = \begin{cases} \alpha_0^1 + \alpha_1^1 h_{n-1} + \alpha_2^1 h_{n-2}, \text{当 } h_{n-2} > 0, \\ \alpha_0^2 + \alpha_1^2 h_{n-1} + \alpha_2^2 h_{n-2}, \text{当 } h_{n-2} \leqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

(这样的预测模型的详细研究包含在专著 [461] 中.)

根据定义 (参见 [399]), 序列 $h = (h_n)$ 用 $TGARCH(p,q)$ 模型来描述, 是指 $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$, 其中

$$\sigma_n = a_0 + \sum_{i=1}^{p} [a_i h_{n-i}^+ + b_i h_{n-i}^-] + \sum_{j=1}^{q} [c_j \sigma_{n-j}^+ + d_j \sigma_{n-j}^-] \tag{4}$$

以及如同惯例, $x^+ = \max(x,0)$, $x^- = -\min(x,0)$. 在这个模型中, 没有假定系数非负, 因而, 波动率 σ_n 也不一定非负, 尽管自然还有 σ_n^2 保持作为条件方差 $\mathsf{E}(h_n^2 \mid \mathscr{F}_{n-1}^h)$ 的含义.

由于

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n = (\sigma_n^+ - \sigma_n^-)(\varepsilon_n^+ - \varepsilon_n^-) = [\sigma_n^+ \varepsilon_n^+ + \sigma_n^- \varepsilon_n^-] - [\sigma_n^- \varepsilon_n^+ + \sigma_n^+ \varepsilon_n^-],$$

故

$$h_n^+ = [\sigma_n^+ \varepsilon_n^+ + \sigma_n^- \varepsilon_n^-] \quad \text{以及} \quad h_n^- = [\sigma_n^- \varepsilon_n^+ + \sigma_n^+ \varepsilon_n^-].$$

这些关系式使得有可能把 (4) 重记为下列形式:

$$\sigma_n = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p^*} \alpha_i(\varepsilon_{n-i}) \sigma_{n-i}^+ + \sum_{i=1}^{p^*} \beta_i(\varepsilon_{n-i}) \sigma_{n-i}^-, \tag{5}$$

其中值 $p^* = \max(p,q)$ 以及函数 $\alpha_i(\varepsilon_{n-i})$ 和 $\beta_i(\varepsilon_{n-i})$ 是量 ε_{n-i}^+ 和 ε_{n-i}^- 的线性组合.

这样的模型研究起来有一定的 "技术" 复杂性, 其根源在于缺乏 Markov 性质. 然而, 尽管如此, 在简单情形下, 例如, 对于 $p = q = 1$, 还是可以对这种模型的性质进行足够完备的研究.

事实上, 当 $p = q = 1$,

$$\sigma_n = a_0 + [a_1 h_{n-1}^+ + b_1 h_{n-1}^-] + [c_1 \sigma_{n-1}^+ + d_1 \sigma_{n-1}^-], \tag{6}$$

①原文这里是 $\sum_{i=1}^{k} A_i = \mathbb{R}$. —— 译者注

或者在等价形式下,

$$\sigma_n = \alpha_0 + \alpha_1(\varepsilon_{n-1})\sigma_{n-1}^+ + \beta_1(\varepsilon_{n-1})\sigma_{n-1}^-, \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0, \\ \alpha_1(\varepsilon_{n-1}) &= a_1\varepsilon_{n-1}^+ + b_1\varepsilon_{n-1}^- + c_1, \\ \beta_1(\varepsilon_{n-1}) &= a_1\varepsilon_{n-1}^- + b_1\varepsilon_{n-1}^+ + d_1. \end{aligned} \tag{8}$$

如果 $\alpha_0 = 0$, 那么由 (7) 可求得,

$$\begin{aligned} \sigma_n^+ &= (\alpha_1(\varepsilon_{n-1}))^+\sigma_{n-1}^+ + (\beta_1(\varepsilon_{n-1}))^+\sigma_{n-1}^-, \\ \sigma_n^- &= (\alpha_1(\varepsilon_{n-1}))^-\sigma_{n-1}^+ + (\beta_1(\varepsilon_{n-1}))^-\sigma_{n-1}^-. \end{aligned} \tag{9}$$

由此可见, 序列 $(\sigma_n^+, \sigma_n^-, \varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 对于流 $(\mathscr{F}_n)$ 是 Markov 序列, 这就有可能用通常的 "Markov" 方法来研究它的性质. (详见 [399].)

3. 还余下一个现象: 在价格 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 的演变中的 "长记忆" 效应, 或者 "强后效" 效应.

可以给出随机序列依赖于 "过去" 的性态的各种不同的定义. 为了这个目的, 在概率论中有各种依赖性度量, 诸如*遍历系数*, *混合系数*等等.

例如, 可以通过量

$$\sup_A \mathsf{E}|\mathsf{P}(X_{n+m} \in A \mid X_1, \cdots, X_n) - \mathsf{P}(X_{n+m} \in A)| \to 0$$

当 $m \to \infty$ 时的收敛速度来度量实值平稳序列 $X = (X_n)$ 往后依赖过去的程度, 其中 sup 对所有 Borel 集 $A \subseteq \mathbb{R}$ 来取.

当然, 标准依赖性度量是 (自) 相关函数.

应该注意到, 根据多项统计研究, 金融时间序列在序列 $|h| = (|h_n|)_{n\geqslant 1}$ 和 $h^2 = (h_n^2)_{n\geqslant 1}$ 的性态中, 被揭示出比在模型*ARCH*, *GARCH* (更不要说*MA*, *AR* 和*ARMA*) 的情形中所得到的*更强的相关依赖性*.

我们记得, 对于*ARCH*(1), 根据 §3a 中的 (13),

$$\mathsf{Corr}(h_{n-k}^2, h_n^2) = \alpha_1^k, \qquad \alpha_1 < 1,$$

而对于*GARCH*(1,1), 自相关函数 $\rho(k)$ 是由同样的 §3a 中的公式 (32) 和 (33) 来描述的, 它们表明在这些模型中, 相关系数以几何方式递减于零 ("过去很快被遗忘").

经常采用这样的说法: (广义) 平稳序列 $Y = (Y_n)$ 有*长记忆*, 或者*强后效*, 是指其自相关函数 $\rho(k)$ 对于某个 ρ 有递减于零的*双曲*特征:

$$\rho(k) \sim ck^{-\rho}, \qquad k \to \infty, \tag{10}$$

例如, 分形高斯噪声 (参见第三章 §2d) $Y = (Y_n)_{n\geqslant 1}$ 就有这样的自相关函数递减特征, 这里

$$Y_n = X_n - X_{n-1},$$

其中 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是带参数 $0 < \mathbb{H} < 1$ 的分形布朗运动 (参见 §5c). 对于这种布朗运动 (参见 §5d 中的 (3))

$$\mathsf{Cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2}\{|t|^{2\mathbb{H}} + |s|^{2\mathbb{H}} - |t-s|^{2\mathbb{H}}\}\mathsf{E}X_1^2$$

以及 (参见 §5d 中的 (3))

$$\mathsf{Cov}(Y_n, Y_{n+k}) = \frac{\sigma^2}{2}\left\{|k+1|^{2\mathbb{H}} - 2|k|^{2\mathbb{H}} + |k-1|^{2\mathbb{H}}\right\}, \tag{11}$$

其中 $\sigma^2 = \mathsf{D}Y_n$, 因而, 自相关函数 $\rho(k) = \mathsf{Corr}(Y_n, Y_{n+k})$ 当 $k\to\infty$ 时有双曲特征:

$$\rho(k) \sim \mathbb{H}(2\mathbb{H}-1)k^{2\mathbb{H}-2}.$$

我们察觉, 当 $\frac{1}{2} < \mathbb{H} < 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho(k) = \infty.$$

当 $\mathbb{H} = \frac{1}{2}$ (通常的布朗运动) 时, 量 $Y = (Y_n)$ 形成高斯 "白噪声", 其 $\rho(k) = 0$, $k \geqslant 1$.

如果是 $0 < \mathbb{H} < \frac{1}{2}$, 那么

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\rho(k)| < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\rho(k) = 0.$$

注. 在专著 [202] 的第 7 章中, 考察了各种各样的带强后效的过程的模型, 还包含大量有关这些模型在经济、生物、水文等等中的应用的资料. 也参见 [418].

4. 在著作 [89], [360] 中介绍和研究了 *ARCH* 模型族中的新模型 $HARCH(p)$, 其中对于模型的自相关函数和量 h_n 的平方的递减特征比通常对于 *ARCH* 和 *GARCH* 型模型所成立的更慢. 这种长记忆效应也可用 [15] 中介绍的 *FIGARCH* 来刻画.

根据在这些著作中所给出的定义, p 阶的 $HARCH(p)$ (Heterogeneous AutoRegressive Conditional Heteroskedastic, 异质自回归条件异方差) 给定如下:

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n,$$

其中

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\left(\sum_{i=1}^{j}h_{n-i}\right)^2$$

而 $\alpha_0 > 0$, $\alpha_p > 0$, $\alpha_j \geqslant 0$, $j = 1, \cdots, p-1$.

特别是, 对于 $p = 1$,

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2,$$

即$HARCH(1) = ARCH(1)$.

在 $p = 2$ 的情形下,

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \alpha_2 (h_{n-1} + h_{n-2})^2. \tag{12}$$

我们引入这个模型的某些性质.

首先注意到, 有 $(h_{n-1} + h_{n-2})^2$ 这一项就有可能 "把握" 上面提到的反对称效应.

同时, 如果 $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 < 1$, 那么由 (12) 得到, 存在 "平稳" 值

$$\mathsf{E} h_n^2 = \mathsf{E} \sigma_n^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - 2\alpha_2}. \tag{13}$$

类似地考察 $\mathsf{E}\sigma_n^4$, 并利用

$$\mathsf{E} h_{n-1} h_{n-2} = \mathsf{E} h_{n-1}^3 h_{n-2} = \mathsf{E} h_{n-1} h_{n-2}^3 = 0,$$

由 (12) 我们求得, 当 $(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \alpha_2^2 < \frac{1}{3}$ 时, 存在 "平稳" 值

$$\mathsf{E} h_n^4 = \frac{C}{\frac{1}{3} - (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \alpha_2^2}, \tag{14}$$

其中

$$C = \frac{\alpha_0^2 [1 + 2\alpha_2(\alpha_1 + 3\alpha_2) - (\alpha_1 + 2\alpha_2)^2]}{[1 - (\alpha_1 + 2\alpha_2)]^2}. \tag{15}$$

(注意, $\mathsf{E}\sigma_n^4 = \frac{1}{3}\mathsf{E} h_n^4$.)

现在我们来求对于 (h_n^2) 的自相关函数的值.

设 $R(k) = \mathsf{E} h_n^2 h_{n-k}^2$. 于是对于 $k = 1$ 在 "平稳性" 假定下,

$$\begin{aligned} R(1) &= \mathsf{E}\sigma_n^2 \varepsilon_n^2 h_{n-1}^2 = \mathsf{E}\sigma_n^2 h_{n-1}^2 \\ &= \mathsf{E}(h_{n-1}^2 [\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \alpha_2 (h_{n-1} + h_{n-2})^2]) \\ &= \alpha_0 \mathsf{E} h_{n-1}^2 + \alpha_1 \mathsf{E} h_{n-1}^4 + \alpha_2 \mathsf{E} h_{n-1}^4 \\ &\quad + 2\alpha_2 \mathsf{E} h_{n-1}^3 h_{n-2} + \alpha_2 \mathsf{E} h_{n-1}^2 h_{n-2}^2. \end{aligned}$$

从而, 如果 $\alpha_2 < 1$, 那么

$$R(1) = \frac{\alpha_0 \mathsf{E} h_{n-1}^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \mathsf{E} h_{n-1}^4}{1 - \alpha_2}. \tag{16}$$

同时, 还进一步有

$$\begin{aligned}R(k) &= \mathsf{E}h_n^2 h_{n-k}^2 = \mathsf{E}\sigma_n^2 h_{n-k}^2 \\ &= \mathsf{E}[\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \alpha_2(h_{n-1} + h_{n-2})^2]h_{n-k}^2 \\ &= \alpha_0 \mathsf{E}h_{n-k}^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)R(k-1) + \alpha_2 R(k-2),\end{aligned}$$

其中 $R(0) = \mathsf{E}h_n^4$.

由此很明显, 在平稳情形下, 自相关函数 $\rho(k) = \mathrm{Corr}(h_n^2, h_{n-k}^2)$ 满足方程 ($k \geqslant 2$)

$$\rho(k) = A + B\rho(k-1) + C\rho(k-2), \tag{17}$$

其中

$$A = \frac{\alpha_0 \mathsf{E}h_n^2}{\mathsf{D}h_n^2}, \qquad B = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathsf{E}h_n^2)^2}{\mathsf{D}h_n^2}, \qquad C = \frac{(\alpha_2 - 1)(\mathsf{E}h_n^2)^2}{\mathsf{D}h_n^2},$$

以及

$$\rho(0) = 1, \qquad \rho(1) = \frac{R(1) - (\mathsf{E}h_n^2)^2}{\mathsf{D}h_n^2}.$$

在第四章 §3e 中, 我们将继续考察适用于汇率的 “强后效” 问题.

§3c. 随机波动率模型

1. 这种模型已经在 §1d 第 7 点中介绍过, 它通过具有两个随机源 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 和 $\delta = (\delta_n)$ 来刻画, 序列 $h = (h_n)$ 的性态由下列值来确定:

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \tag{1}$$

其中 $\sigma_n = e^{\frac{1}{2}\Delta_n}$, 序列 $(\Delta_n) \in AR(p)$:

$$\Delta_n = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i \Delta_{n-i} + c\delta_n. \tag{2}$$

两个序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 和 $\delta = (\delta_n)$ 将被假定为独立标准高斯序列; 这时我们将说, $h = (h_n)$ 服从$SV(p)$ 模型, 即, 随机波动率 (Stochastic Volatility) 模型.

令 $p = 1$ 和 $|a_1| < 1$, 我们来考察这一模型的性质:

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \qquad \ln \sigma_n^2 = a_0 + a_1 \ln \sigma_{n-1}^2 + c\delta_n. \tag{3}$$

设 $\mathscr{F}_n^{\varepsilon,\delta} = \sigma(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n; \delta_1, \cdots, \delta_n)$, $\mathscr{F}_n^{\delta} = \sigma(\delta_1, \cdots, \delta_n)$. 显然,

$$\mathsf{E}(h_n \mid \mathscr{F}_n^{\delta}) = \sigma_n \mathsf{E}\varepsilon_n = 0$$

以及

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(h_n \mid \mathscr{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta}) &= \mathsf{E}(\sigma_n\varepsilon_n \mid \mathscr{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta}) \\ &= \mathsf{E}(\sigma_n \mathsf{E}(\varepsilon_n \mid \mathscr{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta} \vee \sigma(\delta_n)) \mid \mathscr{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta}) \\ &= \mathsf{E}(\sigma_n \mathsf{E}(\varepsilon_n \mid \mathscr{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta})) = 0,\end{aligned}$$

因为 $\mathsf{E}\varepsilon_n = 0$.

从而, 关于流 $(\mathscr{F}_{n-1}^{\varepsilon,\delta})$, 量 $h = (h_n)$ 形成鞅差. (但不是关于 $(\mathscr{F}_n^{\delta})$, 因为 h_n 不是 $\mathscr{F}_n^{\delta}$-可测的.)

还有,

$$\mathsf{E}h_n^2 = \mathsf{E}\sigma_n^2\, \mathsf{E}\varepsilon_n^2 = \mathsf{E}\sigma_n^2 = \mathsf{E}e^{\Delta_n}.$$

我们将假定

$$\Delta_0 \sim \mathscr{N}\left(\frac{a_0}{1-a_1}, \frac{c^2}{1-a_1^2}\right). \tag{4}$$

于是根据 (3), 序列 $\Delta = (\Delta_n)$ 满足自回归模式$AR(1)$:

$$\Delta_n = a_0 + a_1\Delta_{n-1} + c\delta_n,$$

并且是平稳序列. (参见 §2b.)

由 (4),

$$\mathsf{E}h_n^2 = \mathsf{E}e^{\Delta_n} = e^{\frac{a_0}{1-a_1}}\, e^{\frac{c^2}{2(1-a_1^2)}},$$

其中为了计算 $\mathsf{E}e^{\Delta_n}$, 我们运用对于随机变量 $\xi \sim \mathscr{N}(0,1)$ 和对于任何 σ 的下列等式

$$\mathsf{E}e^{\sigma\xi - \frac{1}{2}\sigma^2} = 1.$$

类似地可求得

$$\mathsf{E}|h_n| = \mathsf{E}|\varepsilon_n|\mathsf{E}\sigma_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathsf{E}e^{\frac{1}{2}\Delta_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{a_0}{2(1-a_1)}}\, e^{\frac{1}{8}\cdot\frac{c^2}{1-a_1^2}}.$$

我们现在考察序列 $h = (h_n)$ 和 $h^2 = (h_n^2)$ 的协方差性质.

我们有

$$\mathsf{E}h_n h_{n+1} = 0$$

以及一般对于任何 $k \geqslant 1$,

$$\mathsf{E}h_n h_{n+k} = 0.$$

从而, 序列 $h = (h_n)$ 由不相关的随机变量所组成: 如果 $R_h(k) = \mathsf{E}h_n h_{n+k}$, 那么

$$R_h(k) = \begin{cases}\mathsf{E}h_n^2, & k = 0,\\ 0, & k > 0.\end{cases}$$

还有,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}h_n^2h_{n-1}^2 &= \mathsf{E}\sigma_n^2\sigma_{n-1}^2 = \mathsf{E}e^{\Delta_n+\Delta_{n-1}} \\
&= \mathsf{E}\left(e^{\Delta_{n-1}}\mathsf{E}(e^{a_0+a_1\Delta_{n-1}+c\delta_n}\mid\Delta_{n-1})\right) \\
&= \mathsf{E}e^{a_0+\Delta_{n-1}(1+a_1)}\mathsf{E}e^{c\delta_n} = e^{a_0+\frac{c^2}{2}}\mathsf{E}e^{(1+a_1)\Delta_{n-1}} \\
&= e^{a_0+\frac{c^2}{2}}e^{\frac{a_0(1+a_1)}{1-a_1}}\mathsf{E}e^{(1+a_1)(\Delta_{n-1}-\frac{a_0}{1-a_1})} \\
&= e^{\frac{2a_0}{1-a_1}+\frac{c^2}{2}}e^{\frac{(1+a_1)^2}{2}\cdot\frac{c^2}{1-a_1^2}} = e^{\frac{2a_0}{1-a_1}+\frac{c^2}{2}}e^{\frac{c^2}{2}\cdot\frac{1+a_1}{1-a_1}} \\
&= e^{\frac{2a_0}{1-a_1}+\frac{c^2}{2}\cdot\frac{2}{1-a_1}} = e^{\frac{2a_0+c^2}{1-a_1}}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\mathsf{Cov}(h_n^2,h_{n-1}^2) = e^{\frac{2a_0+c^2}{1-a_1}} - e^{\frac{2a_0}{1-a_1}}e^{\frac{c^2}{1-a_1^2}} = e^{\frac{2a_0}{1-a_1}}e^{\frac{c^2}{1-a_1^2}}(e^{\frac{c^2a_1}{1-a_1^2}}-1).$$

正如所期待的, 量 h_n^2 和 h_{n-1}^2 在 $a_1>0$ 的情形下正相关, 而在 $a_1<0$ 的情形下负相关.

除了所得到的公式以外, 还有

$$\mathsf{E}\sigma_n^2 = e^{\frac{a_0}{1-a_1}}e^{\frac{c^2}{2(1-a_1^2)}},$$

$$\mathsf{E}\sigma_n^2\sigma_{n-1}^2 = e^{\frac{2a_0}{1-a_1}}e^{\frac{c^2}{1-a_1}}.$$

我们再引入更一般的公式: 对于正的 r 和 s, 有

$$\mathsf{E}\sigma_n^r = e^{\frac{ra_0}{2(1-a_1)}+\frac{r^2}{8}\cdot\frac{c^2}{1-a_1^2}}$$

以及

$$\mathsf{E}\sigma_n^r\sigma_{n-1}^s = \mathsf{E}\sigma_n^r\mathsf{E}\sigma_n^s e^{rs\frac{c^2}{4(1-a_1^2)}}.$$

这些公式可用来计算 $h=(h_n)$ 的各种矩. 例如,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}|h_n| &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathsf{E}\sigma_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{\frac{a_0}{2(1-a_1)}+\frac{c^2}{8(1-a_1^2)}}, \\
\mathsf{E}h_n^4 &= 3\mathsf{E}\sigma_n^4, \\
\mathsf{E}h_n^2h_{n-k}^2 &= \mathsf{E}\sigma_n^2\sigma_{n-k}^2, \\
\mathsf{E}|h_nh_{n-k}| &= \frac{2}{\pi}\mathsf{E}\sigma_n\sigma_{n-k}.
\end{aligned}$$

由这些公式特别得到, “平稳” 峰度系数

$$K = \frac{\mathsf{E}h_n^4}{(\mathsf{E}h_n^2)^2} - 3 = 3\left(\frac{\mathsf{E}\sigma_n^4-(\mathsf{E}\sigma_n^2)^2}{(\mathsf{E}\sigma_n^2)^2}\right) = 3\frac{\mathsf{D}\sigma_n^2}{(\mathsf{E}\sigma_n^2)^2} \geqslant 0.$$

这说明, 带两个随机源 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 和 $\delta = (\delta_n)$ 的 "随机波动率" 模型, 如同$ARCH$ 族的模型一样, 允许描述量 h_n 的概率分布密度在均值 $\mathsf{E}h_n = 0$ 的邻域有尖峰的序列 $h = (h_n)$.

2. 余下的问题是怎样根据观察值 $h_1, \cdots, h_n$ 来构造波动率的估计量 $\widehat{\sigma}_n$.

如果 $h_n = \mu + \sigma_n\varepsilon_n$, 那么 $\mathsf{E}h_n = \mu$ 以及

$$\mathsf{E}|h_n - \mu| = \mathsf{E}|\sigma_n\varepsilon_n| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathsf{E}\sigma_n.$$

这个关系式自然用来作为构造波动率 σ_n 的估计量 $\widehat{\sigma}_n$ 的基础, 其公式当 μ 未知时为:

$$\widehat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}|h_n - \overline{h}_n|, \tag{5}$$

其中

$$\overline{h}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k,$$

当 μ 已知时为

$$\widehat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}|h_n - \mu|. \tag{6}$$

另一种估计 σ_n^2 的方法是从下列事实出发: $\mathsf{E}h_n^2 = \mathsf{E}\sigma_n^2$, 即基于二阶矩的性质.

当然, 可以取 $\widehat{\sigma_n^2} = h_n^2$ 作为 σ_n^2 的估计量. 它是无偏的, 但其均方误差

$$\begin{aligned}\mathsf{E}|\widehat{\sigma_n^2} - \sigma_n^2|^2 &= \mathsf{E}|h_n^2 - \sigma_n^2|^2 = \mathsf{E}h_n^4 - 2\mathsf{E}h_n^2\sigma_n^2 + \mathsf{E}\sigma_n^4\\ &= 4\mathsf{E}\sigma_n^4 - 2\mathsf{E}\sigma_n^4 = 2\mathsf{E}\sigma_n^4 = 2\exp\left\{\frac{2a_0}{1-a_1} + \frac{2c^2}{1-a_1^2}\right\}\end{aligned}$$

可能相当大.

自然, 如果量 $\sigma_k^2\ (k \leqslant n)$ 是相关的, 那么可尝试在构造 σ_n^2 的估计量时, 不仅利用观察量 h_n^2, 并且也利用以前的观察量 $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \cdots$. 这时, 当然很清楚, 如果量 $\sigma_k^2\ (k \leqslant n)$ 弱相关, 那么以前的量 $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \cdots$ 应该赋以较小的递减的权重来考虑. 如果量 $\sigma_k^2\ (k \leqslant n)$ 强相关, 那么值 $h_{n-1}^2, h_{n-2}^2, \cdots$ 可能对 σ_n^2 的值给出 (与 h_n^2 中的信息相比较的) 本质的补充信息.

这一思路导致考察数加权的估计量

$$\widetilde{\sigma_n^2} = (1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k h_{n-k}^2, \qquad 0 < \lambda < 1, \tag{7}$$

它的构造正如所看到的, 其开始时刻从 0 移到 $-\infty$. 在这一假定下, 自回归递推关系式 (2) 的平稳解有下列形式:

$$\Delta_n = \frac{a_0}{1-a_1} + c\sum_{k=0}^{\infty} a_1^k\delta_{n-k}, \tag{8}$$

其中级数在均方意义下收敛. 正如在 §2b 中所指出, 这个解 (在平稳解类中) 是唯一的.

我们察觉, 对于公式 (7), 有 $(1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k = 1$ 成立, 即构造 $\widetilde{\sigma_n^2}$ 的权重系数之和为一.

由于 $\mathsf{E}h_{n-k}^2 = \mathsf{E}\sigma_{n-k}^2 = \mathsf{E}\sigma_n^2$, 故我们看到 $\mathsf{E}\widetilde{\sigma_n^2} = \mathsf{E}\sigma_n^2$, 即估计量 $\widetilde{\sigma_n^2}$ 与 $\widehat{\sigma_n^2}$ 一样都是无偏的.

还要注意到, 估计量 $\widetilde{\sigma_n^2}$ 的精度强烈依赖于所选择的参数的值, 从而, 由此还产生参数值 λ 的 (还相当不简单的) "最优" 选择问题.

由 (7) 得到, $\widetilde{\sigma_n^2}$ 满足递推关系式

$$\widetilde{\sigma_n^2} = \lambda\widetilde{\sigma_{n-1}^2} + (1-\lambda)h_n^2, \tag{9}$$

它对于用统计分析和建模方法求估计量来说是很方便的.

3. 现在从模型

$$h_n = e^{\frac{1}{2}\Delta_n}\varepsilon_n \tag{10}$$

出发, 其中 $\Delta_n = a_0 + a_1\Delta_{n-1} + c\delta_n$; 对于量 $\Delta_n(=\ln\sigma_n^2)$ 的估计量自然利用均方意义下最优的估计量

$$m_n = \mathsf{E}(\Delta_n|h_1,\cdots,h_n).$$

遗憾的是, 所考察的模式的非线性使得以显式来求出 m_n 的问题几乎是毫无希望的. 因而, 首先自然会想到的是, 有必要 "线性化" 所考察的问题, 并且进一步运用 "高斯线性 Kalman-Bucy 滤波" (参见例如, [303]).

例如, 我们可这样处理.

由 (10) 求得

$$\ln h_n^2 = \ln\varepsilon_n^2 + \ln\sigma_n^2 = \mathsf{E}\ln\varepsilon_n^2 + \Delta_n + (\ln\varepsilon_n^2 - \mathsf{E}\ln\varepsilon_n^2),$$

其中 $\mathsf{E}\ln\varepsilon_n^2 \approx -1.27$, $\mathsf{D}\ln\varepsilon_n^2 = \pi^2/2 \approx 4.93$. 因此, 记 $x_n = \ln^2 h_n$, 我们得到下列线性方程组:

$$\Delta_n = a_0 + a_1\Delta_{n-1} + c\delta_n, \tag{11}$$

$$x_n = \mathsf{E}\ln\varepsilon_n^2 + \Delta_n + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\xi_n, \tag{12}$$

其中

$$\xi_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}(\ln\varepsilon_n^2 - \mathsf{E}\ln\varepsilon_n^2) \tag{13}$$

且 $\mathsf{E}\xi_n = 0$, $\mathsf{D}\xi_n = 1$, 以及作为 $\mathsf{E}\ln\varepsilon_n^2$ 的 (近似) 值可取上面引入的值 -1.27.

这样一来, 可以认为, 我们给定线性方程组 (11)-(12); 然而, 其中量 ξ_n 的分布不是高斯的, 这就没有可能直接应用 Kalman-Bucy 线性滤波理论.

尽管如此, 我们将这样来考察 Kalman-Bucy 滤波: 如果量 ξ_n 正态分布, $\xi_n \sim \mathscr{N}(0,1)$, $n \geqslant 1$, 并且独立于序列 (δ_n).

在这一假设下, 设 $\mu_n = \mathsf{E}(\Delta_n \mid x_1, \cdots, x_n)$ 和 $\gamma_n = \mathsf{D}\Delta_n$. 于是对应的确定量 μ_n 和 γ_n 的演变的方程组有下列形式 (参见例如, [303; 第 VI 章 §7 的定理 1]):

$$\mu_{n+1} = (a_0 + a_1\mu_n) + \frac{a_1\gamma_n}{\pi^2/2 + \gamma_n}(x_{n+1} + 1.27 - \mu_n), \tag{14}$$

$$\gamma_{n+1} = (a_1^2\gamma_n + c^2) - \frac{(a_1\gamma_n)^2}{\pi^2/2 + \gamma_n}. \tag{15}$$

这时, $\mu_0 = \mathsf{E}\Delta_0$, $\gamma_0 = \mathsf{D}\Delta_0$.

我们察觉, 如果在 (11) 中参数 c 较大, 那么在 x_n 中的项 Δ_n 将起着决定性的作用, 并且有可能要求, 在这一情形下, 对我们有意义的量 m_n 可很好地由量 μ_n 来逼近.

4. 我们注意到, 在原来的模型 (11) 中参数 $\theta = (a_0, a_1, c)$ 未知的情形下, 为根据 $(h_1, \cdots, h_n)$ 求出参数 σ_n 的估计量 $\widehat{\sigma}_n$, 经常利用基于假定具有 θ 的先验分布 $\pi(\theta)$ 的 Bayes 方法. 于是, 在原理上, 有可能求出后验分布 $\pi(\theta, \sigma_n \mid h_1, \cdots, h_n)$, 然后, 再由它求出后验分布 $\pi(\theta \mid h_1, \cdots, h_n)$ 和 $\pi(\sigma_n \mid h_1, \cdots, h_n)$; 由此就有可能构造估计量 $\widehat{\theta}_n$ 和 $\widehat{\sigma}_n$, 例如, 作为后验均值, 或者使后验密度达到最大值的值. 关于 Bayes 方法的详情参见, 例如, 论文 [252] 以及在 Journal of Business and Economic Statistics (1994) 的同一卷的 395–417 页上的评论.

5. *GARCH* 族模型和 "随机波动率" 模型的描述都是在条件方法的框架中给出的. 这时, 条件分布 $\mathrm{Law}(h_n \mid \sigma_n)$ 总是正态分布 $\mathscr{N}(0, \sigma_n^2)$, 其中 σ_n^2 以可料方式依赖于 "过去". 对于这样的方法, 自然发生这样的一个问题: 无条件分布 $\mathrm{Law}(h_n)$, $\mathrm{Law}(h_1, \cdots, h_n)$ $(n \geqslant 1)$ 是怎样的?

为了在这里表达可能结果的特征, 我们考察下列模型 (参见 [105]).

设 $h_n = \sigma_n\varepsilon_n$, 其中 (ε_n) 仍然是标准高斯序列, 而

$$\sigma_n^2 = a\sigma_{n-1}^2 + b\delta_n \tag{16}$$

以及 (δ_n) 是非负独立稳定随机变量序列, 其稳定指数 $0 < \alpha < 1$. (比较第三章 §1c 中的第 4 点.) 假定序列 (ε_n) 和 (δ_n) 相互独立.

如果假定 $0 \leqslant a < 1$, 那么由 (16) 的逐次叠代, 我们求得

$$\sigma_n^2 = b\sum_{k=0}^{\infty} a^k\delta_{n-k} + \lim_{m\to\infty} a^m\sigma_{n-m-1}^2. \tag{17}$$

由稳定分布的自相似性质,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k\delta_{n-k} \overset{\mathrm{d}}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^{\alpha k}\right)^{1/\alpha}\delta_1,$$

以及在 $0 < \alpha < 1, 0 \leqslant a < 1$ 的假定下, 方程 (16) 有 (有限) 非负平稳解 (σ_n^2):

$$\sigma_n^2 \stackrel{\mathrm{d}}{=} b\left(\frac{1}{1-a^\alpha}\right)^{1/\alpha} \delta_1. \tag{18}$$

由此和定义 $(h_n = \sigma_n \varepsilon_n)$, 我们断定, 平稳正态分布 $\mathrm{Law}(h_n)$ 是稳定的, 且其稳定指数等于 2α.

6. 在结束这一讨论非线性随机模型及其性质的章节的最后, 我们还剩下在这些模型中观察到的已经提起的 "厚尾" 效应. (也参见第四章 §2c.)

考察$ARCH(1)$ 模型 $h = (h_n)_{n\geqslant 0}$, 对于 $n \geqslant 1$, $h_n = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2}\varepsilon_n$, 其初值条件为 h_0, 它不依赖于标准高斯序列 $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$, 而 $\alpha_0 > 0, 0 < \alpha_1 < 1$.

看来适当选择量 h_0 的分布, 能使所考察的模型存在严格平稳过程的解 $h = (h_n)_{n\geqslant 0}$, 并且对它 (当 $\alpha_1 > 0$ 充分小时) 有 "厚尾" 效应: $\mathsf{P}(h_n > x) \sim cx^{-\gamma}$, 其中 $c > 0, \gamma > 0$.

这些 (相当不简单) 结果的证明参见不久前出版的专著: P. Embrechts, C. Klueppelberg, T. Mikosch, "Modelling extremal events for insurance and finance (保险和金融的极端事件的建模)", Berlin, Springer-Verlag, 1997 (定理 8.4.9 和 8.4.12), 其中也可找到许多$ARCH$, $GARCH$ 等等类型的模型的详细分析以及大量的有关研究的文献.

4. 附录: 动态混沌模型

§4a. 非线性混沌模型

1. 直到现在为止, 当 $h_n = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$, 而 S_n 是时刻 n 的 "价格" 的值时, 我们描述序列 $h = (h_n)$ 的演变总是从这样的假设出发: 这些量有随机本性, 即, $S_n = S_n(\omega)$, $h_n = h_n(\omega)$ 是给定在某个为统计不确定的 "自然" 状态建模的渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}, \mathsf{P})$ 中的随机变量.

另一方面, 相当广泛地为人熟知的是, 即使是下列类型的非常简单的*确定性的*非线性系统

$$x_{n+1} = f(x_n; \lambda) \tag{1}$$

或者

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}; \lambda), \tag{2}$$

其中 λ 是某个参数, 它也可能生成 (在对应的初始条件下) 其性态极为类似于随机序列性态的序列 $(x_0, x_1, x_2, \cdots)$.

这种情况导致合理地提出这样的问题: 许多经济 (包括金融) 时间序列是否实际上并非是随机的, 而是*混沌的*, 即它可用确定性的非线性系统来描述, 并且如所周知, 它同样可产生金融数据的统计分析中所观察到的 (诸如, “聚集性” 类型的) 效应 (参见第四章).

参照专门的和非常广泛的文献 (参见例如, [59], [71], [104], [198], [378], [379], [383], [385], [386], [428], [456]) 中的形式定义, 我们引入某些非线性混沌系统的例子, 以对它们的性态给出一种表示, 同时也自然发生这样的问题, 怎样用随机系统或混沌系统来确定、生成给定的实现.

从价格的未来运动预测的视角来看, 非线性混沌模型在多大程度上可预测的问题是令人非常感兴趣的. 我们在以后将看到, 这里的局面并不令人十分乐观, 其原因在于, 尽管有确定性特征, 混沌系统的轨线的性态可能依赖于初始数据的值和参数 λ 的值的确定精度而强烈变化.

2. 例 1. 我们考察所谓*逻辑斯蒂* (logistic) 映射

$$x \rightsquigarrow Tx \equiv \lambda x(1-x),$$

由它可生成 (一维) 非线性动态系统

$$x_n = \lambda x_{n-1}(1-x_{n-1}), \qquad n \geqslant 1, \quad 0 < x_0 < 1. \tag{3}$$

(表面上看来, 逻辑斯蒂方程首先出现在考虑种群体增长速度有限制的种群动力学模型中.)

对于值 $\lambda \leqslant 1$, 给定任何满足 $0 < x_0 < 1$ 的初值 x_0, 当 $n \to \infty$ 时, 解 $x_n = x_n(\lambda) \downarrow 0$ (图 23a). 这样一来, 状态 $x_\infty = 0$ 在这一情形下可看作*唯一稳定状态*, 对它来说, 当 $n \to \infty$ 时, 值 x_n 趋向于它.

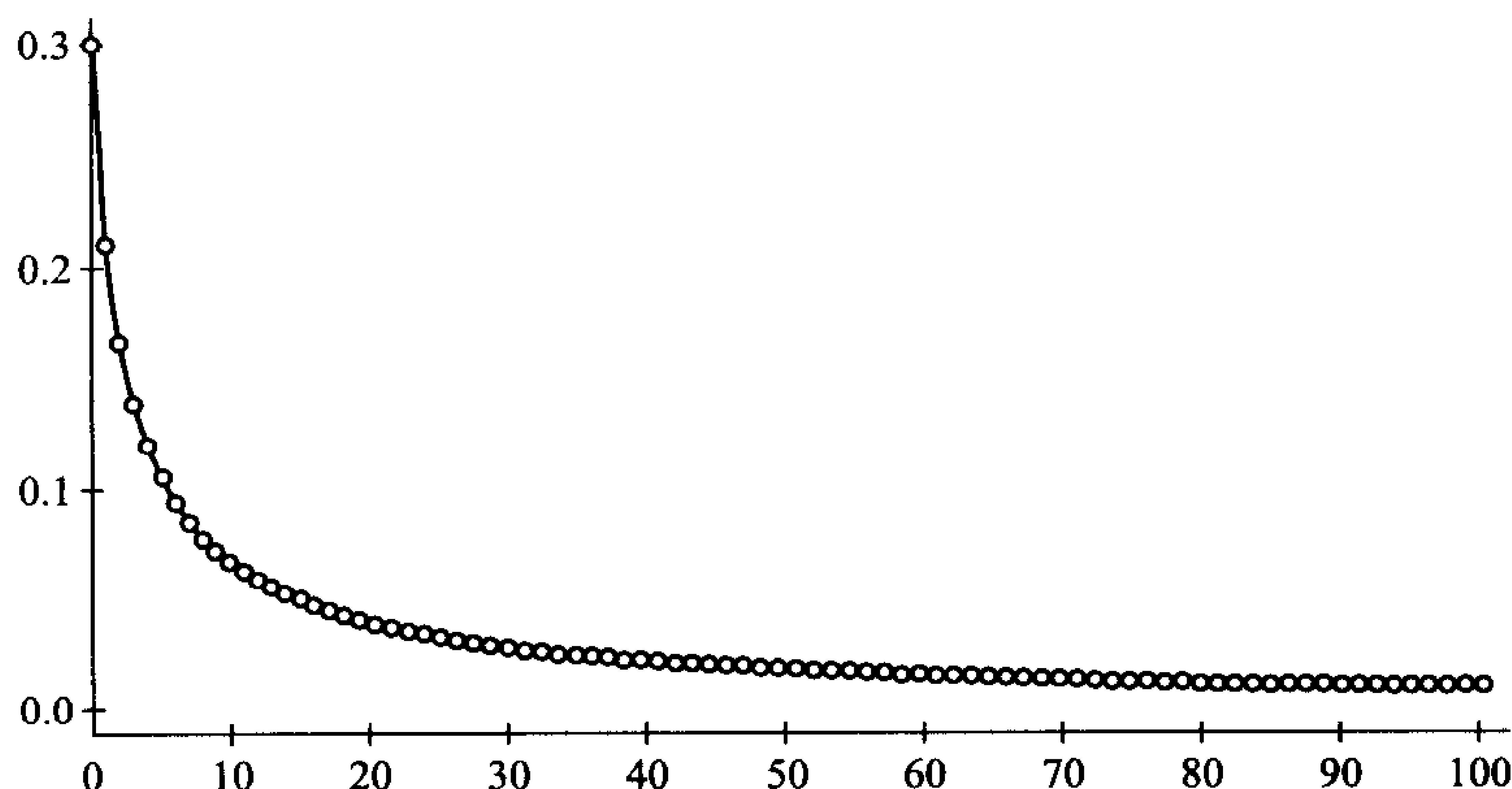


图 23 a $\lambda = 1$ 的情形

当 $\lambda = 2$ 时, 值 $x_n \uparrow \frac{1}{2}$ (图 23b). 因此, 在这一情形下, 也存在唯一稳定状态 ($x_\infty = \frac{1}{2}$), 当 $n \to \infty$ 时值 x_n 被它所 "吸引".

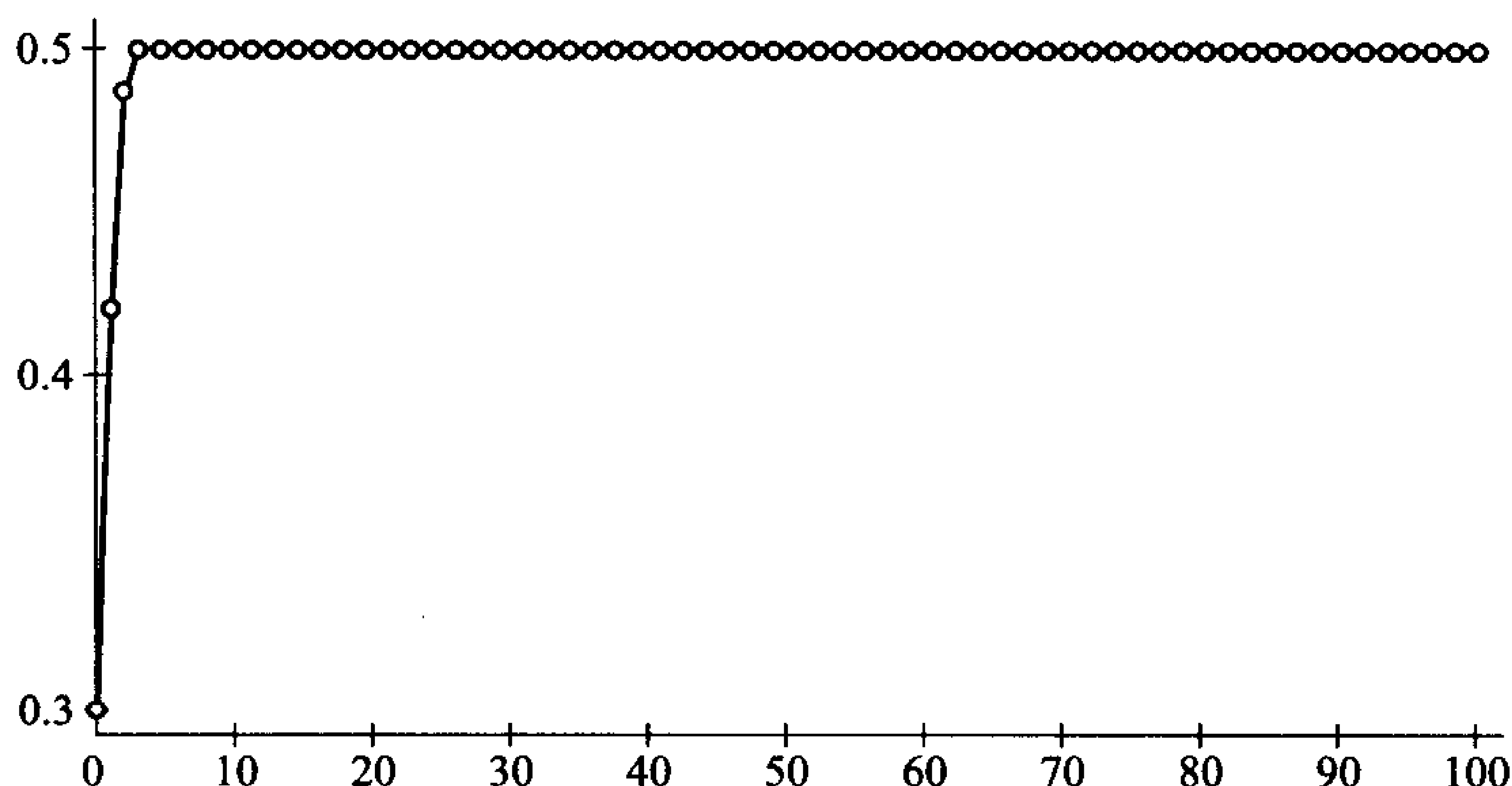


图 23 b $\lambda = 2$ 的情形

我们现在增大参数 λ 的值. 当 $\lambda < 3$ 时, 系统 (3) 还将是只有一个稳定状态. 然而, 当 $\lambda = 3$ 时, 产生了全新的效应: 随着 n 的增大, 出现了两个稳定状态 x_∞ (图 23c), 其中系统在这两个状态之间交替.

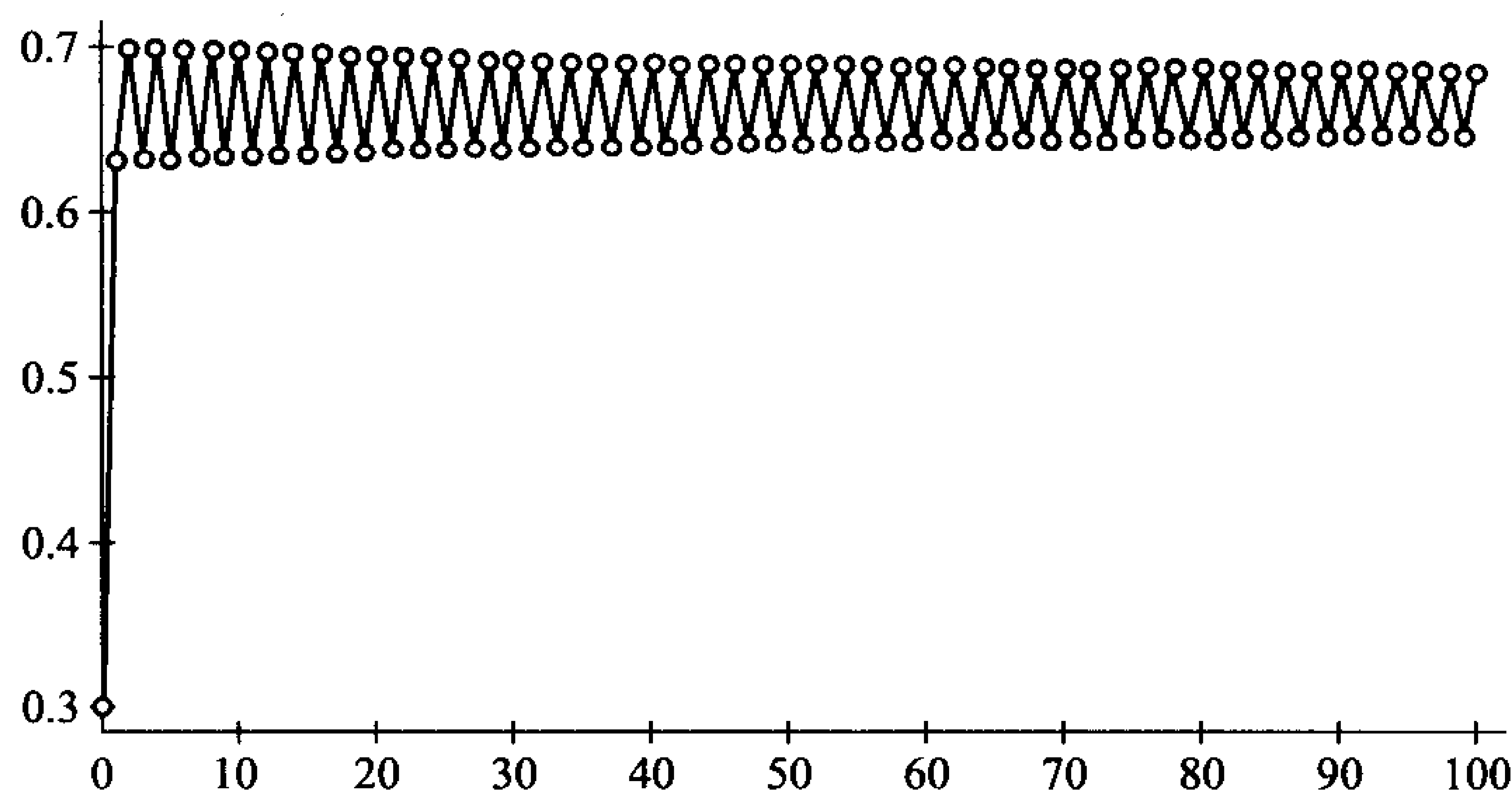


图 23 c $\lambda = 3$ 的情形

当参数 λ 值增大时, 这样的系统性态特征将保持. 但是, 然后, 当 $\lambda = 3.4494\cdots$ 左右, 系统又开始发生某种新现象, 其中出现四个稳定状态, 系统的运动在这四个状态之间 (图 23d).

当量 λ 再增大, 系统开始不断出现新的稳定状态: 当 $\lambda = 3.5644\cdots$ 时, 这样的状态有 16 个, 当 $\lambda = 3.5696\cdots$ 时, 它们有 64 个. 而当 $\lambda = 3.6$ 时, 这样的状态个数开始等于无限, 它被解释为失去了系统稳定性, 并且系统过渡到混沌状态.

这时状态更换的周期特征完全丧失, 系统开始在无限多种状态之间, 从一个跳到另一个地游走. 这里重要的是要注意到, 尽管系统仍然是确定性的, 实际上不可能

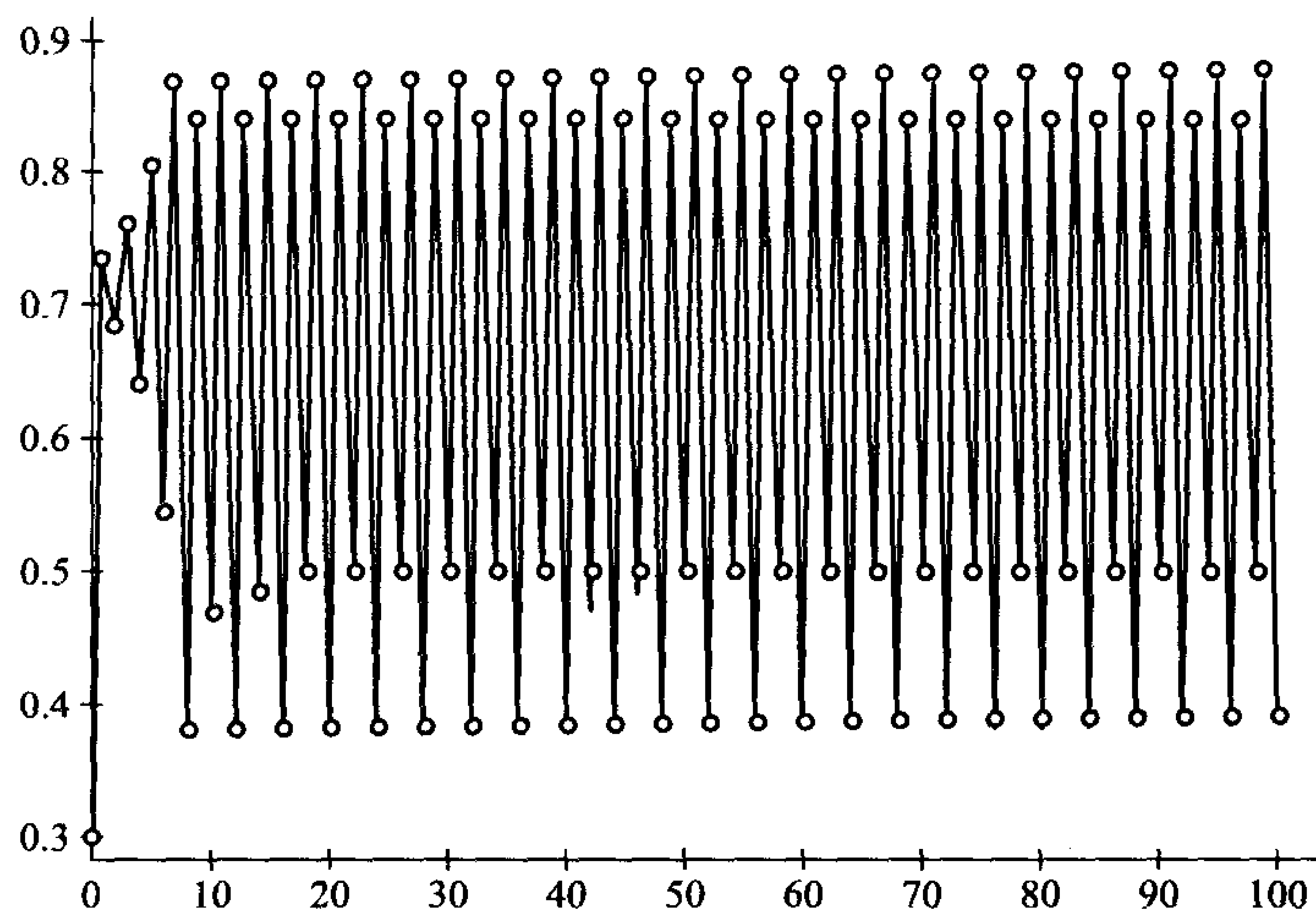


图 23d $\lambda = 3.5$ 的情形

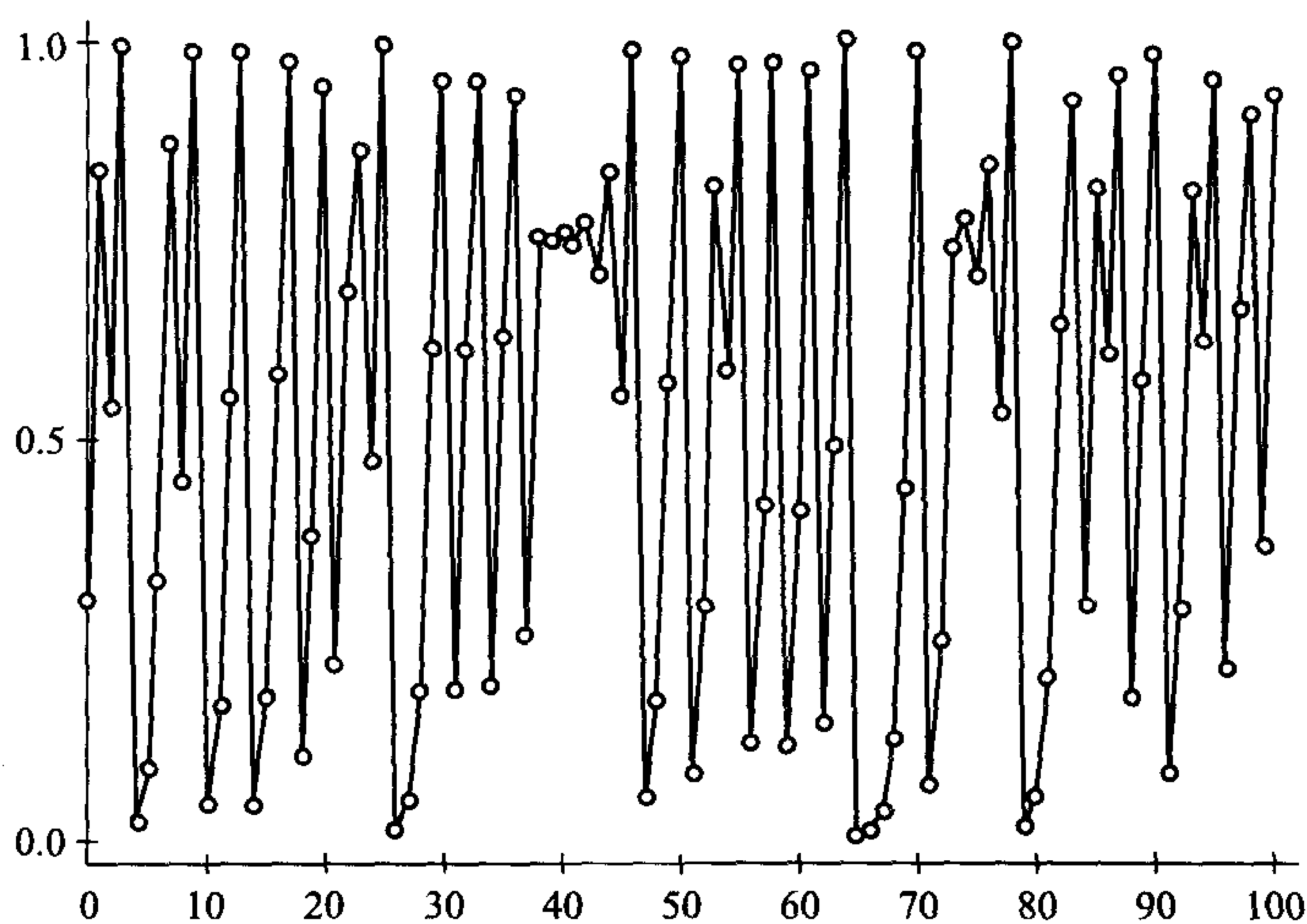


图 23e $\lambda = 4$ 的情形

预料系统在某个时刻在哪里, 因为在确定 x_n 和 λ 的有限精度可能强烈影响可预测量的值.

从所引入的简单描述中已经变得很清晰, 参数 λ 的值 (λ_k) 使得系统产生 "分支" 或 "分叉", 并且所有的值变得 "越来越靠近" (图 24).

M. Feigenbaum 提出猜想, 并由 O. Lanford 证明 ([294]) 的结果指出, (对于所有抛物系统)

$$\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \to F, \qquad k \to \infty,$$

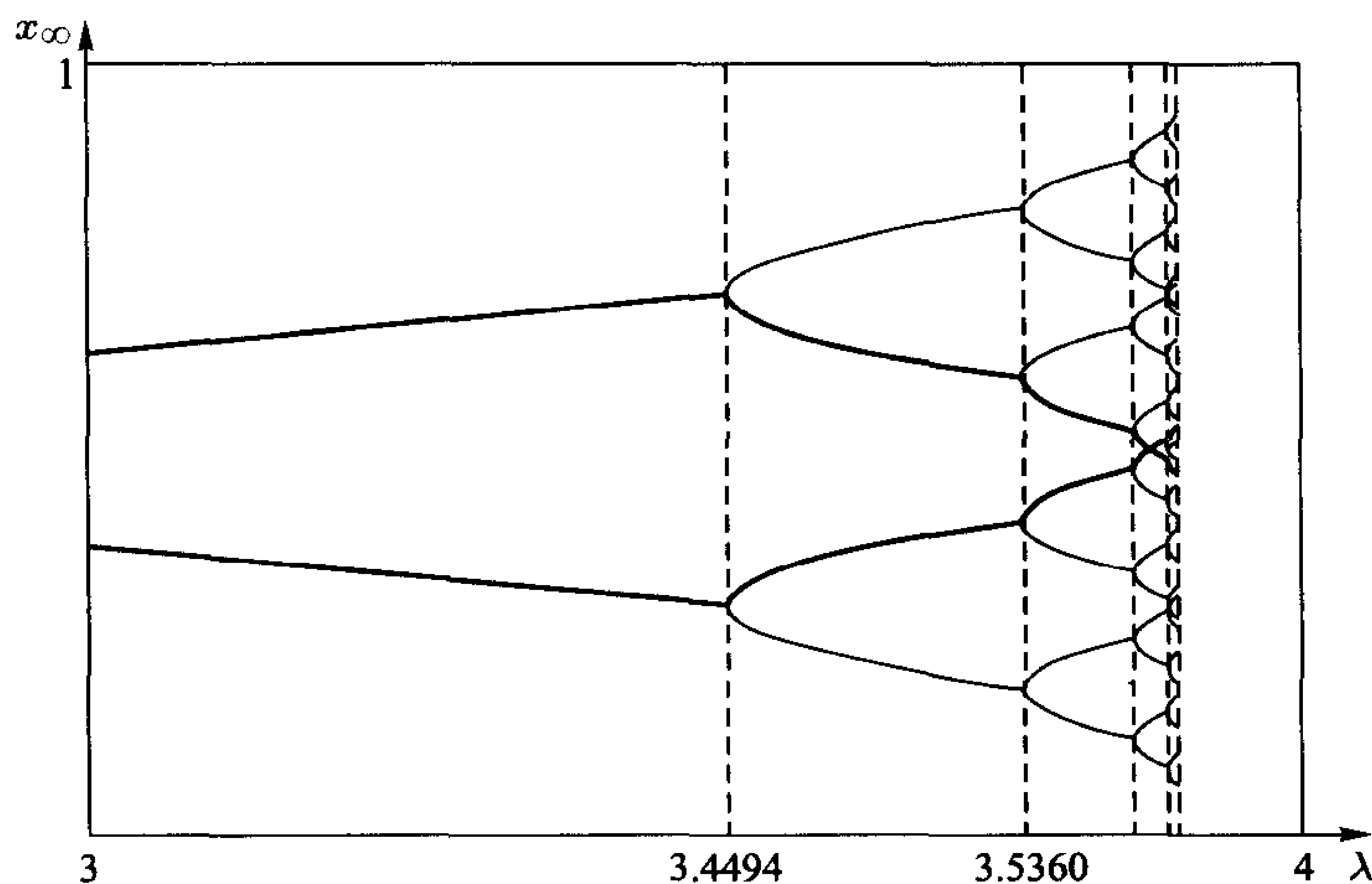


图 24 在逻辑斯蒂系统中, 当参数 $\lambda \uparrow 4$ 的增加过程中, 状态 x_∞ 的加倍过程的图示

其中 $F = 4.669201\cdots$ 是称为*Feigenbaum* 数的普适常数.

参数 $\lambda = 4$ 对于系统 (3) 来说起着特别的作用, 正是在这时, 对应的 (混沌) 序列 (x_n) 的观察序列的值像是白噪声型的随机序列的实现.

其实, 我们取 $x_0 = 0.1$, 并按公式 (3) 递推计算 $x_1, x_2, \cdots, x_{1000}$. 对这 1000 个值计算 (经验) 均值和标准差, 其相应的值为 0.48887 和 0.35742 (精确到第五位).

在下面的表 2 中列出按值 $x_1, x_2, \cdots, x_{1000}$ 计算的 (经验) 相关函数 $\widehat{\rho}(k)$ 的值.

表 2

1	−0.033	11	−0.046	21	−0.008	31	0.038
2	−0.058	12	0.002	22	0.009	32	−0.017
3	−0.025	13	−0.011	23	−0.039	33	0.014
4	−0.035	14	0.040	24	−0.020	34	0.001
5	−0.012	15	0.014	25	−0.008	35	0.017
6	−0.032	16	−0.023	26	0.017	36	−0.052
7	−0.048	17	−0.030	27	0.006	37	0.004
8	0.027	18	0.037	28	−0.004	38	0.053
9	−0.020	19	0.078	29	−0.019	39	−0.021
10	−0.013	20	0.017	30	−0.076	40	0.007

由这个表可见, 由 $\lambda = 4$ 的逻辑斯蒂映射生成的量 (x_n) 实际上可认为是不相关的, 并且在这一意义下, 序列 (x_n) 可称为 "混沌白噪声".

值得注意的是, 对于 $x_0 \in (0, 1)$ 的系统 $x_n = 4x_{n-1}(1 - x_{n-1})$, $n \geqslant 1$, 存在不变

分布 (即, 对于任何 $(0,1)$ 中的 Borel 集 A, 它满足 $\mathsf{P}(T^{-1}A)=\mathsf{P}(A)$, 其密度

$$p(x)=\frac{1}{\pi[x(1-x)]^{1/2}},\qquad x\in(0,1). \tag{4}$$

这样, 如果认为初值 x_0 是有概率密度 $p=p(x)$ 的随机变量, 那么随机变量 x_n $(n\geqslant 1)$ 将有与 x_0 一样的分布. 这里有益的是要强调, 用这样的方式得到的随机动力系统 (x_n), 其全部 "随机性" 都完全由随机初值 x_0 来决定, 而转移动力学 $x_n\to x_{n+1}$ 则根据关系式 (3) 以确定性的方式来给定.

在 (4) 的假定下, 不难求得 $\mathsf{E}x_0=\frac{1}{2}$, $\mathsf{E}x_0^2=\frac{3}{8}$, $\mathsf{D}x_0=\frac{1}{8}$ $(=(0.35355\cdots)^2)$ (比较上面引入的值 0.48887 和 0.35742) 以及

$$\rho(k)\equiv\frac{\mathsf{E}x_0x_k-\mathsf{E}x_0\mathsf{E}x_k}{\sqrt{\mathsf{D}x_0\mathsf{D}x_k}}=\begin{cases}1, & \text{当 } k=0,\\ 0, & \text{当 } k\neq 0.\end{cases}$$

例 2 (*Bernoulli* 变换):

$$x_n=2x_{n-1}\pmod 1,\qquad x_0\in(0,1).$$

这里不变的是有密度为 $p(x)=1$ $(x\in(0,1))$ 的均匀分布. 这时, $\mathsf{E}x_0=\frac{1}{2}$, $\mathsf{E}x_0^2=\frac{1}{3}$, $\mathsf{D}x_0=\frac{1}{12}$, $\rho(k)=2^{-k}$, $k=0,1,\cdots$.

例 3 ("帐篷" 变换):

$$x_n=1-|1-2x_{n-1}|,\qquad x_0\in(0,1).$$

与例 2 中一样, 这里不变的是 $(0,1)$ 上的均匀分布. 这时, $\mathsf{E}x_0=\frac{1}{2}$, $\mathsf{E}x_0^2=\frac{1}{3}$, $\mathsf{D}x_0=\frac{1}{12}$, $\rho(k)=0$, $k\neq 0$.

例 4. 设

$$x_n=1-2\sqrt{|x_{n-1}|},\qquad x_0\in(-1,1).$$

这里不变的是 $(-1,1)$ 上的分布, 其密度为 $p(x)=(1-x)/2$. 这时, $\mathsf{E}x_0=-\frac{1}{3}$, $\mathsf{E}x_0^2=\frac{1}{3}$, $\mathsf{D}x_0=\frac{2}{9}$. 图 25a, b 给出对于 $x_0=0.2$ 和 $N=100$, $N=1000$ 的序列 $(x_n)_{n\leqslant N}$ 的性态的表示.

3. 上面引入的非线性动态系统的例子从不同的视角来说都使我们很感兴趣. 首先, 比如在以 "二进形式" 展开的逻辑斯蒂系统的例子中, 清楚地生成在第三章第 2 节中叙述的分形性的观念. 其次, 这种具有 "混沌性" 的系统的性态暗示, 可利用它们来构造金融指数演变模型, 特别是对其危机时期, 它揭示的正是 "混沌性", 而不是 "随机性".

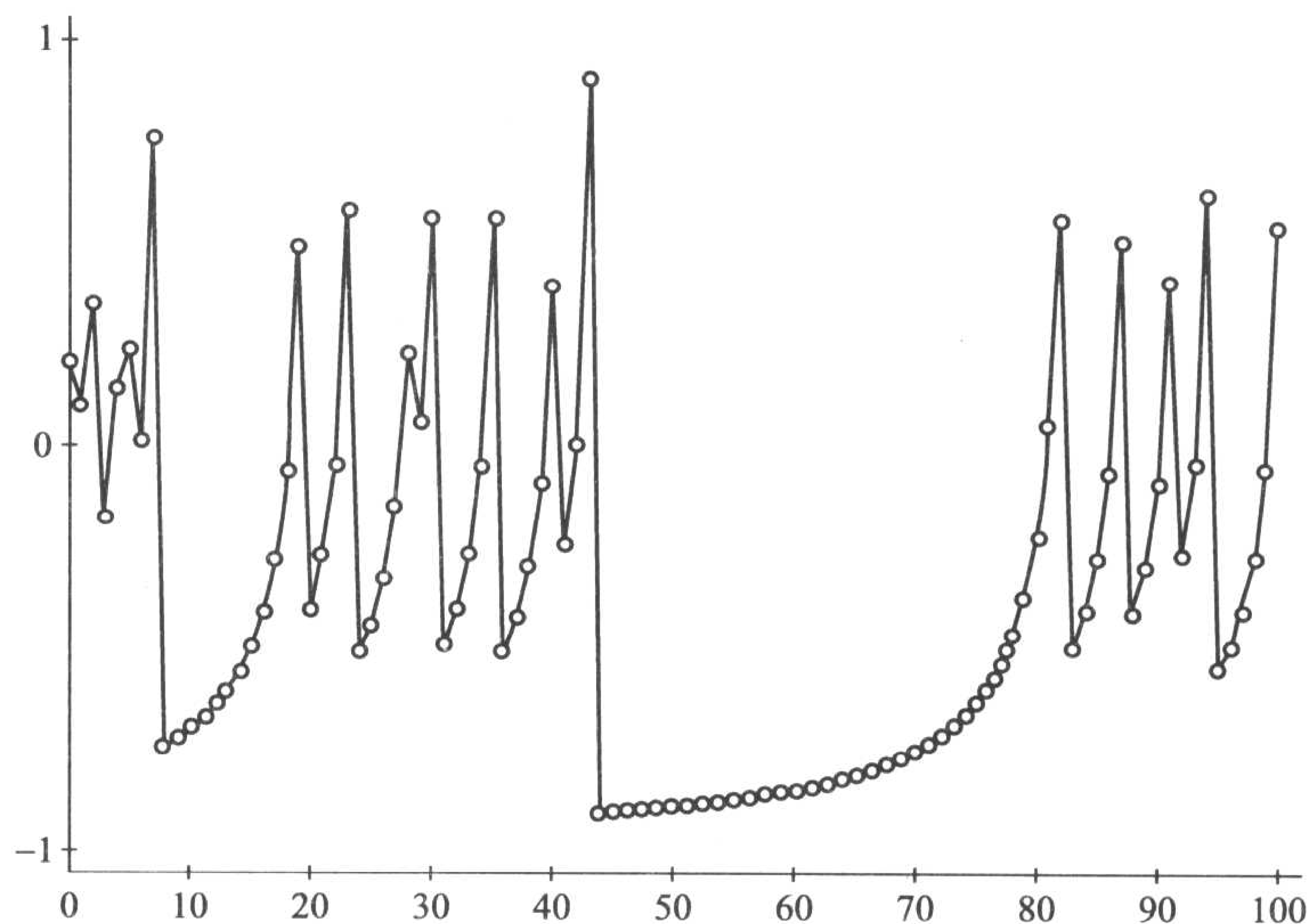


图 25 a　有 $x_0 = 0.2,\ x_n = 1 - 2\sqrt{|x_{n-1}|}$ 的序列 $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ 的图像, 其中 $N = 100$

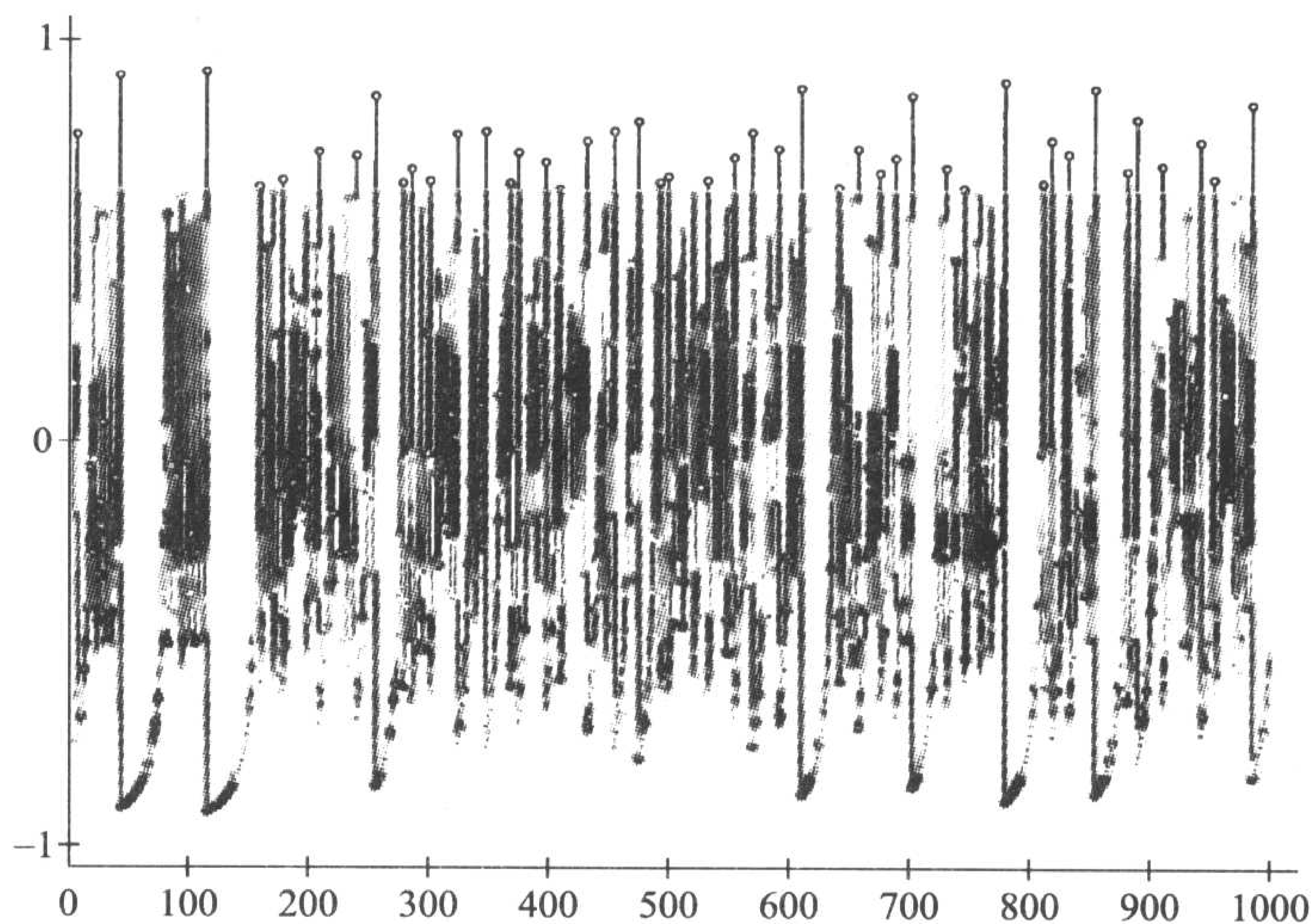


图 25 b　有 $x_0 = 0.2,\ x_n = 1 - 2\sqrt{|x_{n-1}|}$ 的序列 $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ 的图像, 其中 $N = 1000$

§4b. "混沌" 序列与 "随机" 序列之间的区别论争

1. 纯粹的确定性动态系统呈现 "随机白噪声" 类型的性质的事实早就为人所知, 并且并非意外, 尽管许多人对此十分惊奇. 尤其是由此引起一个有趣的问题: 怎样区分 "随机" 序列和 "混沌" 序列, 是否可能在原理上确认金融数据的 "不规则性" 的

真实本性是“随机的”还是“混沌的”. (看来, 对于个别的实现来说, 这里可能的途径之一基于“Kolmogorov-Martin-Löf-Uspenskiĭ 复杂性.)

下面叙述的方法基于著作 [448] 和 [305], 其中在区别“混沌性”和“随机性”时起中心作用的是函数

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \to \infty} \frac{\psi(N, \varepsilon)}{N^2}, \tag{1}$$

这里 $\psi(N, \varepsilon)$ 是所考察的序列 (x_n) 中满足

$$|x_i - x_j| < \varepsilon$$

的对 (i, j) $(i, j \leqslant N)$ 的个数.

除了函数 $C(\varepsilon)$ 以外, 还引起我们考虑的是函数

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N \to \infty} \frac{\psi_m(N, \varepsilon)}{N^2},$$

其中 $\psi_m(N, \varepsilon)$ 是对于 $i, j \leqslant N$ 的所有对应向量 $(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+m-1})$ 和 $(x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+m-1})$ 中, 其分量的区别不超过 ε 的对 (i, j) 的个数. (在 $m = 1$ 的情形下, 有 $\psi_1(N, \varepsilon) = \psi(N, \varepsilon)$.)

对于“白噪声”型的随机序列 (x_n) 来说, 当 ε 很小时, 函数

$$C_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^{v_m}, \tag{2}$$

其中“分形”指数 $v_m = m$. 许多确定性的系统也具有型为 (2) 的性质 (例如, 上节中的逻辑斯蒂系统 (3), [305]). 指数 v_m 也称为相关维数, 它紧密联系 Hausdorff 维数和 Kolmogorov 信息维数.

在著作 [448] 和 [305] 中区别“混沌”序列和“随机”序列的思路基于观察这些序列的相关维数的不同. 正如将在以后看到, “随机”序列的相关维数比“混沌”序列的相关维数要大.

根据 [305] 和 [448], 作为相关维数的估计量自然取量

$$\widetilde{v}_{m,j} = \frac{\ln C_m(\varepsilon_j) - \ln C_m(\varepsilon_{j+1})}{\ln \varepsilon_j - \ln \varepsilon_{j+1}}$$

或

$$\widetilde{v}_m(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \widetilde{v}_{m,j},$$

其中 $\varepsilon_j = \varphi^j$, $0 < \varphi < 1$.

表 3a (来自 [305]) 对于 $N = 5,900$ 的逻辑斯蒂序列 $(x_n)_{n \leqslant N}$ 给出值 $\widetilde{v}_{m,j}$, 其中 $m = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ 以及 $\varepsilon_j = \varphi^j$, $\varphi = 0.9$, 而 j 取一系列值.

表 3a 对于逻辑斯蒂系统的 $\widetilde{v}_{m,j}$ 值

$j\diagdown m$	1	2	3	4	5	10
20	0.78	0.90	0.96	0.98	1.02	1.19
30	0.81	0.89	0.95	0.98	0.98	1.11
35	0.83	0.90	0.94	0.97	0.95	1.01
40	0.83	0.91	0.97	0.99	1.05	1.20

表 3b 对于高斯白噪声的 $\widetilde{v}_{m,j}$ 值

$j\diagdown m$	1	2	3	4	5	10
20	0.84	1.68	2.52	3.35	4.20	8.43
30	0.98	1.97	2.95	3.98	4.98	–
35	0.99	1.97	2.93	4.00	5.53	–
40	1.00	2.02	3.03	4.15	5.38	–

把这个表的结果与由对高斯白噪声仿真得到的 $\widetilde{v}_{m,j}$ 作比较, 其中后者的参数就是用来刻画 §4a 中的逻辑斯蒂映射 (3) 的参数 (表 3b 根据 [305] 中的数据而得):

由这两个表的比较可见, 在 $m = 1$ 的情形下, 很难通过相关维数 $\widetilde{v}_{1,j}$ 的值来区分 "混沌性" 和 "随机性". 随着 m 的值的增大开始呈现 "混沌" 情形和 "随机" 情形在量 $\widetilde{v}_{m,j}$ 上的本质区别, 它可用来作为断定对应的序列 (x_n) 形成的不同本性的有足够分量的基础, 尽管从它们的经验均值、方差和相关的视角来看, 实际上没有区别.

2. 为了说明金融序列中的 "随机性" 和 "混沌性" 的区别论争, 我们引入对于 IBM 股价和 S&P500 指数的日 "收益" $h_n = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ $(n \geqslant 1)$ 的值的相关维数值的表 (表 4a, b; 它是根据 1962.7.2—1985.12.31 期间的 5903 各观察值制定的, 数据来自 [305]).

表 4a 对于 IBM 股价的 $\widetilde{v}_{m,j}$ 值

$j\diagdown m$	1	2	3	4	5	10
20	0.46	0.90	1.31	1.68	2.05	3.63
30	0.83	1.76	2.61	3.44	4.27	8.44
35	0.97	1.93	2.88	3.82	4.79	9.84
40	0.98	1.96	2.94	3.86	4.94	–

首先, 由这两个表的比较可见 IBM 股价和 S&P500 指数的 "相关维数" 的 "分形" 机构的均匀性. 其次, 把表 4a, b 和表 3a, b 的数据相比较表明, 对于这两个 $h_n = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ $(n \geqslant 1)$ 的序列 (h_n) 的指数来说, 它们更接近于随机白噪声, 尽管这自

表 4b 对于 S&P500 指数的 $\widetilde{v}_{m,j}$ 值

$j\diagdown m$	1	2	3	4	5	10
20	0.58	1.10	1.58	2.03	2.43	3.93
30	0.93	1.82	2.07	3.49	4.25	6.93
35	0.98	1.94	2.88	3.79	4.75	11.00
40	0.99	1.98	2.92	3.84	4.81	–

然并没有否定假设它们是有大 "相关维数" 的某种 "混沌" 序列, 因为后者也有相近的性质. (关于所考察的区别论争的更详细的叙述及其经济学评论, 参见 [305].)

3. 最后, 我们再简述 [17] 中提出的另一种区分 "混沌性" 和 "随机性" 的方法.

设 $x = (x_n)$ 是某个动力系统所生成的 "混沌" 序列, 它带有对于 x_0 的概率分布 $F = F(x)$, 并且后者对该系统不变.

现在设 $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_n)$ 是 "随机" 序列, 它由独立同分布的 (一维) 随机变量所组成, 并且其分布就是 $F = F(x)$.

我们构成量

$$M_n = \max(x_0, x_1, \cdots, x_n) \qquad \text{和} \qquad \widetilde{M}_n = \max(\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_n),$$

并设 $F_n(x) = \mathsf{P}(M_n \leqslant x)$, $\widetilde{F}_n(x) = \mathsf{P}(\widetilde{M}_n \leqslant x)$.

[17] 中采用的方法的思路基于这样的观察: 最大值可用来作为把 "随机" 序列从 "混沌" 序列中区分开来的很好的特征.

出于论证这样的方法的目的, [17] 的作者如下进行处理.

在极值的极限定理理论中, 人们已经熟知为使量 $a_n(\widetilde{M}_n - b_n)$ 对于某些 $a_n > 0$ 和 b_n $(n \geqslant 1)$ 有 (非平凡) 极限分布

$$\lim_n \mathsf{P}(a_n(\widetilde{M}_n - b_n) \leqslant x) = \widetilde{G}(x)$$

的充要条件.

我们引入某些例子, 其详情可参照 [124], [156], [187] 和 [206].

如果 $F(x) = 1 - x^{-\rho}$, $x \geqslant 1$, $\rho > 0$, 那么

$$\mathsf{P}\left(\frac{\widetilde{M}_n}{n^{1/\rho}} \leqslant x\right) \to \exp(-x^{-\rho}), \qquad x > 0.$$

如果 $F(x) = 1 - (-x)^{\rho}$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $\rho > 0$, 那么对于 $x < 0$,

$$\mathsf{P}(n^{1/\rho}\widetilde{M}_n \leqslant x) \to \exp(-|x|^{\rho}).$$

如果 $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geqslant 0$, 那么对于 $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathsf{P}(\widetilde{M}_n - \ln n \leqslant x) \to \exp(-e^{-x}).$$

如果 $F(x) = \Phi(x)$ 是标准正态分布, 那么

$$\mathsf{P}\left((2\ln n)^{1/2}(\widetilde{M}_n - b_n) \leqslant x\right) \to (-e^{-x}), \qquad x \in \mathbb{R},$$

其中 b_n 选为使 $\mathsf{P}(x_0 > b_n) = \frac{1}{2}$. (在这一情形下, $b_n \sim (2\ln n)^{1/2}$.)

对于 Bernoulli 变换 (§4a 中的例 2) 来说, 不变分布为 $F(x) = x$, $x \in (0,1)$, 并且当 $a_n = n$, $b_n = 1 - n^{-1}$ 时, 极限分布 为

$$\widetilde{G}(x) = \exp(x-1), \qquad x \leqslant 1.$$

对于 §4a 中的例 4, $F(x) = 1 - p^2(x)$, 其中 $p(x) = (1-x)/2$, $x \in (-1,1)$, 并且当 $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = 1 - 2/\sqrt{n}$ 时, 我们求得

$$\widetilde{G}(x) = \exp\left(-\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2\right).$$

对于 §4a 中的例 1, 不变分布 $F(x) = \dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$, 并且通过对应的重新正态化, 可求得

$$\widetilde{G}(x) = \exp(-(1-2x)^{1/2}).$$

给定分布 $\widetilde{F}_n(x) = (F(x))^n$ 和极限分布 $\widetilde{G}(x)$, 自然会把它们与相应的分布 $F_n(x)$ 以及它们的极限分布 (如果可能知道的话) 比如 $G(x)$ 作比较. 正如在著作 [17] 中所注意到, 这里有很大的技术困难; 对于 §4a 中所考察的例子来说, 它联系着缺乏对于分析有用的 $F_n(x)$ 的解析表达式. 由于这一情况, [17] 的作者通过对分布 $F_n(x)$ 进行对于大 n 的数值分析, 以及把它们与相应分布的 $\widetilde{F}_n(x) = [F(x)]^n$ 作比较.

对于在 §4a 中考察的动态系统来说, 这样的分析表明, 总体来说, (对于有不变分布 $F(x)$ 的 "混沌" 系统来说的) $F_n(x)$ 的性态在定性上不同于 (对于有一维分布 $F(x)$ 的独立同分布随机变量所形成的 "随机" 系统来说的) $\widetilde{F}_n(x)$ 的性态. 这就是说, 对于所考察的最大值模型来说, 在所考察的 "混沌性" 和 "随机性" 的区分问题上, 是一个很好的统计量. 但是, 很自然, 这并不排斥可找到形为 $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}; \lambda)$ 的有充分大的 k 的 "混沌" 系统, 它将很难通过大量、但有限的观察来与 "随机白噪声" 相区分.

第三章　随机模型. 连续时间

1. 分布和过程的非高斯模型

§1a. 稳定分布和无限可分分布

1. 在下一章中我们将提出诸如汇率、股价等等的金融指数的分布类型和演变的统计分析的结果. 由这类分析我们将看到, 在构造金融指数的分布和演变的概率模型时, *稳定分布*和*稳定过程*作为自然而又看来十分可信的备选物, 显示其出色的作用.

这些都说明, 在本节引入关于这种分布和过程以至更一般的*无限可分*分布和过程的信息对于以后来说是必要的; 没有这一切, 金融指数的描述和考察将是很不完备的.

在叙述 "稳定性" 和 "无限可分性" 的基本概念和性质时, 我们将在一定程度上遵循时间顺序; 先考察 1920 年代由 P. Lévy, G. Pólya, A. Ya. Khintchine 所研究的一维稳定分布, 然后转向 1930 年代 B. de Finetti, A. N. Kolmogorov, P. Lévy, A. Ya. Khintchine 所研究的一维和多维无限可分分布. 这以后, 在 §1b 中将引入有关 Lévy 过程和稳定过程的基本概念和性质.

我们注意到, 关于稳定的和无限可分的分布和过程有众多的教科书, 例如, 专著 [156], [188], [418], [484].

2. 定义 1. 非退化随机变量 X 称为*稳定的*, 或者有*稳定分布*, 是指对于任何正数 a 和 b, 存在正数 c 和数 d, 使得

$$\mathrm{Law}(aX_1 + bX_2) = \mathrm{Law}(cX + d), \tag{1}$$

其中 X_1 和 X_2 是两个都是 X 的复本 ($\mathrm{Law}(X_i) = \mathrm{Law}(X)$, $i = 1, 2$) 的相互独立随机变量. 不妨害一般性, 所有被考察的随机变量都被假定为在同一个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上给定的.

可以证明 (参见上面提到的专著), 存在不依赖于 a 和 b 的常数 $\alpha \in (0, 2]$, 使得 (1) 中的常数 c 满足

$$c^{\alpha} = a^{\alpha} + b^{\alpha}. \tag{2}$$

经常利用另一个等价定义:

定义 2. 随机变量 X 称为*稳定的*, 是指对于每个 $n \geqslant 2$, 存在正数 C_n 和数 D_n, 使得

$$\mathrm{Law}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{Law}(C_n X + D_n), \tag{3}$$

其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的独立复本.

如果在 (3) 中 $D_n = 0$, $n \geqslant 2$, 即

$$\mathrm{Law}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{Law}(C_n X), \tag{4}$$

那么 X 称为严格 (strictly) 稳定随机变量.

尤其引人注目的是, 在 (3) 和 (4) 中,

$$C_n = n^{1/\alpha}$$

对于某个 $0 < \alpha \leqslant 2$ 成立, 当然, 其中 α 是 (2) 中的同一个参数.

为强调这个参数值 α 的作用, 与术语 "稳定性" 一起, 经常运用术语 "α-稳定性".

为了使给出的两个定义的图景更完备, 下面再引入第三个定义是适宜的; 这一定义揭示稳定分布的另一种作用, 即它可能作为独立同分布随机变量之和的 (经过适当的规范和中心化的) 极限来产生.

定义 3. 随机变量 X 称为有稳定分布 (或者简称稳定), 是指这个分布有下列含义下的吸引区域: 存在独立同分布随机变量序列 $Y_1, Y_2, \cdots$, 正数列 (d_n) 和实数列 (a_n), 使得

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{d_n} + a_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X; \tag{5}$$

"$\xrightarrow{\mathrm{d}}$" 意味着按分布收敛:

$$\mathrm{Law}\left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{d_n} + a_n\right) \to \mathrm{Law}(X),$$

其中分布律的收敛性理解为对应测度的弱收敛.

这个定义与前两个的等价性由下列结果得到: 随机变量 X 可表示为量

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{d_n} + a_n$$

的按分布收敛的极限, 当且仅当 X 是 (在第一个或第二个定义的意义下) 稳定的, 这里 (Y_n) 为独立同分布随机变量序列. (参见 [188]; [439; 第 III 章, §5] 中的证明.)

3. 根据概率论的著名结果 (P. Lévy, A. Ya. Khintchine), 稳定随机变量 X 的特征函数

$$\varphi(\theta) = \mathsf{E} e^{i\theta X}$$

有下列表示:

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \exp\left\{i\mu\theta - \sigma^\alpha|\theta|^\alpha\left(1 - i\beta(\operatorname{Sgn}\theta)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)\right\}, & \text{当}\,\alpha \neq 1, \\ \exp\left\{i\mu\theta - \sigma|\theta|\left(1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}(\operatorname{Sgn}\theta)\ln|\theta|\right)\right\}, & \text{当}\,\alpha = 1, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $0 < \alpha \leqslant 2$, $|\beta| \leqslant 1$, $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

这里所参与的四个参数 $(\alpha, \beta, \sigma, \mu)$ 的含义如下:

α 是稳定指数, 或者特征参数 (自然与 (2) 和 (4) 中的是一样的);
β 是概率密度的斜度 (skewness) 参数;
σ 是尺度 (scale) 参数;
μ 是位置 (location) 参数.

参数 α "负责" 分布尾部的下降特征.

如果 $0 < \alpha < 2$, 那么

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\mathsf{P}(X > x) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\mathsf{P}(X < -x) = C_\alpha \frac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha, \tag{8}$$

其中

$$C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha}\sin x\,dx\right)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}, & \alpha \neq 1, \\ \dfrac{2}{\pi}, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{9}$$

在 $\alpha = 2$ 的情形下, 由表示式 (6) 我们得到

$$\varphi(\theta) = e^{i\mu\theta - \sigma^2\theta^2} = e^{i\mu\theta - \frac{\theta^2}{2}(2\sigma^2)}, \tag{10}$$

即, $\varphi(\theta)$ 是正态分布 $\mathscr{N}(\mu, 2\sigma^2)$ 的特征函数, 或者说, 是有

$$\mathsf{E}X = \mu, \qquad \mathsf{D}X = 2\sigma^2$$

的正态随机变量 X 的特征函数.

尽管在公式 (6) 中的参数 β 不是唯一确定的 (因为当 $\alpha = 2$ 时, 这个参数在表达式 $\beta \mathrm{tg}\pi$ 中, 而它等于零), 通常取 $\beta = 0$.

显然, 从分布尾部性态的视角来看, $\alpha < 2$ 和 $\alpha = 2$ 两种情形之间, 互相有很大的区别, 因为, 比如, 对于 $\mu = 0$ 和 $2\sigma^2 = 1$,

$$\mathsf{P}(|X| > x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-x^2/2}}{x}, \qquad x \to \infty, \tag{11}$$

而把它与 (7) 和 (8) 作比较表明, 当 $\alpha < 2$ 时, 与正态情形的尾部很快下降相比, 这一分布的尾部较厚. (在这里强调以下这点是适宜的: 正如一些统计研究所指出, 对于许多金融指数 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 来说, "收益" 随机变量 $h_n = \ln\dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ 有带 "厚尾" 的分布. 这就自然会来考察稳定分布类是否可作为构造 $h = (h_n)$ 的概率统计模型的备选物.)

重要的是要注意到, 正如由 (7) 和 (8) 所看到, 数学期望 $\mathsf{E}|X| < \infty$ 当且仅当 $\alpha > 1$. 一般来说, $\mathsf{E}|X|^p < \infty$ 当且仅当 $p < \alpha$.

联系 (7) 和 (8) 中所指出的渐近公式, 现在值得回顾 *Pareto* 分布, 其概率分布密度为

$$f_{\alpha,b}(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, & x\geqslant b,\\ 0, & x<b,\end{cases}\tag{12}$$

其中参数 $\alpha>0$, $b>0$, 而这就是说, 对应的分布函数 $F_{\alpha,b}(x)$ 满足

$$1-F_{\alpha,b}(x)=\left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha},\qquad x\geqslant b.\tag{13}$$

与 (7) 和 (8) 相比较表明, 稳定分布在无限处变得如同 Pareto 分布. 在这一意义下, 稳定分布的 "尾部" 属于*Pareto* 型.

在 (6) 中的 (渐近) 斜度参数 $\beta\in[-1,1]$ 刻画了分布的不对称程度. 如果 $\beta=0$, 那么分布是对称的. 当 $\beta>0$ 时, 分布向左倾斜, 并且倾斜度越大, β 值就越接近于 1. $\beta<0$ 的情形对应向右倾斜.

参数 σ 起着尺度参数的作用. 在正态分布 ($\alpha=2$) 的情形下, $\mathsf{D}X=2\sigma^2$. 我们要强调, 这里方差等于 $2\sigma^2$, 而不是 σ^2, 它不同于标准的记号. 如果 $\alpha<2$, 那么方差 $\mathsf{D}X$ 不存在.

参数 μ 称为位置参数. 在 $\alpha>1$ 的情形下, 数学期望 $\mathsf{E}|X|<\infty$, $\mu=\mathsf{E}X$ 就说明了这一点. 在一般情形下, 没有这样的解释, 因为 $\mathsf{E}X$ 干脆可能不存在.

4. 按照已有的传统, 带参数 α,β,σ 和 μ 的稳定分布记为

$$S_\alpha(\sigma,\beta,\mu),$$

并记 $X\sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ 表示 X 有带参数 α,β,σ 和 μ 的稳定分布.

注意, 分布 $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ 是对称的当且仅当 $\beta=\mu=0$. (由特征函数的形式不难断定, 在这一情形下, (3) 中的常数 D_n 等于零.) 这个分布在 (任意的) μ 附近对称当且仅当 $\beta=0$.

在对称情形 ($\beta=\mu=0$) 下, 经常运用记号

$$X\sim S\alpha S.$$

在这一情形下, 特征函数

$$\varphi(\theta)=e^{-\sigma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}}.\tag{14}$$

5. 遗憾的是, 稳定分布密度的显式仅仅只对某些参数值已知. 这些分布为:

正态分布, $S_2(\sigma,0,\mu)=\mathscr{N}(\mu,2\sigma^2)$, 其密度为

$$\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}};\tag{15}$$

Cauchy 分布, $S_1(\sigma,0,\mu)$, 其密度为

$$\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2+\sigma^2)}; \tag{16}$$

指数 $\alpha=1/2$ 的单边稳定分布 $S_{1/2}(\sigma,1,\mu)$ (也称为 Lévy 分布, Smirnov 分布), 它在 (μ,∞) 上有密度为

$$\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{(x-\mu)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right). \tag{17}$$

我们注意 (16) 和 (17) 中的两种有趣而有用的特殊情形: 如果 $X\sim S_1(\sigma,0,0)$, 那么对于 $x>0$,

$$\mathsf{P}(X\leqslant x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sigma}; \tag{18}$$

如果 $X\sim S_{1/2}(\sigma,1,0)$, 那么对于 $x>0$,

$$\mathsf{P}(X\leqslant x)=2\left(1-\Phi\left(\sqrt{\frac{\sigma}{x}}\right)\right). \tag{19}$$

关于表示为级数形式的稳定分布密度, 参见 [156], [225], [418], [484].

6. 现在假定, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立随机变量, 且满足

$$X_i\sim S_\alpha(\sigma_i,\beta_i,\mu_i),\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

虽然这些随机变量一般来说有不同分布, 但是它们有同样的稳定指数 α, 可以指出 (参见特征函数的形式 (6)), 它们的和 $X=X_1+\cdots+X_n$ 有同样类型的分布 $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$, 其参数

$$\sigma=(\sigma_1^\alpha+\cdots+\sigma_n^\alpha)^{1/\alpha},$$

$$\beta=\frac{\beta_1\sigma_1^\alpha+\cdots+\beta_n\sigma_n^\alpha}{\sigma_1^\alpha+\cdots+\sigma_n^\alpha}$$

$$\mu=\mu_1+\cdots+\mu_n.$$

7. 现在我们转向更一般的所谓 “无限可分” 分布类, 它包括 “稳定” 分布在内.

定义 4. 随机变量 X 称为无限可分, 而它的分布称为无限可分分布, 是指对于任何 $n\geqslant 1$ 可求得这样的独立同分布随机变量 $X_{n1},\cdots,X_{nn}$, 使得 $X\overset{\mathrm{d}}{=}X_{n1}+\cdots+X_{nn}$.

无限可分分布类所包含的意义在于: 它们且仅仅是它们可能以系列模式表现为分布和 $\left(\sum_{k=1}^{n} X_{nk}\right)$ 的极限:

$$\begin{aligned}&X_{11}\\&X_{21}, X_{22}\\&\cdots\\&X_{n1}, X_{n2}, \cdots, X_{nn}\\&\cdots\end{aligned} \tag{20}$$

其中对于每个 n, 随机变量序列 $X_{n1}, X_{n2}, \cdots, X_{nn}$ 是独立同分布的. 这时, 我们察觉, 在 (20) 的不同列之间可能没有任何联系. (详见 [188]; [439; 第 III 章, §5].)

当 (20) 中的所有量 X_{nk} 用同一个独立随机变量序列 $Y_1, Y_2, \cdots$ 以下列专门方式来生成时:

$$X_{nk} = \frac{Y_k}{d_n} + \frac{a_n}{n}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad n \geqslant 1, \tag{21}$$

那么所发生的是较窄的分布类: 稳定分布类 (参见第 2 点最后).

(注意, 以后在 §1d 中考察的双曲分布、高斯 \\ 逆高斯分布都属于无限可分分布类.)

定义 4 只有关数量情形 ($X \in \mathbb{R}$). 它可直接转换为向量情形 ($X \in \mathbb{R}^d$) 的定义, 而不需作任何原则上的变化.

设 $\mathsf{P} = \mathsf{P}(dx)$ 是无限可分随机向量 $X \in \mathbb{R}^d$ 的概率分布,

$$\varphi(\theta) = \mathsf{E}e^{i(\theta, X)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\theta, x)} \mathsf{P}(dx)$$

是它的特征函数; (θ, x) 是向量 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_d)$ 和 $x = (x_1, \cdots, x_d)$ 的数量积.

在先是 B. de Finetti 的研究, 然后是 A. N. Kolmogorov (对于 $\mathsf{E}|X|^2 < \infty$ 的情形) 的结果的基础上, 最后是 P. Lévy 和 A. Ya. Khintchine 在 1930 年代建立了下列对于向量 $X \in \mathbb{R}^d$ 的特征函数的 "*Lévy-Khintchine* 公式":

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) = \exp\Bigg\{ &i(\theta, B) - \frac{1}{2}(\theta, C\theta)\\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i(\theta, x)} - 1 - i(\theta, x) I(|x| \leqslant 1)\right) \nu(dx) \Bigg\},\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $B \in \mathbb{R}^d$, $C = C(d \times d)$ 是对称非负定矩阵, 以及 $\nu = \nu(dx)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的正测度 (所谓*Lévy* 测度), 它满足下列条件: $\nu(\{0\}) = 0$ 以及

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1) \nu(dx) < \infty. \tag{23}$$

(我们察觉, 无论是 $\nu(\mathbb{R}^d) < \infty$ 的情形, 还是 $\nu(\mathbb{R}^d) = \infty$ 的情形, 都很重要.)

这里要特别强调, $\varphi(\theta)$ 由三个特征: B, C 和 ν 来确定, 并且 (22) 中的三元组 (B, C, ν) 是唯一确定的.

例.

1. 如果 X 是退化随机变量, $\mathsf{P}(X = a) = 1$, 那么 $B = a$, $C = 0$, $\nu = 0$ 以及

$$\varphi(\theta) = e^{i\theta a}.$$

2. 如果 X 是有带参数 λ 的泊松分布的随机变量, 那么 $\nu(dx) = \lambda I_{\{1\}}(dx)$ 是 "集结" 在点 $x = 1$ 上的测度, $B = \lambda$ 以及

$$\varphi(\theta) = e^{\lambda(e^{i\theta}-1)}.$$

3. 如果 $X \sim \mathscr{N}(m, \sigma^2)$, 那么 $B = m$, $C = \sigma^2$, $\nu = 0$ 以及

$$\varphi(\theta) = e^{im\theta - \frac{\sigma^2}{2}\theta^2}.$$

4. 如果 X 是密度为 (16) 的 Cauchy 分布的随机变量, 那么

$$\varphi(\theta) = e^{i\mu\theta - \sigma|\theta|}.$$

5. 如果 X 是有密度为 (17) 的随机变量 (有指数 $\alpha = 1/2$ 的单边稳定分布), 那么

$$\varphi(\theta) = e^{i\mu\theta - \sigma|\theta|^{1/2}(1 - i\,\mathrm{Sgn}\,\theta)}.$$

8. 形为 (22) 的 (运用 "传统上典型" 的 "截断" 函数 $h(x) = xI(|x| \leqslant 1)$ 的) 特征函数 $\varphi(\theta)$ 的表示式不是唯一的. 例如, 取代 $I(|x| \leqslant 1)$ 运用带 $I(|x| \leqslant a)$ 的表示式, 其中 $a > 0$. 不过, 这样当然也必定要改变对应的三元特征. 尤其引人注目的是, 这时特征 C 和 ν 并不变化, 说明它们是不依赖于截断函数选择的 "内在" 特征. 变化的仅仅是第一个特征 B.

为了作出确切的陈述, 我们引入下列

定义 5. 在零点邻域上有 $h(x) = x$ 的有紧支集的有界函数 $h = h(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, 称为截断函数.

除了 (22) 以外, 对于特征函数 $\varphi(\theta)$ (对每个截断函数 $h = h(x)$) 有下列表示式成立:

$$\varphi(\theta) = \exp\left\{ i(\theta, B(h)) - \frac{1}{2}(\theta, C\theta) + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i(\theta,x)} - 1 - i(\theta, h(x)) \right) \nu(dx) \right\}, \tag{24}$$

其中 C 和 ν 不依赖于 h 的选择, 并且与 (22) 中的一样, 而 $B(h)$ 对于不同的 h, 用下列方式换算:

$$B(h) - B(h') = \int_{\mathbb{R}^d} (h(x) - h'(x))\nu(dx). \tag{25}$$

我们注意到, (22) 和 (24) 右端的积分的存在是由条件 (23) 所保证的, 因为函数

$$e^{i(\theta,x)} - 1 - i(\theta, h(x))$$

有界, 而当 $|x| \to 0$ 时, 它的阶为 $O(|x|^2)$.

如果加强条件 (23), 而代之以条件

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|x| \wedge 1)\nu(dx) < \infty, \tag{26}$$

那么在表示式 (24) 中可令 $h(x) = 0$:

$$\varphi(\theta) = \exp\left\{i(\theta, B(0)) - \frac{1}{2}(\theta, C\theta) + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(\theta,x)} - 1)\nu(dx)\right\}. \tag{27}$$

在这个表示式中的常数 $B(0)$ 称为随机变量 X 的 "漂移 (drift) 成分".

另一方面, 如果加强条件 (23), 代之以条件

$$\int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge |x|)\nu(dx) < \infty, \tag{28}$$

那么表示式 (24) 将对 $h(x) = x$ 成立:

$$\varphi(\theta) = \exp\left\{i(\theta, \widetilde{B}) - \frac{1}{2}(\theta, C\theta) + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i(\theta,x)} - 1 - i(\theta, x)\right)\nu(dx)\right\}. \tag{29}$$

在这一情形下, 参数 $\widetilde{B}$ 称为中心, 其实它无非就是均值 $\widetilde{B} = \mathsf{E}X$.

我们察觉, 条件 $\mathsf{E}|X| < \infty$ 等价于条件

$$\int_{|x|>1} |x|\nu(dx) < \infty.$$

9. 正如上面已经注意到, 对于稳定分布律, 其分布的显式仅在三种情形下已知. 这三种分布是 (参见第 5 点):

正态分布 ($\alpha = 2$),
Cauchy 分布 ($\alpha = 1$),
Lévy-Smirnov 分布 ($\alpha = 1/2$).

无限可分分布类要广得多, 它 (除了已提到的以外) 包括下列分布 (尽管要证明这一点不太简单):

泊松分布,
Γ 分布,
几何分布,
负二项分布,
t-分布 (*Student* 分布),
F-分布 (*Fisher* 分布),
对数正态分布,
逻辑斯蒂分布,
Pareto 分布,
双边指数分布 (*Laplace* 分布),
双曲分布,
高斯 \\ 逆高斯分布等等.

然而, 许多熟知的分布却不是无限可分的: 二项分布, 均匀分布, 任何有有限支集的非退化分布, 有形为 $f(x) = Ce^{-|x|^\alpha}$ $(\alpha > 2)$ 的密度 $f(x)$ 的分布.

上面提到的一些分布是离散分布, 而另一些有分布密度. 为了引用方便和有一个完整的图景, 我们在表 5 和 6 中引入它们的显式.

表 5 离散分布

分布	概率 p_k	参数
泊松分布	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $k=0,1,\cdots$	$\lambda>0$
几何分布	pq^{k-1}, $k=1,2,\cdots$	$1<p\leqslant 1$, $q=1-p$
负二项分布	$C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r}$, $k=r,r+1,\cdots$	$0<p\leqslant 1$, $q=1-p$ $r=1,2,\cdots$
二项分布	$C_n^kp^kq^{n-k}$, $k=0,1,\cdots,n$	$0\leqslant p\leqslant 1$, $q=1-p$ $n=1,2,\cdots$

10. "稳定" 随机变量能以自然的方式推广到向量情形 (比较定义 1 和 2).

定义 6. 随机向量

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_d)$$

称为 $\mathbb{R}^d$ 中的稳定随机向量, 或者有稳定 d-维分布的向量, 是指对于每两个正数 A 和 B, 可求得正数 C 和向量 $D \in \mathbb{R}^d$, 使得

$$\mathrm{Law}(AX^{(1)} + BX^{(2)}) = \mathrm{Law}(CX + D), \tag{30}$$

其中 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 是 X 的独立复本.

表 6　有密度的分布

分布	密度 $p = p(x)$	参数
$[a,b]$ 上的均匀分布	$\frac{1}{b-a}$, $a \leqslant x \leqslant b$	$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
正态或高斯分布	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$
Gamma 分布 (Γ-分布)	$\frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$, $x \geqslant 0$	$\alpha > 0$, $\beta > 0$
指数分布 ($\alpha = 1$, $\beta = 1/\lambda$ 的 Γ-分布)	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$	$\lambda > 0$
t-分布 (*Student* 分布)	$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$	$n = 1, 2, \cdots$
Beta-分布 (β-分布)	$\frac{x^{r-1}(1-x)^{s-1}}{\beta(r,s)}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$	$r > 0$, $s > 0$
双边指数分布 (*Laplace* 分布)	$\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda\|x\|}$, $x \in \mathbb{R}$	$\lambda > 0$
Chi 方分布 (χ^2-分布或者 $\alpha = n/2$, $\beta = 2$ 的 *Gamma*-分布)	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$, $x \geqslant 0$	$n = 1, 2, \cdots$
Cauchy 分布	$\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + \sigma^2)}$, $x \in \mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$
Pareto 分布	$\frac{\alpha b^\alpha}{x^{\alpha+1}}$, $x \geqslant b$	$\alpha > 0$, $b > 0$
对数正态分布	$\frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x > 0$	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$
逻辑斯蒂分布	$\frac{\beta e^{-(\alpha+\beta x)}}{(1 + e^{-(\alpha+\beta x)})^2}$, $x \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$
双曲分布	参见 §1d 中的 (2)	$\alpha, \beta, \mu, \delta$ 参见 §1d 中的 (5)
高斯 \\ 逆高斯分布	参见 §1d 中的 (14)	$\alpha, \beta, \mu, \delta$ 参见 §1d 中的 (5)

可以指出 (参见例如, [418; 第 58 页]), 非退化随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_d)$ 是稳定的当且仅当对于每个 $n \geqslant 2$ 存在数 $\alpha \in (0, 2]$ 和向量 D_n, 使得

$$\operatorname{Law}(X^{(1)} + X^{(2)} + \cdots + X^{(n)}) = \operatorname{Law}(n^{1/\alpha} X + D_n), \tag{31}$$

其中 $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots, X^{(n)}$ 是向量 X 的独立复本.

在 $D_n = 0$ 的情形下, 即

$$\mathrm{Law}(X^{(1)} + X^{(2)} + \cdots + X^{(n)}) = \mathrm{Law}(n^{1/\alpha} X), \tag{32}$$

则称向量 X 是 "有指数 α 的严格稳定随机向量", 或者 "严格 α-稳定随机向量".

注. 除了记号 $\mathrm{Law}(X) = \mathrm{Law}(Y)$ 表示 X 与 Y 的分布重合以外, 还经常运用记号 $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y$, 其中 $\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ 表示随机元素 X 和 Y 按分布重合. 记号 $X^n \stackrel{\mathrm{d}}{\to} X$ 或者 $\mathrm{Law}(X^n) \to \mathrm{Law}(X)$, 正如在第 2 点中所注意到, 表示按分布收敛, 即对应的分布的弱收敛性. (详情参见 [439; 第 III 章].) 如果 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ 和 $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$ 是两个随机过程, 那么记号

$$\{X_t, t \geqslant 0\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{Y_t, t \geqslant 0\},$$

或者

$$\mathrm{Law}(X_t, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(Y_t, t \geqslant 0),$$

将表示过程 X 和 Y 的有限维分布重合, 或者说, 过程 X 和 Y 按分布重合.

§1b. Lévy 过程

1. 作为有独立增量的随机过程, 下面引入的 Lévy 过程形成随机过程基本类之一, 它如同布朗运动和泊松过程那样, 是概率论所研究的基本对象.

定义 1. 给定在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上、并在 d-维欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 上取值的随机过程 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ 称为 (d-维) *Lévy* 过程, 是指它满足下列条件:

1) $X_0 = 0$ (P-a.s.);

2) 对于任何 $n \geqslant 1$ 和一套时刻 $0 \leqslant t_0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 量 $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 是独立的 ("独立增量" 性质);

3) 对于任何 $s \geqslant 0$ 和 $t \geqslant 0$,

$$X_{t+s} - X_s \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_t - X_0$$

(增量的 "平稳性" 、"均匀性");

4) 对于每个 $t \geqslant 0$ 和 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{s \to t} \mathsf{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0$$

("随机连续性");

5) 对于P-a.s. $\omega \in \Omega$, 轨线 $(X_t(\omega))_{t \geqslant 0}$ 属于由 (向量) 函数 $f = (f_t)_{t \geqslant 0}$ 所组成的空间 D^d, 其中 $f_t = (f_t^1, f_t^2, \cdots, f_t^d)$, 而它的每个分量 $f^i = (f_t^i)_{t \geqslant 0}$ $(i = 1, \cdots, d)$ 当 $t > 0$ 时右连续和有左极限.

注 1. 如果在这一定义中, 要求过程 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ 只满足性质 1)–4), 那么可以指出, 过程 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ 存在修正 $X' = (X'_t)_{t \geqslant 0}$ (即满足性质 $\mathsf{P}(X'_t \neq X_t) = 0,\ t \geqslant 0$), 具有性质 5). 这样, 从满足性质 1)–4) 的视角来看, X' 与 X 没有什么区别, 但是其轨线已经有某种 "正则性". 正因为如此, 在*Lévy* 过程的定义中, 立即可对轨线性质加上要求 5) (正如我们所看到的, 不妨害一般性).

注 2. 由条件 1)–5) 的含义出发, 可以把 Lévy 过程的定义改写为: 这是有平稳独立增量的随机连续过程, 并且它从零点出发, 有右连左极 (右连续和有左极限) 的轨线.

这种过程的经典例子是 d-维布朗运动 $X = (X^1, X^2, \cdots, X^d)$, 它由相互独立的标准布朗运动 $X^i = (X^i_t)_{t \geqslant 0}$, $(i = 1, \cdots, d)$ 所构成.

直接给出 (一维) 布朗运动的定义是有意义的, 它不必嵌入到*Lévy* 过程的一般模式中.

定义 2. 连续高斯随机过程 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ 称为(标准) 布朗运动或者维纳过程, 是指 $X_0 = 0$ 以及

$$\begin{aligned} \mathsf{E}X_t &= 0, \\ \mathsf{E}X_s X_t &= \min(s, t). \end{aligned} \tag{1}$$

由高斯性和性质 (1) 自动得到, 这样的过程是有平稳独立 (高斯) 增量的过程. 由于

$$X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s), \qquad t \geqslant s,$$

故 $\mathsf{E}|X_t - X_s|^3 = 3|t-s|^2$, 并由*Kolmogorov* 判别准则 ([470; §2b 中的 (7)]) 得到这种过程的连续修正的存在. 由此可见, 维纳过程, 或者布朗运动, 作为 Lévy 过程, 有附加的重要性质: 轨线的连续性.

2. Lévy 过程 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ 是有均匀独立增量的过程, 因而其分布密度由一维分布 $\mathsf{P}_t(dx) = \mathsf{P}(X_t \in dx)$ 来确定. (我们记得 $X_0 = 0$.) 由这种过程的定义本身得出, 分布 $\mathsf{P}_t(dx)$ 对于每个 t 是无限可分的.

设

$$\varphi_t(\theta) = \mathsf{E}e^{i(\theta, X_t)} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\theta, x)} \mathsf{P}_t(dx) \tag{2}$$

是特征函数. 于是, 对应 §1a 的公式 (22) (也比较同一个 §1a 中的 (24)),

$$\varphi_t(\theta) = \exp\left\{ i(\theta, B_t) - \frac{1}{2}(\theta, C_t\theta) + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i(\theta, x)} - 1 - i(\theta, x) I(|x| \leqslant 1) \right) \nu_t(dx) \right\}, \tag{3}$$

其中 $B_t \in \mathbb{R}^d$, C_t 是 $d \times d$ 阶对称非负定矩阵以及 $\nu_t(dx)$ (对每个 t) 是有 §1a 中的性质 (23) 的 Lévy 测度.

由于增量的齐次性和独立性,

$$\varphi_{t+s}(\theta)=\varphi_t(\theta)\varphi_s(\theta), \tag{4}$$

由此得到, $\varphi_t(\theta)$ 有形式为

$$\varphi_t(\theta)=\exp\{t\psi(\theta)\}. \tag{5}$$

(函数 $\psi=\psi(\theta)$ 称为*累积量* (cumulant).)

由于三元组 (B_t, C_t, ν_t) 按特征函数唯一确定, 故由 (5) 可引出 (详情参见例如, [250; 第 II 章, 4.19]),

$$B_t=t\cdot B, \qquad C_t=t\cdot C, \qquad \nu_t(dx)=t\cdot\nu(dx), \tag{6}$$

其中 $B=B_1$, $C=C_1$, $\nu=\nu_1$.

这样, 显然在 (5) 中有

$$\begin{aligned}\psi(\theta)=i(\theta,B)-&\frac{1}{2}(\theta,C\theta)\\&+\int_{\mathbb{R}^d}\Big(e^{i(\theta,x)}-1-i(\theta,x)I(|x|\leqslant 1)\Big)\,\nu(dx).\end{aligned} \tag{7}$$

3. 有 (7) 中那样的累积量 $\psi(\theta)$ 的表示式 (5) 是研究 Lévy 过程解析性质的基本手段. 同样从其轨线性质的视角来看, 这样的所谓*典则表示*是很重要的 (详情参见第六章, §3a, 以及 [250; 第 II 章, §2c]), 它是第二章 §1b 中所考察的对于随机序列 $H=(H_n)_{n\geqslant 0}$ 的典则表示在连续时间情形下的推广 (参见第四章的 §1b 和 §3e 中的 (16)).

4. 余下的是要讨论三元组 (B_t, C_t, ν_t) 的分量的含义. 形象地说, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是 "反映过程 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 的*平均运动*的倾向成分". 分量 $(C_t)_{t\geqslant 0}$ 确定过程 X 的连续高斯成分的*方差*, 而*Lévy 测度* $(\nu_t)_{t\geqslant 0}$ "反映过程 X 的跳跃成分的性态, 既显示怎样经常出现跳跃, 又显示跳跃量有多大."

这样的有点随意的解释当然必须要有精确的陈述来确证. 以下是其中之一 (关于一般情形参见 [250; 第 II 章, 2.21].)

设过程 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 有这样的性质: 其 "跳跃" $|\Delta X_t|\leqslant 1$, $t\geqslant 0$, $X_0=0$ 以及其三元组为 $(B_t, C_t, \nu_t)_{t\geqslant 0}$. 于是 $\mathsf{E}X_t^2<\infty$, $t\geqslant 0$, 并且下列过程是*鞅* (参见第二章中的 §1c):

(a) $M_t\equiv X_t-B_t-X_0$, $t\geqslant 0$;

(b) $M_t^2-C_t$, $t\geqslant 0$;

(c) $\displaystyle\int_0^t\int_{|x|\leqslant 1}g(x)\mu_t(dx)-\int_0^t\int_{|x|\leqslant 1}g(x)\nu_t(dx)$, $t\geqslant 0$,

其中 $\mu_t(A)=\sum\limits_{0<s\leqslant t}I(\Delta X_s\in A, \Delta X_s\neq 0)$ 是过程 X 在时间区间 $(0,t]$ 上的"*跳跃*"*测度*, $g=g(x)$ 是在 $x=0$ 的邻域中等于零的连续函数.

正如已经在上面所注意到, 连续 Lévy 过程的经典例子是标准布朗运动 (其中 $B_t = 0$, $C_t = t$, $\nu_t \equiv 0$).

现在转向间断 Lévy 过程的例子, 它能使我们更好地理解 Lévy 测度 $\nu = \nu(dx)$ 的含义.

5. *有限Lévy 测度 $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ 的情形.*

这里经典的当然是带参数 $\lambda > 0$ 的泊松过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 的例子, 即 (按定义) 有 $X_0 = 0$ 的 Lévy 过程, 并且对于它 X_t 有带参数 λt 的泊松分布:

$$\mathsf{P}(X_t = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \cdots.$$

在这一情形下, $B_t = \lambda t$ $(= \mathsf{E}X_t)$, $C_t = 0$ 以及Lévy 测度 "集结" 在一个点上:

$$\nu(dx) = \lambda I_{\{1\}}(dx).$$

表示式 (3) 在这里有下列形式:

$$\begin{aligned}\varphi_t(\theta) &= \exp\left\{i\theta(\lambda t) + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x I(x \leqslant 1)\right) \nu_t(dx)\right\} \\ &= \exp\left\{i\theta(\lambda t) + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x I(x = 1)\right) \lambda t I_{\{1\}}(dx)\right\} \\ &= \exp\{\lambda t(e^{i\theta} - 1)\}.\end{aligned} \tag{8}$$

尤其引人注目的是, 从泊松过程出发, 可得到很广的纯跳跃样式的 Lévy 过程.

也就是说, 设 $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ 是带参数 $\lambda > 0$ 的泊松过程, $\xi = (\xi_j)_{j\geqslant 1}$ 是独立同分布随机变量序列 (也独立于 N), 其分布

$$\mathsf{P}(\xi_j \in A) = \frac{\nu(A)}{\lambda}, \qquad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

其中 $\lambda = \nu(\mathbb{R}) < \infty$ 以及 $\nu(\{0\}) = 0$.

我们构成过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 如下: $X_0 = 0$ 以及

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} \xi_j, \qquad t > 0, \tag{9}$$

它也可记作下列形式:

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j I(\tau_j \leqslant t), \tag{10}$$

其中 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$ 是过程 $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ 的跳跃时刻.

直接计算指出,①

$$\varphi_t(\theta) = \mathsf{E}e^{i\theta X_t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(e^{i\theta X_t}|N_t = k\right) \mathsf{P}(N_t = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{E}e^{i\theta\sum_{j=1}^{k}\xi_j} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = \exp\left\{t\int(e^{i\theta x} - 1)\nu(dx)\right\}. \tag{11}$$

由 (10) 所形成的过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为复合 (compound) 泊松过程. 不难看出, 这个过程是 Lévy 过程. 如果假定 $\xi_j \equiv 1$, $j \geqslant 1$, 那么就得到 "通常的" 泊松过程.

6. *无限 Lévy 测度情形*: $\nu(\mathbb{R}) = \infty$.

有 $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ 的测度 ν 的 Lévy 过程的最简单的例子可用下列方式得到.

设 $\lambda = (\lambda_k)_{k\geqslant 1}$ 是正数列, $\beta = (\beta_k)_{k\geqslant 1}$ 是满足下列条件的数 $\beta_k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 所形成的序列:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\beta_k^2 < \infty. \tag{12}$$

令

$$\nu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k I_{\{\beta_k\}}(dx), \tag{13}$$

并记 $N^{(k)} = (N_t^{(k)})_{t\geqslant 0}$ $(k \geqslant 1)$ 为相应的带参数 λ_k $(k \geqslant 1)$ 的独立泊松过程序列.

如果令

$$X_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(N_t^{(k)} - \lambda_k t), \tag{14}$$

那么不难看出, 对于每个 $n \geqslant 1$, 过程 $X^{(n)} = (X_t^{(n)})_{t\geqslant 0}$ 是带 *Lévy* 测度

$$\nu^{(n)}(dx) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k I_{\{\beta_k\}}(dx) \tag{15}$$

的 Lévy 过程, 并且

$$\varphi_t^{(n)}(\theta) = \mathsf{E}e^{i\theta X_t^{(n)}} = \exp\left\{t\int(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x)\nu^{(n)}(dx)\right\}. \tag{16}$$

量 $X_t^{(n)}$, $t \geqslant 0$, 当 $n \to \infty$ 时作为 L^2-极限所取的极限过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$,

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(N_t^{(k)} - \lambda_k t), \tag{17}$$

也是泊松过程, 其 *Lévy* 测度由公式 (13) 给定.

① 在原版和英文版中, 下式的中间一项误为: $\sum_{k=0}^{\infty}(\mathsf{E}e^{i\theta\xi_1})^k \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$. —— 译者注

注 3. 这里由定义 1 的性质 5) 的满足导出 $X^{(n)}$ 是平方可积鞅; 由于*Doob* 不等式 (参见 §3b 中的公式 (36), 也参见 [250; 第 I 章, 1.43] 或者 [439; 第 VII 章, §3]) 对于它们来说, 当 $n \to \infty$ 时, $\mathsf{E}\max\limits_{s\leqslant t}|X_s^{(n)} - X_s|^2 \to 0$.

注 4. 由于 $\nu(\mathbb{R}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k$, $\nu(\{0\}) = 0$ 以及

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)\nu(dx) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k^2 < \infty,$$

故在 (13) 中定义的测度 $\nu = \nu(dx)$ 满足对 Lévy 测度提出的所有条件 (参见 §1a 中的 (22)–(23)).

如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$, 但条件 (12) 满足, 那么我们就得到 Lévy 测度 ν 满足 $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ 的 Lévy 过程的例子.

我们再引入一个已知的有 $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ 的 Lévy 过程的 "显式" 情形. 我们有所谓 Γ-过程 (Gamma process) $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, 其中 $X_0 = 0$ 以及 (Γ-) 概率分布 $\mathsf{P}(X_t \leqslant x)$ 有密度为 (比较 §1a 中的表 6)

$$p_t(x) = \frac{x^{t-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(t)\beta^t} I_{(0,\infty)}(x). \tag{18}$$

由此得到,

$$\varphi_t(\theta) = (1 - i\theta\beta)^{-t}. \tag{19}$$

我们指出, 特征函数 $\varphi_t(\theta)$ 可表示为下列形式:

$$\varphi_t(\theta) = \exp\left\{ t\int_0^{\infty} (e^{i\theta x} - 1)\frac{e^{-x/\beta}}{x} dx \right\}, \tag{20}$$

由此得到, $\nu_t(dx) = t\nu(dx)$, 其中

$$\nu(dx) = I_{(0,\infty)}(x)\frac{e^{-x/\beta}}{x} dx. \tag{21}$$

显然, 这里 $\nu(0,\infty) = \infty$, 但

$$\int_0^{\infty} (x^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty. \tag{22}$$

我们转向表示式 (20) 的证明.

考察 Laplace 变换

$$
\begin{aligned}
L_t(u) = \mathsf{E}e^{-uX_t} &= \int_0^\infty e^{-ux}p_t(x)dx = (1+\beta u)^{-t} \\
&= \exp\{-t\ln(1+\beta u)\} = \exp\left\{-t\int_0^u \frac{dy}{\frac{1}{\beta}+y}\right\} \\
&= \exp\left\{-t\int_0^u dy\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\beta}-yx}dx\right\} \\
&= \exp\left\{t\int_0^\infty (e^{-ux}-1)\frac{e^{-x/\beta}}{x}dx\right\}.
\end{aligned}
$$

在复半平面 $\{z = a + ib,\ a \leqslant 0\}$ 上的解析开拓导致等式

$$
\int_{\mathbb{R}} e^{zx}p_t(dx) = \exp\left\{t\int_0^\infty (e^{zx}-1)\frac{e^{-x/\beta}}{x}dx\right\},
$$

由此令 $z = i\theta$, 我们得到所要求的表示式 (20).

7. 与某些 (跳跃样式的) Lévy 过程的 "显式" 表示 (10), (14) 和 (17) 相联系, 我们得到对它们建模的一种方式, 它们仅仅基于随机变量 ξ_j, β_k 和指数分布随机变量 $\Delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ (泊松分布在时刻 τ_{i-1} 和 τ_i 的两个跳跃之间的间隔). 由此转而在对无限可分随机变量建模时, 提出是否可把它们表示为 "简单的"、"标准的" 随机变量的函数形式就有重要意义. 以下就是一个说明发生这里所提到的可能性的例子: 设 X 和 Y 为两个独立随机变量, 并且 $X \geqslant 0$ (任意), 而 Y 有指数分布. 那么正如 Ch. Goldie 所指出, 乘积 XY 是无限可分随机变量.

在下一节中, 我们将看到, 怎样从简单构造的过程通过 "复合" 来得到稳定过程.

§1c. 稳定过程

1. 我们从给定在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的带 (任意) 参数集 T 的实过程 $X = (X_t)_{t\in T}$ 情形出发.

稳定随机向量的一般定义 (参见 §1a 中的定义 6) 自然导出下列概念.

定义 1. 实随机过程 $X = (X_t)_{t\in T}$ 称为*稳定过程*, 是指对于任何 $k \geqslant 1$ 和 T 中的 $t_1, \cdots, t_k$, 随机向量 $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_k})$ 是稳定的, 即过程 X 的所有有限维分布是稳定的.

不难察觉, 如果所有有限维分布是稳定的, 那么考虑到这些分布的协调性得出, 它们都有同样的稳定指标 α. 这就说明在希望强调具体的稳定指数值 α 时, 为什么这样的 (稳定) 过程有被称为 *α-稳定的*.

以后我们的主要兴趣在于表示这样的 α-稳定过程 $X = (X_t)_{t\in T}$, 它同时也是 Lévy 过程 (§1b). 这样的过程自然称为 "*α-稳定Lévy 过程*".

在 §1a (第 10 点) 中引出稳定非退化随机向量的两种等价定义 (参见 §1a 的公式 (30) 和 (31)). 针对稳定 (一维) 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 同时也是 Lévy 过程, 所注意到的两种定义的等价性导致下列命题: *非退化的* (参见后面的定义 2) *一维 Lévy 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是 α-稳定过程 ($\alpha \in (0, 2]$) 当且仅当对于任何 $a > 0$, 可求得数 D* (一般来说依赖于 a) *使得*

$$\{X_{at}, t \geqslant 0\} \overset{\mathrm{d}}{=} \{a^{1/\alpha} X_t + Dt\}. \tag{1}$$

现在引入一系列有关多维过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 的定义.

定义 2. 取值在 $\mathbb{R}^d$ 中的随机过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为*退化的*, 是指 $X_t = \gamma t$ (P-a.s.) 对于所有 $t \geqslant 0$ 关于某个向量 $\gamma \in \mathbb{R}^d$ 成立. 在相反情形下, 过程 X 称为*非退化的*.

定义 3. 取值在 $\mathbb{R}^d$ 中的非退化随机过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为 *α-稳定Lévy 过程* ($\alpha \in (0, 2]$), 是指

1) X 是 Lévy 过程, 以及

2) 对于每个 $a > 0$, 可求得向量 $D \in \mathbb{R}^d$ (一般来说依赖于 a), 使得

$$\{X_{at}, t \geqslant 0\} \overset{\mathrm{d}}{=} \{a^{1/\alpha} X_t + Dt, t \geqslant 0\}, \tag{2}$$

或者, 等价地有

$$\mathrm{Law}(X_{at}, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(a^{1/\alpha} X_t + Dt, t \geqslant 0). \tag{3}$$

定义 4. α-稳定 Lévy 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为*严格 α-稳定Lévy 过程*, 是指在 (2), (3) 中 $D = 0$, 即

$$\{X_{at}, t \geqslant 0\} \overset{\mathrm{d}}{=} \{a^{1/\alpha} X_t, t \geqslant 0\}, \tag{4}$$

或者, 等价地有

$$\mathrm{Law}(X_{at}, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(a^{1/\alpha} X_t, t \geqslant 0). \tag{5}$$

注 1. 有时 (参见例如, [423]), 也给出这样的向量随机 Lévy 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 的稳定性定义: 对于任何 $a > 0$, 可求得常数 c 和向量 $D \in \mathbb{R}^d$, 使得

$$\{X_{at}, t \geqslant 0\} \overset{\mathrm{d}}{=} \{cX_t + Dt, t \geqslant 0\}, \tag{6}$$

或者, 等价地有

$$\mathrm{Law}(X_{at}, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(cX_t + Dt, t \geqslant 0). \tag{7}$$

(如果 $D = 0$, 那么就说严格稳定性.) 尤其引人注目的是, 正如在稳定随机变量和随机向量情形下, 对于非退化 Lévy 过程来说, 常数 c 有形式 $c = a^{1/\alpha}$, 其中 α 是某个不依赖于 a 的在 $(0, 2]$ 中取值的一般参数. 这个结果的证明参见例如 [423]; 它说明上面给出的定义 3 和 4 中可明显地出现因子 $a^{1/\alpha}$.

注 2. 察觉以下这点是有益的: 条件

$$\mathrm{Law}(X_{at}, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(cX_t, t \geqslant 0)$$

无非就是自相似性. 这样一来, 对于 $c = a^{1/\alpha}$ 的 α-稳定的 Lévy 过程是自相似的. 这时, 值 $\mathbb{H} = 1/\alpha$ 有一个名称为*Hurst* 指数 (参数). 详情参见 §2c.

注 3. 如果过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 既是 α-稳定的 $(0 < \alpha \leqslant 2)$, 又满足自相似性质

$$\mathrm{Law}(X_{at}, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(a^{\mathbb{H}} X_t, t \geqslant 0), \qquad a > 0,$$

但不是 Lévy 过程, 那么公式 $\mathbb{H} = 1/\alpha$ 已经不成立. 对于这样的过程可能有不同的数对 $(\alpha, \mathbb{H})$, 诸如

$$\alpha < 1, \qquad 0 < \mathbb{H} \leqslant 1/\alpha,$$

或者

$$\alpha \geqslant 1, \qquad 0 < \mathbb{H} \leqslant 1.$$

(参见 [418] 中的推论 7.1.11 和图 7.1.)

2. 由于 α-稳定过程是如下形式的 Lévy 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 的特殊情形: 其中特征函数 $\varphi_t(\theta) = \mathsf{E}e^{i(\theta, X_t)}$ 有表示式 $\varphi_t(\theta) = \exp\{t\psi(\theta)\}$, 而 $\psi(\theta)$ 是由 §1b 中的公式 (7) 确定的累积量, 故自然要问, 对于这样的 (α-稳定的) 过程, 有怎样的 B, C 和 ν. "负责" 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 的跳跃量 $\Delta X_t \equiv X_t - X_{t-}$ 的分布的 Lévy 测度 $\nu = \nu(dx)$ 的值有其特殊意义.

根据 [423] 的叙述, 我们引入这一方向的基本结果.

定理 1. *设 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是带参数 (B, C, ν) 的 $\mathbb{R}^d$ 中的非退化 Lévy 过程.*

1) 过程 X 是 2-稳定的 (Lévy 过程) 当且仅当 $\nu = 0$; 即, 当且仅当该过程是高斯过程.

2) 过程 X 是严格 2-稳定的 (Lévy 过程) 当且仅当它是有零均值 $(B = 0)$ 的高斯过程.

定理 2. *设 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是有三元组 (B, C, ν) 的 $\mathbb{R}^d$ 中的非退化的Lévy 过程. $0 < \alpha < 2$. 那么过程 X 是 α-稳定的 (Lévy 过程) 当且仅当 $C = 0$ 以及Lévy 测度 ν 有下列形式:*

$$\nu(A) = \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty I_A(r\xi) r^{-(1+\alpha)} dr, \qquad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), \tag{8}$$

其中 λ 是 $S = \{x \in \mathbb{R}^d\colon |x| = 1\}$ 上的某个非零有限测度.

这种过程的累积量 $\psi(\theta)$ 有下列结构:

$$\psi(\theta) = i(\theta, B) + \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty \Big(e^{i(\theta, r\xi)} - 1 - i(\theta, r\xi) I_{(0,1]}(r)\Big)\, r^{-(1+\alpha)} dr. \tag{9}$$

值得注意的是, 在 $0<\alpha<2$ 的情形下 Lévy 测度的根部有形式为 $r^{-(1+\alpha)}dr$. 如果 α 减小, 那么 $r^{-(1+\alpha)}$ 当 $0<r<1$ 时递减, 而当 $1<r<\infty$ 时递增. 从而可以说, 当 α 接近于零时, 在过程的轨线中较大的跳跃占优势; 如果 α 接近于 2 时, 那么过程是以细小的跳跃来展开. 直观上, 这点可由在书 [253] 中引进的计算机图像来说明.

定理 3. 设 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是有三元组 (B,C,ν) 的 $\mathbb{R}^d$ 中的非退化*Lévy* 过程.

1) 设 $\alpha\in(0,1)$. 过程 X 是严格 α-稳定的 (*Lévy* 过程) 当且仅当累积量有形式为

$$\psi(\theta)=\int_S\lambda(d\xi)\int_0^\infty\left(e^{i(\theta,r\xi)}-1\right)r^{-(1+\alpha)}dr, \tag{10}$$

其中 λ 是 S 上的某个非零有限测度; 也就是说, 当且仅当 $C=0$ 和 "漂移 (drift) 成分" 等于零 (参见 §1a 中的 (27)).

2) 设 $\alpha\in(1,2)$. 过程 X 是严格 α-稳定的 (*Lévy* 过程) 当且仅当 $C=0$ 和 "中心" (参见 §1a 中的 (29)) 等于零 (即 $\mathsf{E}X=0$), 或者, 等价地, 当且仅当累积量有形式为

$$\psi(\theta)=\int_S\lambda(d\xi)\int_0^\infty\left(e^{i(\theta,r\xi)}-1-i(\theta,r\xi)\right)r^{-(1+\alpha)}dr, \tag{11}$$

其中 λ 是 S 上的某个非零有限测度.

3) 设 $\alpha=1$. 过程 X 是严格 1-稳定的 (*Lévy* 过程) 当且仅当 $C=0$ 和 "中心" (参见 §1a 中的 (29)) 等于零 (即 $\mathsf{E}X=0$), 或者, 等价地, 当且仅当

$$\psi(\theta)=i(\theta,B)+\int_S\lambda(d\xi)\int_0^\infty\left(e^{i(\theta,r\xi)}-1-i(\theta,r\xi)I_{(0,1]}\right)r^{-2}dr, \tag{12}$$

其中 λ 是 S 上的某个非零有限测度, 而常数 B 满足

$$\int_S x\lambda(d\xi)=0, \tag{13}$$

并且 $\lambda(S)+|B|>0$.

推论. 设 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的 α-稳定的*Lévy* 过程. 如果 $\alpha\neq 1$, 那么总可找到这样的常数 $\gamma\in\mathbb{R}^d$, 使得中心化过程 $X=(X_t-\gamma t)_{t\geqslant 0}$ 就是严格 α-稳定的.

如果 $\alpha=1$, 并且满足条件 (13), 那么过程本身就是严格 1-稳定的.

在 $d=1$ 的情形下, 可明确计算在累积量表示式 (9)–(11) 中的积分, 并对于 $0<\alpha\leqslant 2$, 得到 (比较 §1a 中的(6))

$$\psi(\theta)=\begin{cases} i\mu\theta-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha\left(1-i\beta(\operatorname{Sgn}\theta)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\right), \alpha\neq 1, & (14)\\ i\mu\theta-\sigma|\theta|\left(1+i\beta\dfrac{2}{\pi}(\operatorname{Sgn}\theta)\ln|\theta|\right), \ \alpha=1, & (15)\end{cases}$$

其中常数 β,σ 和 μ 满足 $\beta\in[-1,1]$, $\sigma>0$, $\mu\in\mathbb{R}$.

(非零) α-稳定过程是严格的充要条件为

$$\mu = 0, \quad 当 \quad \alpha \neq 1,$$

以及

$$\beta = 0, \quad \sigma + |\mu| > 0, \quad 当 \quad \alpha = 1.$$

3. 我们转向在 α-稳定过程定义中的公式 (2) 和 (3). 公式 (1) 当 $t = 1$ 时取下列形式:

$$X_a \overset{\mathrm{d}}{=} a^{1/\alpha} X_1 + D_a, \tag{16}$$

其中 D_a 是某个常数. 利用这个过程的特征函数的表示式 (14), (15), 我们求得

$$D_a = \begin{cases} (a - a^{1/\alpha})\mu, & \alpha \neq 1, \\ \beta \dfrac{2}{\pi} \sigma^\alpha a \ln a, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{17}$$

4. 由上述资料看来很明显, 运作稳定过程的分布非常困难, 因为稳定密度的显式仅在三种情形下已知 (参见 §1a 中的第 5 点).

然而, 在一系列情形下, 可以指出, 怎样例如由布朗运动借助 (不依赖于该运动的) 随机时间替换得到稳定过程.

我们引入一个这方面的有趣结果, 它使得有可能借助于三种独立随机变量: 均匀分布, 高斯分布和指数分布来为对称 α-稳定分布建模.

设 $Z = (Z_t)_{t \geqslant 0}$ 是对称 α-稳定 Lévy 过程, 其特征函数为

$$\varphi_t(\theta) = \mathsf{E} e^{i\theta Z_t} = e^{-t|\theta|^\alpha}, \tag{18}$$

其中 $0 < \alpha < 2$.

由下面的叙述将得到, 过程 Z 可通过下列形式来实现:

$$Z_t = B_{T_t}, \qquad t \geqslant 0, \tag{19}$$

其中 $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ 是有 $\mathsf{E} B_t = 0$, $\mathsf{E} B_t^2 = 2t$ 的布朗运动; 而 $T = (T_t)_{t \geqslant 0}$ 是某个非负不减 $\frac{\alpha}{2}$-稳定随机过程, 它就是所谓稳定从属量 (stable subordinator). 关于由变换 (19) 得到的过程 Z, 常说它是由布朗运动借助于随机时间替换 (从属量) $T = (T_t)_{t \geqslant 0}$ 所形成的.

表示式 (19) 中所必须的过程 $T = (T_t)_{t \geqslant 0}$ 用下列形式来构造.

设 $U^{(\alpha)} = U^{(\alpha)}(\omega)$ 是非负稳定随机变量, 其 Laplace 变换

$$\mathsf{E} e^{-\lambda U^{(\alpha)}} = e^{-\lambda^\alpha}, \qquad \lambda > 0, \tag{20}$$

其中 $0 < \alpha < 1$.

我们察觉, 如果 $U^{(\alpha)}, U_1, \cdots, U_n$ 是独立同分布随机变量, 那么随机变量

$$n^{-1/\alpha} \sum_{j=1}^{n} U_j \tag{21}$$

有与 $U^{(\alpha)}$ 一样的 Laplace 变换, 这就是说, $U^{(\alpha)}$ 实际上是稳定随机变量.

设 $0 < \alpha < 2$. 我们构造非负不减 $\frac{\alpha}{2}$-稳定过程, 使得 $\mathrm{Law}(T_1) = \mathrm{Law}(U^{(\alpha/2)})$.

由于 (5) 的 "自相似" 性质,

$$\mathrm{Law}(T_t) = \mathrm{Law}(t^{2/\alpha} T_1) = \mathrm{Law}(t^{2/\alpha} U^{(\alpha/2)}), \tag{22}$$

而这就是说,

$$\begin{aligned} \mathsf{E} e^{i\theta Z_t} &= \mathsf{E} e^{i\theta B_{T_t}} = \mathsf{E}[\mathsf{E}(e^{i\theta B_{T_t}} \,|\, T_t)] \\ &= \mathsf{E} e^{-\frac{\theta^2 2T_t}{2}} = \mathsf{E} e^{-\theta^2 T_t} = \mathsf{E} e^{-\theta^2 t^{2/\alpha} U^{(\alpha/2)}} \\ &= e^{-(\theta^2 t^{2/\alpha})^{\alpha/2}} = e^{-t|\theta|^\alpha}, \end{aligned} \tag{23}$$

由此得到所要求的表示式 (19).

设 $p = p(x;\alpha)$ 是随机变量 $U = U^{(\alpha)}$ 的概率分布, 其指数 $0 < \alpha < 1$. 根据 [238] 和 [264], 对于这样的集结于 $x \geqslant 0$ 的密度, 已知下列 "显式" 表示式:

$$p(x;\alpha) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_0^\pi a(z;\alpha) \exp\left\{-\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} a(z;\alpha)\right\} dz, \tag{24}$$

其中

$$a(z;\alpha) = \left(\frac{\sin \alpha z}{\sin z}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\sin(1-\alpha)z}{\sin \alpha z}. \tag{25}$$

正如 H. Rubin (参见 [264; 推论 4.1]) 所注意到, 密度 $p(x;\alpha)$ 是随机变量

$$\zeta = \left(\frac{a(\xi;\alpha)}{\eta}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \tag{26}$$

的分布密度, 其中 $a = a(z;\alpha)$ 由公式 (25) 给定, ξ 和 η 是相互独立的随机变量, ξ 在 $[0,\pi]$ 上有均匀分布, 而 η 是有单位参数的指数分布.

注. 检验随机变量 ζ 有密度 $p(x;\alpha)$ 不难. 事实上, 设

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi a(z;\alpha) \exp(-x a(z;\alpha)) dz.$$

随机变量 $\eta/a(\xi;\alpha)$ 的密度显然是函数 $h = h(x)$. 简单的变量替换指出, $p(x;\alpha)$ 是量 ζ 的概率分布密度.

这样,

$$\mathrm{Law}(T_1) = \mathrm{Law}(U^{(\alpha/2)}) = \mathrm{Law}\left(\left(\frac{a(\xi;\alpha/2)}{\eta}\right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}\right), \tag{27}$$

并且由 (22),

$$\mathrm{Law}(T_t) = \mathrm{Law}(t^{2/\alpha}T_1). \tag{28}$$

以 $\gamma(0,2)$ 表示有零均值和方差为 2 的高斯随机变量, 由 (27) 和 (28), 我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Law}(Z_t - Z_s) &= \mathrm{Law}(B_{T_t} - B_{T_s}) = \mathrm{Law}(B_{T_t - T_s}) \\ &= \mathrm{Law}\left(\sqrt{T_t - T_s}\,\gamma(0,2)\right) = \mathrm{Law}\left(\sqrt{T_{t-s}}\,\gamma(0,2)\right) \\ &= \mathrm{Law}\left((t-s)^{1/\alpha}\sqrt{T_1}\,\gamma(0,2)\right) \\ &= \mathrm{Law}\left((t-s)^{1/\alpha}\left(\frac{a(\xi;\alpha/2)}{\eta}\right)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}}\gamma(0,2)\right).\end{aligned}$$

这个对于 $\mathrm{Law}(Z_t - Z_s)$ 的表示式表明, 怎样借助于三个相互独立的随机变量 ξ, η 和 $\gamma = \gamma(0,2)$ 可得到对称 α-稳定随机过程的增量 $Z_t - Z_s$ 观察样本.

注. 关于借助其他 (构造较简单的) Lévy 过程来得到 Lévy 过程的一般结果参见 [47], [409] 和 [483].

过程 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ 在著作 [327] 中被用来讨论价格性态的描述 ("Mandelbrot-Taylor 模型"). 值得注意的是, 如果 t 看作现实的 "物理" 时间, 那么 T_t 可解释为 "运作" 时间 (参见第四章中的 §3d) 或者时刻 t 以前的随机 "转换次数". (这一有点随意的解释是类比随机变量 ξ_k $(k \geqslant 1)$ 的随机个数 T_n 的和 $\sum_{k=1}^{T_n} \xi_k$ 而引出的.)

我们强调, 对于每个 t, 量 $Z_t = B_{T_t}$ 的分布是高斯分布的混合. 换句话说, 可以指出, 量 Z_t 的分布是条件高斯分布 (参见第二章中的 § 1d, § 3a). 下面在 §1d 中将考察另外的基于 "双曲" 分布的模型, 它们也是条件高斯模型, 并属于无限可分分布类, 但不再是稳定的. 所有这些都表明, 寻求金融指数的价格演变的 "恰当" 描述, 在某种意义下, 是在转向条件高斯分布和过程的方向上前进的.

5. 作为结束, 我们考察稳定 Lévy 过程的三种情形, 它们分别对应已知稳定密度显式的三种情形.

例 1. $\mathbb{R}^d$ 中的标准布朗运动 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是严格 2-稳定 Lévy 过程. 量 X_1 的概率分布密度 $\mathsf{P}_1 = \mathsf{P}_1(dx)$ 有下列形式:

$$\mathsf{P}_1(dx) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/2} dx, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{29}$$

而特征函数

$$\varphi_{X_t}(\theta) = \mathsf{E} e^{i(\theta, X_t)} = e^{-\frac{t}{2}|\theta|^2}, \tag{30}$$

并 (比较 (14)) 可直接看出

$$\varphi_{X_{at}}(\theta) = e^{-\frac{at}{2}|\theta|^2} = e^{-\frac{t}{2}|\sqrt{a}\theta|^2} = \varphi_{\sqrt{a}X_t}(\theta). \tag{31}$$

例 2. $\mathbb{R}^d$ 中的标准 Cauchy 过程是严格 1-稳定 Lévy 过程, 且有

$$\mathsf{P}_1(dx) = (\pi)^{-\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)(1+|x|^2)^{-\frac{d+1}{2}}dx, \qquad x\in\mathbb{R}^d. \tag{32}$$

特征函数

$$\varphi_{X_t}(\theta) = e^{-t|\theta|}, \tag{33}$$

并 (比较 (14)) 可看出

$$\varphi_{X_{at}}(\theta) = e^{-at|\theta|} = e^{-t|a\theta|} = \varphi_{aX_t}(\theta). \tag{34}$$

例 3. $(0,\infty)$ 上的单边严格 $\frac{1}{2}$-稳定 Lévy 过程有

$$\mathsf{P}_1(dx) = (2\pi)^{-1/2}I_{(0,\infty)}(x)e^{1/(2x)}x^{-3/2}dx, \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{35}$$

以及

$$\varphi_{X_t}(\theta) = \exp\{-t\sqrt{|\theta|}(1-i\mathrm{Sgn}\,\theta)\}. \tag{36}$$

我们直接看出

$$\begin{aligned}\varphi_{aX_t}(\theta) &= \exp\{-at\sqrt{|\theta|}(1-\mathrm{Sgn}\,\theta)\}\\ &= \exp\{-t\sqrt{|a^2\theta|}(1-i\mathrm{Sgn}\,(a^2\theta))\} = \varphi_{a^2X_t}(\theta).\end{aligned} \tag{37}$$

这些例子在本质上竭尽了所有 X_1 (以至 X_t) 的一维分布可用基本函数表达的已知情形.

§1d. 双曲分布和双曲过程

1. 1977 年 O. Barndorff-Nielsen [21] 引入了在许多方面都很有意义的分布类, 即所谓广义双曲分布. 引入这种分布的动因在于试图对某些地质学上的经验规律给出适当的解释; 随后这种分布在地形学、湍流理论等等以及金融数学中找到应用。

广义双曲分布不是稳定分布，它如同稳定分布那样，用四个有适当含义的参数来刻画 (参见第 2 点).

在这种分布类中, 我们分出两种最常用的:

1) 本来意义下的双曲分布;
2) 高斯 \\ 逆高斯分布.

应该注意到, 这种分布是高斯分布的混合. 因此, 它们自然属于基于高斯分布的混合和基于运用条件高斯分布观念的模型类. 这类分布也是无限可分的, 从而形成无限可分分布类的相当广的子类. 从"尾部"性态的视角来看, 这类分布处于指数 $\alpha < 2$ 的稳定分布和高斯分布 $(\alpha = 2)$ 之间: 它的"尾部"与稳定分布 $(\alpha < 2)$ 相比下降较快, 但与高斯分布相比下降较慢.

2. 术语"双曲"的原意联系着下列情况.

对于正态 (高斯) 密度

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

来说, 其对数 $\ln \varphi(x)$ 的图像是抛物线. 而对于双曲分布来说, 其密度

$$h_1(x) = C_1(\alpha, \beta, \delta) \exp\{-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)\}, \tag{2}$$

以至其对数 $\ln h_1(x)$ 的图像是双曲线

$$f(x) = \ln C_1(\alpha, \beta, \delta) - \alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu) \tag{3}$$

以及相应的渐近线是

$$a(x) = -\alpha|x-\mu| + \beta(x-\mu). \tag{4}$$

在定义 (2) 中假定确定双曲分布的四个参数 $(\alpha, \beta, \mu, \delta)$ 满足

$$\alpha > 0, \quad 0 \leqslant |\beta| < \alpha, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \delta \geqslant 0. \tag{5}$$

参数 α 和 β "负责"密度的形状, μ 是位置参数, δ 是尺度参数. 常数

$$C_1(\alpha, \beta, \delta) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}, \tag{6}$$

其中 $K_1(x)$ 是指数为 1 的第三种修正 Bessel 函数 (参见 [23]).

为了描述双曲分布经常运用另一种参数化. 令

$$\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \gamma), \qquad \beta = \frac{1}{2}(\varphi - \gamma), \tag{7}$$

它们满足 $\varphi\gamma = \alpha^2 - \beta^2$.

在这些新记号下, 密度 $h_1(x) \equiv h_1(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$ 可表示为 $h_2(x) \equiv h_2(x; \varphi, \gamma, \mu, \delta)$, 它将有下列形式:

$$\begin{aligned} h_2(x) =& C_2(\varphi, \gamma, \delta) \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi + \gamma)\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \frac{1}{2}(\varphi - \gamma)(x-\mu)\right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$C_2(\varphi,\gamma,\delta)=\frac{\omega}{\delta\varkappa K_1(\delta x)},$$

而 $\varkappa=(\varphi\gamma)^{1/2}$, $\omega^{-1}=(\varphi^{-1}+\gamma^{-1})$. (这样的参数化在著作 [289] 中运用.)

由 (8) 可见, 如果随机变量 X 有密度 $h_2(x;\varphi,\gamma,\mu,\delta)$, 那么量 $Y=(X-a)/b$ 对于 $a\in\mathbb{R}$ 和 $b>0$ 有密度为 $h_2(x;b\varphi,b\gamma,\delta/b,(\mu-a)/b)$. 从而, 双曲分布关于位移和尺度变化不变.

由 (8) 还可见, 密度 $h_2(x)>0$ 对于所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立, 并且 $h_2(x)$ 的尾部当 $x\to-\infty$ 以 "速度" φ 指数减少, 而当 $x\to\infty$ 时, 以 "速度" γ 指数减少.

如果 $\delta\to\infty$, $\delta/\varkappa\to\sigma^2$, $\varphi-\gamma\to 0$, 那么

$$h_2(x;\varphi,\gamma,\mu,\delta)\to\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)\equiv\varphi(x;\mu,\sigma^2)$ 是正态密度.

如果 $\delta\to 0$, 那么我们得到 Laplace 分布为极限 (当 $\varphi\neq\gamma$ 时, 它非对称), 其密度为

$$\lambda(x;\varphi,\gamma,\mu)=\omega^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\varphi+\gamma)|x-\mu|+\frac{1}{2}(\varphi-\gamma)(x-\mu)\right\}.$$

如果引入参数

$$\xi=(1+\delta\sqrt{\varphi\gamma})^{-1/2}\ \left(=(1+\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2})^{-1/2}\right),$$
$$\chi=(\varphi-\gamma)(\varphi+\gamma)^{-1}\xi\ \left(=\frac{\beta}{\alpha}\xi\right),$$

那么可以察觉, 当有双曲密度 $h_2(x;\varphi,\gamma,\mu,\delta)$ 的随机变量 X 变换为有密度 $h_2(x;\varphi,\gamma,\mu-a,\delta)$ (根据上述) 的随机变量 $Y=X-a$ 时, 它们的值不变. 参数 ξ 和 χ 有 "斜度 (skewness)" 参数和 "峰度 (kurtosis)" 参数的含义, 它们可作为偏离正态性的良好指标. (详情参见第四章 §2b.)

注意, 值 χ 和 ξ 的定义域是三角形的内部

$$\nabla=\{(\chi,\xi)\colon 0\leqslant|\chi|<\xi<1\}$$

(参见图 26; $\mathscr{N}$ 是正态分布, $\mathscr{E}$ 是指数分布; $\mathscr{L}$ 是 Laplace 分布).

边界点 $(0,0)\notin\nabla$ 对应正态分布; 点 $(-1,1)$ 和 $(1,1)$ 也不属于 ∇, 它们对应指数分布, 而点 $(0,1)\in\nabla$ 对应 Laplace 分布. 当 $\chi\to\pm\xi$ 时, 我们得到的极限 (参见 [21]–[23], [25], [26]) 称为广义逆高斯分布 (generalized inverse Gaussian distribution).

在著作 [21]–[23], [25], [26] 中注意到, 双曲分布是高斯分布的混合: 如果随机变量 X 有密度 $h_1(x;\alpha,\beta,\mu,\delta)$, 那么

$$\operatorname{Law}X=\mathsf{E}'_{\sigma^2}\mathscr{N}(\mu+\beta\sigma^2,\sigma^2),\tag{9}$$

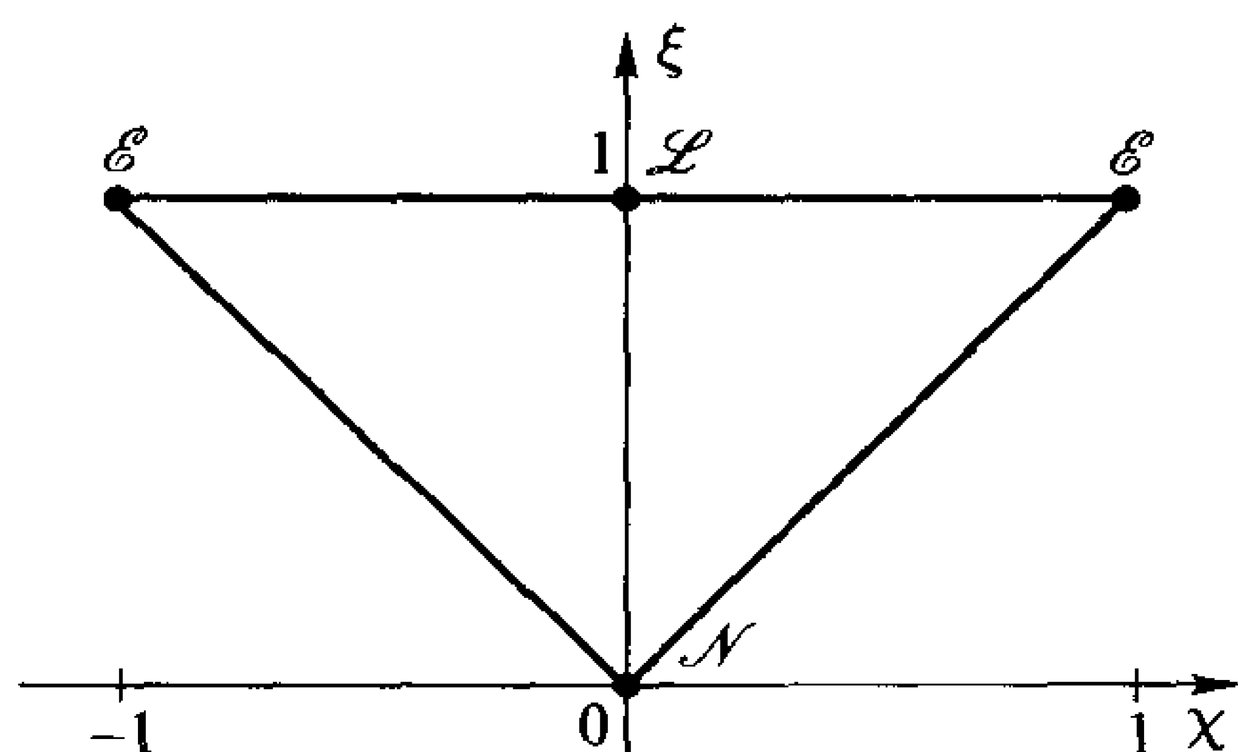


图 26

其中 E'_{σ^2} 表示关于有参数 σ^2 的下列逆高斯分布密度的均值:

$$p'_{\sigma^2}(x) = \frac{\sqrt{a/b}}{2K_1(\sqrt{ab})} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(ax + \frac{b}{x}\right)\right\}, \tag{10}$$

其中 $a = \alpha^2 - \beta^2$, $b = \delta^2$.

3. 现在转向由 O. Barndorff-Nielsen 在著作 [21] 中引入的广义双曲分布类的另一种表示, 即所谓高斯 \\ 逆高斯 (GIG, Gaussian\\Inverse Gaussian) 分布. (后来, O. Barndorff-Nielsen 在著作 [22] 中开始把这种分布称为 "正态逆高斯分布 (normal inverse Gaussian distribution).)

如果依照 (9) 所规定的记法, 那么随机变量 Y 的高斯 \\ 逆高斯分布 $\operatorname{Law} Y$ 由下列方式来确定:

$$\operatorname{Law} Y = \mathsf{E}''_{\sigma^2}\mathscr{N}(\mu + \beta\sigma^2, \sigma^2), \tag{11}$$

其中关于正态分布 $\mathscr{N}(\mu + \beta\sigma^2, \sigma^2)$ 的均值 E''_{σ^2} 导出逆高斯分布有密度为

$$p''_{\sigma^2}(x) = \sqrt{\frac{b}{2\pi}} e^{\sqrt{ab}} \frac{1}{x^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(ax + \frac{b}{x}\right)\right\}, \tag{12}$$

这里 $a = \alpha^2 - \beta^2$, $b = \delta^2$. (参数 α, β, μ 和 δ 与 (5) 中的一样.)

值得注意的是, 如果 $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ 是标准布朗运动 (维纳过程) 以及

$$T(t) = \inf\{s \geqslant 0 \colon W_s + \sqrt{a}\, s \geqslant \sqrt{b}\, t\}$$

是过程 $(W_s + \sqrt{a}\, s)_{s \geqslant 0}$ 首次达到水平 $\sqrt{b}\, t$ 的时刻, 那么 $T(1)$ 恰好有密度为 (12) 的分布. 从而, 如果 $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ 是不依赖于 W 的标准布朗运动, 那么 Y 的分布重合于量

$$B_{T(1)} + (\mu + \beta T(1)) \tag{13}$$

的分布. (比较 §1c 中的 (19).)

记 $g(x) = g(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$ 是 GIG-分布的密度.

由 (11) 和 (12) 求得

$$g(x) = C_3(\alpha,\beta,\mu,\delta)\left[q\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right]^{-1} K_1\left(\alpha\delta q\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right)e^{\beta(x-\mu)}, \tag{14}$$

其中

$$C_3(\alpha,\beta,\mu,\delta) = \frac{\alpha}{\pi}e^{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$$

以及 $q(x) = \sqrt{1+x^2}$.

由于

$$K_1(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}x^{-1/2}e^{-x}, \qquad x\to\infty, \tag{15}$$

故当 $|x|\to\infty$ 时,

$$g(x) \sim \left(\frac{\alpha}{2\pi\delta}\right)^{1/2}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2\right]^{3/4}} \times \exp\left\{-\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}+\beta(x-\mu)\right\}, \tag{16}$$

因而,

$$\ln\frac{h_1(x)}{g(x)} \sim \frac{3}{4}\ln\left(1+\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2\right), \qquad |x|\to\infty; \tag{17}$$

后一个关系式表明, $h_1(x)$ 有比 $g(x)$ 更厚的 “厚尾”.

4. 有密度为 $h_1(x)$ 的双曲分布比有密度为 $g(x)$ 的高斯 \\ 逆高斯 (GIG-) 分布构造简单. 然而, 有一种原则性的状况使得这两种分布中的后一种在某些性质方面更有优势. 详情如下.

设 Y 是密度为 $g(x) = g(x;\alpha,\beta,\mu,\delta)$ 的随机变量. 由此可导出函数

$$\mathsf{E}e^{\lambda Y} = \exp\left\{\delta[\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\alpha^2-(\beta+\lambda)^2}]+\mu\lambda\right\}. \tag{18}$$

由此可见, 如果 $Y_1,\cdots,Y_m$ 是有同样的 α 和 β、但一般有不同的 μ_i 和 δ_i 的独立 GIG-分布的随机变量, 那么它们的和 $Y = Y_1+\cdots+Y_m$ 仍然是有同样的 α 和 β 以及 $\mu = \mu_1+\cdots+\mu_m$, $\delta = \delta_1+\cdots+\delta_m$ 的 GIG-分布的随机变量.

换句话说, GIG-分布关于卷积 (在上述意义下) 封闭.

如果 X 有双曲分布, 那么为简单起见, 取 $\beta=\mu=0$, 我们求得

$$\mathsf{E}e^{\lambda X} = \frac{\alpha}{K_1(\alpha\delta)}\frac{K_1(\delta\sqrt{\alpha^2-\lambda^2})}{\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}}. \tag{19}$$

由此可见, 双曲分布没有上面所指出的 GIG-分布的封闭性质.

重要的是要注意到, 两种分布: GIG-分布和双曲分布都是无限可分的. 对于 GIG-分布, 这点直接由 (18) 看出, 而对于双曲分布, 这点在著作 [21]–[23], [25], [26] 中注意到. 由 (18) 也可求得对于均值 $\mathsf{E}Y$ 和方差 $\mathsf{D}Y$ 的简单表达式:

$$\mathsf{E}Y = \mu + \frac{\delta\frac{\alpha}{\beta}}{[1-(\frac{\alpha}{\beta})^2]^{1/2}},$$

$$\mathsf{D}Y = \frac{\delta}{\alpha[1-(\frac{\alpha}{\beta})^2]^{3/2}}.$$

注. 关于运用这些分布来分析金融指数参见 E. Eberlein and U. Keller [127], 其中引入一系列金融指数统计处理的令人难忘的结果 (也参见第二章中的 §2b).

5. 由于双曲分布是无限可分的, 故可以定义增量分布是双曲分布的 Lévy 过程, 即有同质独立增量的过程.

我们限于有参数 $\beta = \mu = 0$ 的中心对称的密度 $h_1(x) = h_1(x;\alpha,\beta,\mu,\delta)$ 的情形. 在这一情形下, 密度 $h_1(x)$ 可表示为下列形式:

$$h_1(x) = \frac{1}{2\delta K_1(\alpha\delta)} \exp\left\{-\alpha\delta\sqrt{1+\left(\frac{x}{\delta}\right)^2}\right\}. \tag{20}$$

我们将记 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ 为 Z_1 有密度为 (20) 的分布的 Lévy 过程.

值得注意的是, 由于 $\mathsf{E}|Z_t| < \infty$, $Z_0 = 0$ 和 $Z = (Z_t)$ 有独立增量, 这个过程是鞅 (关于自然 σ-代数 $(\mathscr{F}_t)$, $\mathscr{F}_t = \sigma(Z_s, s \leqslant t)$):

$$\mathsf{E}(Z_t \mid \mathscr{F}_s) = Z_s, \qquad t \geqslant s. \tag{21}$$

(我们察觉, $\mathsf{E}|Z_t|^p < \infty$ 对于所有 $p \geqslant 1$ 成立.)

设 $\varphi_t(\theta) = \mathsf{E}\exp(i\theta Z_t)$ 是双曲 Lévy 过程 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ 的特征函数. 于是 (比较 §1b 中的公式 (4) 和 (5))

$$\varphi_t(\theta) = (\varphi_1(\theta))^t. \tag{22}$$

由 (9) 和 (10) (对于 $X = Z_1$) 得到, 当 $\beta = \mu = 0$ 时,

$$\mathrm{Law}\, Z_1 = \mathsf{E}'_{\sigma^2}\mathscr{N}(0,\sigma^2), \tag{23}$$

其中

$$p'_{\sigma^2} = \frac{(\frac{\alpha}{\delta})}{2K_1(\alpha\delta)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\alpha^2 x + \frac{\delta^2}{x}\right)\right\}. \tag{24}$$

在 [127] 中对这些表示式进行比较, 就对 $\varphi_t(\theta)$ 求得下列 "*Lévy-Khintchine 公式*" (比较 §1a 中的 (22) 和 (29)):

$$\varphi_t(\theta) = \exp\left\{t\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x)\nu(dx)\right\}, \tag{25}$$

其中 Lévy 测度 ν 有 (表达上相当复杂的) 密度 $p_\nu(x)$ 为 (按 Lebesque 测度 dx):

$$p_\nu(x) = \frac{1}{\pi^2|x|}\int_0^\infty \frac{\exp(-|x|\sqrt{2y+\alpha^2})}{y\left(J_1^2(\delta\sqrt{2y})+Y_1^2(\delta\sqrt{2y})\right)}dy + \frac{\exp(-|x|)}{|x|}. \qquad (26)$$

这里 J_1 和 Y_1 分别是第一种和第二种 Bessel 函数.

基于关于 J_1 和 Y_1 的渐近结果 ([1] 中的公式 9.1.7,9 和 9.2.1,2), 可以指出, (26) 中的被积表达式的分母当 $y\to 0$ 时趋向于常数, 而当 $y\to\infty$ 时渐近等于 $y^{-1/2}$. 由此 [127] 的作者断定, Lévy 测度的密度

$$p_\nu(x) \sim \frac{1}{x^2} \qquad 当 \quad x\to 0, \qquad (27)$$

由此得到, 过程 $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 在任何无论多小的时间区间中有无限多个小跳跃.

事实上, 设

$$\mu^Z(\omega;\Delta,B) = \sum_{s\in\Delta} I(Z_s(\omega)-Z_{s-}(\omega)\in B), \qquad B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\}),$$

是过程 Z 的跳跃测度, 即 $Z_s(\omega)-Z_{s-}(\omega)$ 落在集合 B 中的 $s\in\Delta$ 的个数. 于是 (参见例如, [250; 第 II 章 1.8])

$$\mathsf{E}_\mu^Z(\omega;\Delta,B) = |\Delta|\nu(B),$$

因而, $\int_{(0,\varepsilon]}\nu(dx)=\infty$, $\int_{[-\varepsilon,0)}\nu(dx)=\infty$ 对于每个 $\varepsilon>0$ 成立.

2. 带自相似性质的模型 (自相似性). 分形性

在金融时间序列的统计分析中, 早就发现其中的许多都具有 (统计) 自相似性; 形象地说, 自相似性就是说: "它的部分如同整体一样构造". 例如, 如果 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 是 S&P500 的日指数值, 那么根据量

$$h_n\ \left(=\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) \quad 和 \quad h_{kn}\ \left(=\ln\frac{S_{kn}}{S_{k(n-1)}}\right), \qquad n\geqslant 1$$

的大量序列所求得的相应的经验密度 $\widehat{f}_1(x)$ 和 $\widehat{f}_k(x)$, $k>1$, 满足这样的关系式:

$$\widehat{f}_1(x) \approx k^{\mathbb{H}}\widehat{f}_k(k^{\mathbb{H}}x),$$

其中 $\mathbb{H}$ 是某个常数, 其值显著大于 1/2, 而不同于根据中心极限定理所预期的量 1/2.

显然, 相似性质要求有其解释, 并且正如以后的叙述中变得清楚起来, 它可以在 (统计) 自相似性的一般观念的框架中给出; 这样的框架不仅是为诸如分形布朗运动、分形高斯噪声那样的重要概念而引入的, 并且还对分形几何的创立有决定性的影响 (B. Mandelbrot). 自相似性的观念以最紧密的方式与诸如混沌、非线性动力系统之类的 (非概率) 概念相联系, 后者 (与其在金融数学中的重要应用相联系) 已经在第二章的第 4 节中论述过.

§2a. Hurst 的自相似性统计现象

1. 1951 年, 一位在埃及参与尼罗河的水文项目达 60 多年的英国气象学家 Harold Edwin Hurst 发表了著作 [236]; 该文叙述了他在实验中所观察到的在尼罗河和许多其他河流的年水位波动性态的出人意料的效应. 这种效应的实质如下.

设 $x_1, \cdots, x_n$ 是 n 个逐年的水位量 (比如, 在尼罗河的某部分). 它们的均值的"好"估计将是量 $\frac{1}{n}X_n$, 其中 $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. k 逐年的 X_k 与按 n 年数据计算的 (经验) 均值的偏差为量

$$X_k - \frac{k}{n}X_n,$$

因而, 最小偏差和最大偏差是量

$$\min_{k\leqslant n}\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right) \quad 和 \quad \max_{k\leqslant n}\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right).$$

我们记

$$\mathcal{R}_n = \max_{k\leqslant n}\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right) - \min_{k\leqslant n}\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right)$$

为刻画累积量 X_k 与 n 逐年的均值 $\frac{k}{n}X_n$ 的偏差程度的 "范围" 量.

H. Hurst 在其实验实践中, 运作的其实不是量 $\mathcal{R}_n$, 而是规范化的量

$$Q_n = \mathcal{R}_n/\mathcal{S}_n,$$

其中 $\mathcal{S}_n$ 是经验标准差,

$$\mathcal{S}_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2},$$

它的引入是为了得到关于替换

$$x_k \to c(x_k + m), \qquad k \geqslant 1$$

不变的统计量; 这是所期待的性质, 因为甚至量 x_k 的均值和方差照例是未知的.

基于尼罗河在 622—1469 年期间 (即经历 847 年) 的观测资料的大量事实, H. Hurst 发现, 对于大 n 值, 统计量 $\mathcal{R}_n/\mathcal{S}_n$ "走向" 下列样式:

$$\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \sim c n^{\mathbb{H}}, \tag{1}$$

其中 c 是某个常数, 等价性 "$\sim$" 在某个适当的含义下来理解, 而参数 $\mathbb{H}$ 现在称为*Hurst* 指数, 它大致等于 0.7. (H. Hurst 也对其他河流得到类似的结果.) H. Hurst 认为这个结果是出人意料的, 因为他所期待的 $\mathbb{H}$ 值应该等于 1/2, 而这点后来被 W. Feller 在 [157] 中阐明如下.

设 $x_1, x_2, \cdots$ 是有 $\mathsf{E}x_n = 0$, $\mathsf{E}x_n^2 = 1$ 的独立同分布随机变量序列. (这正是 H. Hurst 所期待的.) 于是正如 W. Feller 所指出, 当 n 很大时,

$$\mathsf{E}\mathcal{R}_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{1/2}$$

和

$$\mathsf{D}\mathcal{R}_n \sim \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\right) n.$$

由于在所考察的渐近情形下, $\mathcal{S}_n \to 1$ (以概率 1 成立), 故自然有当 n 很大时, 量 Q_n 必须如同 $n^{1/2}$ 那样增长 (至少是平均增长).

在研究序列 $(x_n)_{n\geqslant 1}$ 的统计性质时, 自然也会对经验分布函数 $\widehat{\mathrm{Law}}(x_1+\cdots+x_n)$ 的结构感兴趣, 它是由 (大量) 样本, 比如 $(x_1, \cdots, x_n)$, $(x_{n+1}, \cdots, x_{2n})$, 等等来求得的. 在 x_k 是河流水位与某个 "均值" 的偏差时, 观察得到 (例如还是对于尼罗河)

$$\widehat{\mathrm{Law}}(x_1 + \cdots + x_n) \approx \widehat{\mathrm{Law}}(n^{\mathbb{H}} x_1), \tag{2}$$

其中 $\mathbb{H} > 1/2$.

2. 怎样来考虑 (2) 中的序列 (x_n) 的概率统计性质, 使得参数 $\mathbb{H}$ 可能不同于 1/2?

如果转向 §1a 中的公式 (4), 那么参数值 $\mathbb{H} \sim 0.7$ 的解释之一在于, $x_1, x_2, \cdots$ 是有稳定指数 $\alpha = 1/\mathbb{H} \sim 1.48$ 的独立稳定的随机变量.

然而, 还有另一种解释, $\mathbb{H} \neq 1/2$ 的 (2) 的性质甚至可能在随机变量 $x_1, x_2, \cdots$ 有正态分布、但不独立的情况下发生! 这时, 平稳序列 (x_n) 必定是有强后效的序列. (参见后面的 §2c.)

3. 性质 (1) 和 (2) 是自相似性的独特形式; 对于许多金融指数 (以 h_n 取代 x_n) 也可观察到这样的性质. 因此, 毫不奇怪的是, 上面所注意到的关于量 (x_n) 的 "独立性和稳定性" 或者 "不独立性和正态性" 在金融数学中可找到广泛的应用, 特别是在分析 "波动率" 的 "分形" 结构时.

H. Hurst 的研究和所注意到的观察是 B. Mandelbrot 研究的出发点; 由此, Mandelbrot 建议既在他考察的*Hurst* 模型中, 又在许多其他概率模型 (其中包括金融数学中的模型) 中, 运用严格稳定过程 (§1c) 和具有自相似性质的分形布朗运动.

应该强调, 形形色色的在大自然 (物理、地球物理、生物、经济等等) 中遇到的带非线性动态变化的系统都具有 (1) 和 (2) 类型的自相似性质. 也正是这种 "自相似性" 在分形几何中起着中心作用, 而分形几何的奠基人 B. Mandelbrot 称他的书为 "大自然的分形几何 (The Fractal Geometry of Nature)", [320], 也正是要突出在大自然中自相似性概念的普适性.

对于我们今后定义统计自相似性和分形布朗运动所需要的知识将在 §2c 中给出. 下一节不直接与金融数学有关, 但吸收了著作 [104], [379], [385], [386], [428], [456] 等

等的资料; 它们给出自相似性观念的一般表示, 而正如已经注意到, 自相似概念在分形几何中起着中心作用.

§2b. 漫游分形几何

1. 如所周知, 出现在古希腊的欧几里得几何是力求把大自然中的所观察到的各种各样的形状归结为一些 "简单的"、"纯粹的"、"对称的" 对象. 这就出现了 "点"、"线"、"面" 以及三维对象 (球、锥、柱等等).

然而, 正如 B. Mandelbrot (1984) 所指出: "*云不是球, 山不是锥, 海岸线不是圆周, 树皮也不光滑, 闪电也不沿直线传播……*" 正是他创建了所谓分形几何恰好用来描述诸如此类的对象、形状、现象等等; 它们远不是 "简单" 而 "对称" 的, 相反, 它们具有很复杂的结构; 但尽管如此, 它们具有自相似性、自再生性等等类型的一系列性质.

我们不打算给出 "分形几何" 及其基本概念 "分形" 的数学定义, 而只希望读者注意到 "*一般的分形观念以及在金融数学中的特殊的分形观念*" 的重要性; 我们给出的 "定义" 仅仅停留在直观描述的水平上.

经常给出这样的 "可用定义": "*分形就是其部分构造与其整体构造一样的对象.*" (术语分形是 B. Mandelbrot 在 1975 年 [315] 中所引入的, 其来源是拉丁词 "fractio (ecclesiastical Lat; feminine (教会拉丁文; 阴性)): 打碎, 碎片 (a breaking, breaking in pieces)", 参见 [296]. (Breaking (英语): the action of break (打碎行动), fracture (破裂).)

树是有这种空间分形结构的对象的经典例子 ("部分" 是树枝, "整体" 是树干).

另一个直观的例子是 Sierpinski[1] 三角形, 它是这样得到的: 由一个实心的 ("黑色的") 三角形挖去中心三角形的内部, 再对每一个 "黑色的" 三角形挖去相应的中心三角形的内部, 如此等等 (参见图 27 中的逐次构造).

这样得到的所余下的 "黑色的" 点的集合最终形成一个集合, 它也就称为 *Sierpinski 三角形*; 这是以吸引子著称的对象的一个例子.

显然, 这样构造的 Sierpinski 三角形中有许许多多空洞, 而这就自然发生这样的问题: 这一对象的 "维数" 是多少?

严格地说, 它不能称为是二维的, 因为它有大量 "窟窿", 同时, 它当然也不是一维的.

这一简单的例子表明, 看来 Sierpinski 三角形可用某个分形维数, 即分数维数来描述. (在对应的定义下, 这一 "维数" 大致等于 1.58; 参见例如, [104], [428], [456].)

Sierpinski 三角形是对称分形对象. 在大自然中, 占优势的当然是 "非对称分形", 它联系着其形状的*局部随机性*. 尽管如此, 这与*整体确定性*并不矛盾; 作为下列随机

---

[1] 波兰数学家 Wacław Sierpinski (1882—1969) 早在 1916 年就引进 "Sierpinski 三角形" (在英文文献中也称为 "Sierpinski Gasket (垫圈)") 以及 "Sierpinski 地毯" ("Sierpinski Carpet").

程序作用的结果来得到的 Sierpinski 三角形可看作证实这点的一个例子.

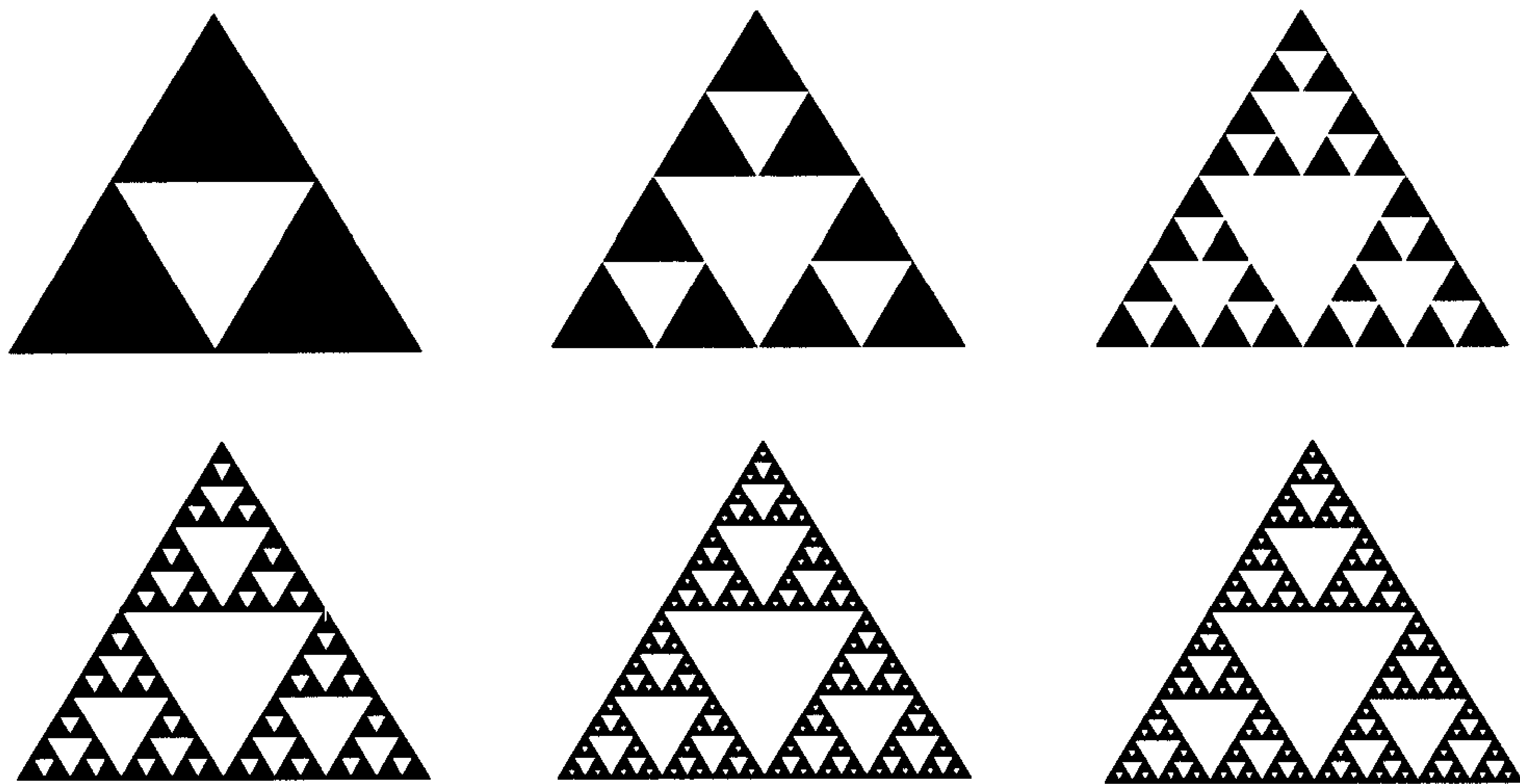


图 27　Sierpinski 三角形的逐步构造

我们考察有顶点为 $A = A(1,2)$, $B = B(3,4)$ 和 $C = C(5,6)$ 的等边三角形, 其中数 $1,2,\cdots,6$ 的出现使下列构造变得明显.

在三角形中以任意方式选取点 (a), 然后以 "诚实的" 方式掷骰子. 如果落下的比如是 "5" 或 "6", 那么把点 (a) 与顶点 $C = C(5,6)$ 相连, 并设 (b) 是连接这两个点的线段的中点. 然后再掷骰子, 再根据所落下的数以类似的方式得到新的点 (c). 如此等等.

尤其引人注目的是, 这样得到的点 $(b),(c),\cdots$ 的极限集将 ("几乎总是") 形成 Sierpinski 三角形 (图 27 中的 "黑色" 点).

数学上众所周知的另一个有分形结构的 "经典" 例子是 Cantor 集, 它是由 George Cantor (1845—1918) 在 1883 年作为有特殊结构的集合 (完全集, 即没有孤立点的闭集) 的例子, 它在数直线上无处稠密, 但有连续统的势. 我们记得, 这个集合是线段 $[0,1]$ 的子集, 它由所有形为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{3^i}$ 的数所形成, 其中 $\varepsilon_i = 0$ 或 2. 在几何上, Cantor 集是由线段 $[0,1]$ 中挖去中间的 (开) 区间 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, 然后, 再在余下的线段 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 挖去它们的中心子区间 $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ 和 $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$, 如此等等. 这样挖出的区间长度之和等于 1, 但, 尽管如此, 余下的 "稀" 集其实有连续统的势. Cantor 集的自相似性, 即它的 "部分构造如同整体构造", 由这一集合的几何构造本身很明显; 根据这一构造, 这个集合是一些子集的全体, 其中的每一个如同是整个集合的一个 "微缩".

有自相似性质的其他著名的对象还有 *Pascal* 三角形 (B. Pascal 提出), *Koch* 雪花 (由 H. van Koch 提出), *Peano* 曲线 (由 G. Peano 提出), *Julia* 集合 (由 G. Julia 提出); 参见例如, [379].

2. 上面说到的 “维数”, 我们也不给出其确切的定义 (F. Hausdorff 是 “Hausdorff 维数” 的作者, 他注意到, “维数” 概念的 “正确” 定义是非常困难的). 关于这方面可参考专门的文献 (参见例如, [104], [428], [456]), 我们只要注意到, 比如平面上的曲线, 其分形维数的观念是相当简单的; 这个维数表明所考察的曲线掩盖平面的程度. 如果这条曲线是某个过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 的实现, 那么在 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 中的 “高频成分” 越多, 它的分形维数就越大.

3. 现在假定, $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是某个随机过程. 在这种情形下, 自然给出的 “分形维数” 的定义不是对于个别实现的, 而是对于实现全体的. 这个想法导致随机分形维数的概念, 它的定义将在下一节中给出.

§2c. 统计自相似性. 分形布朗运动

1. 定义 1. 在 $\mathbb{R}^d$ 中取值的随机过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为自相似的 (self-similar), 或者说满足(统计) 自相似性质, 是指对于每个 $a > 0$, 可求得这样的 $b > 0$, 使得

$$\mathrm{Law}(X_{at}, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(bX_t, t \geqslant 0). \tag{1}$$

从直观的视角来看, 这意味着, 时间尺度的变换 $(t \to at)$ 导致与相尺度变化 $(x \to bx)$ 的同样的结果.

在 §1c 中, 我们看到, 对于 (非零) 严格稳定过程, 存在常数 $\mathbb{H}$, 使得 $b = a^{\mathbb{H}}$. 这时对于严格 α-稳定过程, 有

$$\mathbb{H} = \frac{1}{\alpha}. \tag{2}$$

在 (一般) 的稳定过程情形下, 取代 (1), 我们有 (参见 §1c 中的 (2)) 性质

$$\mathrm{Law}(X_{at}, t \geqslant 0) = \mathrm{Law}(a^{\mathbb{H}} X_t + tD_a, t \geqslant 0), \tag{3}$$

它意味着, 对于这种过程, 时间尺度的变化导致考虑可用位移 tD_a $(t \geqslant 0)$ 来确定的转移的相尺度变化的同样结果. 这时, 对于 α-稳定过程, $\mathbb{H} = 1/\alpha$.

2. 由此得到下列合理而自然的定义:

定义 2. 如果在定义 (1) 中, 对于任何 $a > 0$, 参数 $b = a^{\mathbb{H}}$, 那么随机过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 将称为有*Hurst* 指数 $\mathbb{H}$ 的自相似过程, 或者说过程满足有*Hurst* 指数 $\mathbb{H}$ 的统计自相似性质. 量 $\mathbb{D} = \frac{1}{\mathbb{H}}$ 称为随机过程 X 的统计分形维数.

自相似过程的经典例子是布朗运动 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$. 我们记得, 对于这个 (高斯) 过程, $\mathsf{E}X_t = 0$, $\mathsf{E}X_s X_t = \min(s, t)$. 因此,

$$\mathsf{E}X_{as}X_{at} = \min(as, at) = a\min(s,t) = \mathsf{E}(a^{1/2}X_s)(a^{1/2}X_t),$$

而这就是说二维分布 $\mathrm{Law}(X_s, X_t)$ 具有下列自相似性质:

$$\mathrm{Law}(X_{as}, X_{at}) = \mathrm{Law}(a^{1/2}X_s, a^{1/2}X_t).$$

由高斯性, 由此得出, 布朗运动满足有 Hurst 指数 $\mathbb{H} = 1/2$ 的统计自相似性质.

另一个例子是严格 α-稳定*Lévy* 运动 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$, 它满足

$$X_t - X_s \sim S_\alpha((t-s)^{1/2}, 0, 0), \qquad \alpha \in (0, 2].$$

对于这个有同质独立增量的过程

$$X_{at} - X_{as} \stackrel{\mathrm{d}}{=} a^{1/\alpha}(X_t - X_s),$$

而这就是说 Hurst 指数 $\mathbb{H} = 1/\alpha$ 以及 $\mathbb{D} = \alpha$. 当 $\alpha = 2$ 时, 我们得到布朗运动.

我们强调, 在这些例子中所考察的过程都是有独立增量的过程.

下列例子有关有不独立增量的过程.

3. 分形布朗运动.

我们考察函数

$$A(s,t) = |s|^{2\mathbb{H}} + |t|^{2\mathbb{H}} - |t-s|^{2\mathbb{H}}, \qquad s, t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

这个函数当 $0 < \mathbb{H} \leqslant 1$ 时是非负定的, 因而, 在某个概率空间上 (比如, 在实函数 $\omega = (\omega_t)_{t \in \mathbb{R}}$ 的空间上) 存在 (参见例如, [439; 第 II 章 §9]) 高斯过程, 使得它有零均值和自协方差函数

$$\mathsf{Cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2} A(s,t),$$

即

$$\mathsf{E} X_s X_t = \frac{1}{2}\{|s|^{2\mathbb{H}} + |t|^{2\mathbb{H}} - |t-s|^{2\mathbb{H}}\}. \tag{5}$$

由此可见,

$$\mathsf{E} X_{as} X_{at} = a^{2\mathbb{H}} \mathsf{E} X_s X_t = \mathsf{E}(a^{\mathbb{H}} X_s)(a^{\mathbb{H}} X_t),$$

而这就是说,

$$\mathrm{Law}(X_{as}, X_{at}) = \mathrm{Law}(a^{\mathbb{H}} X_s, a^{\mathbb{H}} X_t).$$

正如在其密度由二维分布来确定的布朗运动的情形下那样, 我们断定, 现在考察的过程 X 是 Hurst 指数为 $\mathbb{H}$ 的自相似过程.

由 (5),

$$\mathsf{E}|X_t - X_s|^2 = |t-s|^{2\mathbb{H}}. \tag{6}$$

我们记得, *Kolmogorov* 判别准则 (参见例如, [470]) 断言, 如果可求得这样的常数 $\alpha > 0, \beta > 0$ 和 $c > 0$, 使得对于所有 $s, t \geqslant 0$, 有

$$\mathsf{E}|X_t - X_s|^\alpha \leqslant c|t-s|^{1+\beta}, \tag{7}$$

那么随机过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 存在连续修正. 因此, 如果 $\mathbb{H} > 1/2$, 那么由 (6) 立即得到 (当 $\alpha = 2$, $\beta = 2\mathbb{H} - 1$ 时), 所考察的过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 存在连续修正. 如果 $0 < \mathbb{H} \leqslant 1/2$, 那么由对于每个 $0 < k < \mathbb{H}$ 的高斯性, 下列估计成立:

$$\mathsf{E}|X_t - X_s|^{1/k} \leqslant c|t-s|^{\mathbb{H}/k},$$

其中 $c > 0$ 是某个常数. 从而, 重新可能应用 Kolmogorov 判别准则 ($\alpha = 1/k$, $\beta = \mathbb{H}/k - 1$).

这样一来, 所考察的高斯过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 对于所有满足 $0 < \mathbb{H} \leqslant 1$ 的 $\mathbb{H}$ 存在连续修正.

定义 3. 有零均值和协方差函数 (5) 的连续高斯过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为 (标准) *有自相似 Hurst 指数 $\mathbb{H}$ $(0 < \mathbb{H} \leqslant 1)$ 的分形布朗运动*. (以后对于这样的过程将经常使用记号 $B_{\mathbb{H}} = (B_{\mathbb{H}}(t))_{t\geqslant 0}$.)

由这一定义得到, (标准) 分形布朗运动 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 有下列性质 (它也可以用来作为这种过程的定义):

1) $X_0 = 0$, $\mathsf{E}X_t = 0$ 对于所有 $t \geqslant 0$ 成立;
2) X 有平稳增量:

$$\mathrm{Law}(X_{t+s} - X_s) = \mathrm{Law}(X_t), \qquad s, t \geqslant 0;$$

3) X 是高斯过程,

$$\mathsf{E}X_t^2 = |t|^{2\mathbb{H}}, \qquad t \geqslant 0,$$

其中 $0 < \mathbb{H} \leqslant 1$;
4) X 有连续轨线.

由这些性质, 我们再次得到分形布朗运动具有自相似性质.

在这些联系中, 值得注意的是, 在一定的含义下, 反之也成立 ([418; 第 318–319 页]): *如果非退化过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, $X_0 = 0$, 有有限方差, 是有 Hurst 指数 $\mathbb{H}$ 的自相似过程, 并且有平稳增量, 那么 $0 < \mathbb{H} \leqslant 1$, 且其自协方差函数 $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathsf{E}X_1^2 A(s,t)$, 其中 $A(s,t)$ 由公式 (4) 来给定.* 不但如此, 在 $0 < \mathbb{H} < 1$ 的情形下, 数学期望 $\mathsf{E}X_t = 0$, 而在 $\mathbb{H} = 1$ 的情形下, 有 $X_t = tX_1$ (P-a.s.).

我们还注意到, 除了高斯过程以外, 也存在非高斯过程有所指出的性质 (参见 [418; 第 320 页]).

4. 如果 $\mathbb{H} = 1/2$, 那么 (标准) 分形布朗运动无非就是 (标准) 布朗运动.

首先考察所引入的过程 $B_{\mathbb{H}}$ 的是 A. N. Kolmogorov 1940 年在他的著作 [278] 中

进行的, 其中它们被称为维纳螺线 (helices of Wiener). 术语分形[1] 布朗运动是在 1968 年的 B. Mandelbrot 和 J. van Ness 的著作 [328] 中引入的. 不同于 Kolmogorov, 他们构造过程 $B_{\mathbb{H}}$ 时, 是从自协方差函数 (4) 的形式出发的, Mandelbrot 和 van Ness 利用对 (某个) 有 $W_0=0$ 的维纳过程 $W=(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 的随机积分来得到 "显式": 对于 $0<\mathbb{H}<1$,

$$B_{\mathbb{H}}(t)=c_{\mathbb{H}}\left\{\int_{-\infty}^{0}\left[(t-s)^{\mathbb{H}-1/2}-(-s)^{\mathbb{H}-1/2}\right]dW_s+\int_0^t(t-s)^{\mathbb{H}-1/2}dW_s\right\},\tag{8}$$

其中 (规范) 常数

$$c_{\mathbb{H}}=\sqrt{\frac{2\mathbb{H}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\mathbb{H}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mathbb{H}\right)\Gamma(2-2\mathbb{H})}}\tag{9}$$

选择为使 $\mathsf{E}B_{\mathbb{H}}^2(1)=1$.

注 1. 关于 (8) 的右端的各种表示形式参见著作 [328]. 在这篇著作中, 也详细评论原来的术语*分式布朗运动* (fractional Brownian motion) 及其与*分式积分* (fractional integral) (Holmgren-Riemann-Liouville)

$$\int_0^t(t-s)^{\mathbb{H}-1/2}dW_s\tag{10}$$

的类比, 其中 $\mathbb{H}$ 可以是任何正数 (也参见 H. Weyl 的著作 [475]).

注 2. 分形布朗运动 $B_{\mathbb{H}}$ 的几乎肯定的轨线满足指数 $\beta<\mathbb{H}$ 的 Hölder 条件. 它们也处处不可微, 并且

$$\overline{\lim_{t\to t_0}}\left|\frac{B_{\mathbb{H}}(t)-B_{\mathbb{H}}(t_0)}{t-t_0}\right|=\infty\quad(\mathsf{P}\text{-a.s.})$$

在任何点 $t_0\geqslant 0$ 上成立.

注 3. 如果在表示式 (8) 中取在 $(0,1)$ 中取值的 Hölder 函数 $\mathbb{H}_t$, ($|\mathbb{H}_t-\mathbb{H}_s|\leqslant c|t-s|^{\alpha}$, $\alpha>0$), 那么我们就得到所谓*多重分形布朗运动*. 这个过程在著作 [381] 中引进, 并进行详尽研究.

注 4. 在随机过程理论中, 众所周知*半鞅*类在发展随机分析理论中的作用 (参见后面的第 5 点以及更详细的例如, [250], [304]). 在这种联系中, 有益的是注意到, 有 $0<\mathbb{H}\leqslant 1$ 的分形布朗运动 $B_{\mathbb{H}}$ (除了 $\mathbb{H}=1/2$ (即布朗运动情形) 和 $\mathbb{H}=1$ 以外) *不是半鞅*. 这一事实对于 $1/2<\mathbb{H}<1$ 的证明参见专著 [304; 第 4 章, §9, 例 2].

[1] 著作 [328] 称为 "分式布朗运动, 分式噪声及其应用 (Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications)", 取代我们所采用的字面上正确的术语 "分形 (fractal) 布朗运动", 而采用了日常所说的 "分式 (fractional) 布朗运动". 然而, 考虑到俄语上的顺耳, 我们决定取代术语 "分式", 而使用术语 "分形", 以特别强调过程 $B_{\mathbb{H}}$ 的分形本性. (英文版中, 这里的 "分形" 布朗运动全都被改为 "分式" 布朗运动. —— 译者注)

注 5. 在与*Hurst* 的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析 (即基于研究经验标准差及其比值的范围性质的分析; 参见第四章, 第 4 节) 的联系中, 依照 [328], 注意到以下这点是有益的: 如果 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是有 Hurst 参数 $\mathbb{H}$, $X_0 = 0$ 和 $\widetilde{\mathcal{R}}_t = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_s - \inf\limits_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$ 的连续自相似过程, 那么 $\mathrm{Law}(\widetilde{\mathcal{R}}_t) = \mathrm{Law}(t^{\mathbb{H}}\widetilde{\mathcal{R}}_1)$, $t > 0$. 在布朗运动 $X = B_{\frac{1}{2}}$ 的情形下, W. Feller ([157]) 对于 $\widetilde{\mathbb{R}}_1$ 求得精确分布. (这个分布的密度有形式为 $8\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^2\varphi(kx)$, $x \geqslant 0$, 其中 $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$.)

5. 自相似性质有各种推广. 例如, 设 $X(\alpha) = (X_t(\alpha))_{t\geqslant 0}$ 是有参数为 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的 Ornstein-Uhlenbeck (型) 过程, 即由下列公式确定的 Gauss-Markov 过程:

$$X_t(\alpha) = \int_0^t e^{\alpha(t-s)} dW_s, \qquad t \geqslant 0, \tag{11}$$

其中 $W = (W_s)_{s\geqslant 0}$ 是标准布朗运动; 参见 §3a. (我们察觉, $X(\alpha) = (X_t(\alpha))_{t\geqslant 0}$ 是线性随机微分方程 $dX_t(\alpha) = \alpha X_t(\alpha)dt + dW_t$, $X_0(\alpha) = 0$ 的解.) 由 (11) 不难导出, 对于每个 $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Law}(X_{at}(\alpha), t \in \mathbb{R}) = \mathrm{Law}(a^{1/2}X_t(\alpha a), t \in \mathbb{R}),$$

它可看作对于过程族 $\{X(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ 的专门的自相似形式.

6. 我们还剩下一个基于自相似性质的原理上很重要的 "统计推断" 方法.

令 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是自相似指数为 $\mathbb{H}$ 的自相似过程. 设 $\Delta > 0$. 于是

$$\mathrm{Law}(X_\Delta) = \mathrm{Law}(\Delta^{\mathbb{H}} X_1), \tag{12}$$

而这就是说, 如果 $f_\Delta(x) = \dfrac{d\mathsf{P}(X_\Delta \leqslant x)}{dx}$ 是 X_Δ 的概率密度, 那么

$$f_1(x) = \Delta^{\mathbb{H}} f_\Delta(x\Delta^{\mathbb{H}}). \tag{13}$$

在通常的统计分析中, 经常由一般的考虑, 可以认为, 过程 X 是带有某个一般来说有未知参数值 $\mathbb{H}$ 的自相似过程. 设想我们通过某种方式获得对于 $\mathbb{H}$ 的某个 "可能有的" 估计 $\widehat{\mathbb{H}}$. 于是为了检验假设 X 实际上是有参数为 $\widehat{\mathbb{H}}$ 的自相似过程, 可以如下处理.

假定根据在 X_1 和 X_Δ 上的独立观察结果, 我们对于足够多的 Δ 值得到经验密度 $\widehat{f}_1(x)$ 和 $\widehat{f}_\Delta(x)$. 于是, 如果对于广阔范围的 x 和 Δ 值, 有

$$\widehat{f}_1(x) \approx \Delta^{\widehat{\mathbb{H}}} \widehat{f}_\Delta(x\Delta^{\mathbb{H}}), \tag{14}$$

那么可以认为, 我们对 X 是有指数为 $\widehat{H}$ 的自相似过程的假设的合理性得到足够强的证实.

当然, 如果 $\mathbb{H}$ 的理论密度 $f_1(x)$ (它自然依赖于 $\mathbb{H}$) 已知, 那么取代检验关系式 (14) 的是, 要断定函数 $\Delta^{\widehat{\mathbb{H}}}\widehat{f}_\Delta(x\Delta^{\widehat{\mathbb{H}}})$ 的图像近似 "拟合" 在把值 $\widehat{\mathbb{H}}$ 作为 Hurst 指数 (或者这个参数原来的值, 如果它先验已知) 的密度函数 $f_1(x)$ 的图像上的合理性.

7. 对于 α-稳定的 Lévy 过程, 其 Hurst 指数 $\mathbb{H} = 1/\alpha$, 因而, 对于这样的过程, $\mathbb{H}$ 的估计归结为参数 α 的估计. 对于分形布朗运动 $B_{\mathbb{H}} = (B_{\mathbb{H}}(t))_{t\geqslant 0}$, 依据离散观察得到参数 $\mathbb{H}$ 的估计例如可如下来实行.

考察时间区间 $[0,1]$. 我们把它分成 n 个相等部分, 并设 $\Delta = 1/n$ 是分割的区间长度.

令

$$\nu_1(B_{\mathbb{H}};\Delta) = \frac{\sum_{k=1}^{n} |B_{\mathbb{H}}(k\Delta) - B_{\mathbb{H}}((k-1)\Delta)|}{n}$$

(比较第四章 §3a 中的 (19)).

由于

$$\mathsf{E}|B_{\mathbb{H}}(t+s) - B_{\mathbb{H}}(t)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,s^{\mathbb{H}},$$

故

$$\mathsf{E}\nu_1(B_{\mathbb{H}};\Delta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Delta^{\mathbb{H}}.$$

由此自然导出下列推断: 作为 $\mathbb{H}$ 的估计, 应该取统计量

$$\widehat{\mathbb{H}}_n = \frac{\ln[\sqrt{\pi/2}\,\nu_1(B_{\mathbb{H}};\Delta)]}{\ln\Delta}.$$

(在著作 [380] 中指出, $\widehat{\mathbb{H}}_n \to \mathbb{H}$ 以概率 1 成立.)

§2d. 作为有强后效过程的分形高斯噪声

1. 在应用概率论的许多领域中, 布朗运动 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 被用来作为以一种简单方式得到白噪声的模型.

如果令

$$\beta_n = B_n - B_{n-1}, \qquad n \geqslant 1, \tag{1}$$

那么得到的序列 $\beta = (\beta_n)_{n\geqslant 1}$ 将是有 $\mathsf{E}\beta_n = 0$, $\mathsf{E}\beta_n^2 = 1$ 的独立同分布的高斯序列.

与第二章的 §2a 相对应, 这样的序列我们称为白 (高斯) 噪声, 并在形成各种随机过程 (既包括线性模型 (*MA, AR, ARMA* 等等), 也包括非线性模型 (*ARCH, GARCH* 等等)) 时用来作为随机源.

在这一含义下, 转向分形布朗运动 $B_{\mathbb{H}}$ 以既得到有强后效性质 ("long memory", "persistent system") 的平稳高斯序列, 又得到带快速交替的序列 ("relaxation processes", "intermittency", "antipersistence"), 看来是有益的.

类似于 (1), 令

$$\beta_n = B_{\mathbb{H}}(n) - B_{\mathbb{H}}(n-1), \qquad n \geqslant 1, \tag{2}$$

并将称序列 $\beta = (\beta_n)_{n\geqslant 1}$ 是有*Hurst* 参数 $\mathbb{H}$ $(0 < \mathbb{H} < 1)$ 的分形 (高斯) 噪声.

由 §2c 中的对于 (平稳) 过程 $B_{\mathbb{H}}$ 的协方差函数的公式 (5) 得到协方差函数 $\rho_{\mathbb{H}}(n) = \mathrm{Cov}(\beta_k, \beta_{k+n})$ 有下列形式:

$$\rho_{\mathbb{H}}(n) = \frac{1}{2}\{|n+1|^{2\mathbb{H}} - 2|n|^{2\mathbb{H}} + |n-1|^{2\mathbb{H}}\}. \tag{3}$$

由此可见, 当 $n \to \infty$ 时,

$$\rho_{\mathbb{H}}(n) \sim \mathbb{H}(2\mathbb{H}-1)|n|^{2\mathbb{H}-2}. \tag{4}$$

这样, 在 $\mathbb{H} = 1/2$ 的情形下, 协方差 $\rho_{\mathbb{H}}(n) = 0$ 对于 $n \neq 0$ 成立, 而 $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ (正如上面已经注意到,) 形成独立随机变量的高斯序列. 如果 $\mathbb{H} \neq 1/2$, 那么由 (4) 我们看到, 协方差随 n 的增长减小相当慢 (如同 $|n|^{-(2-2\mathbb{H})}$), 它通常就被解释为具有 "长记忆", 或 "强后效".

注意到在情形 $0 < \mathbb{H} < 1/2$ 和 $1/2 < \mathbb{H} < 1$ 之间的根本不同是有益的.

如果 $0 < \mathbb{H} < 1/2$, 那么协方差取负值 $(\rho_{\mathbb{H}}(n) < 0, n > 0)$, 这时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\rho_{\mathbb{H}}(n)| < \infty$.

如果 $1/2 < \mathbb{H} < 1$, 那么协方差取正值 $(\rho_{\mathbb{H}}(n) > 0, n > 0)$, 这时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\rho_{\mathbb{H}}(n)| = \infty$.

协方差为正意味着跟随 β_n 的正 (负) 值后面的值也可预期为正 (负) 值. 从而, 在许多金融指数 $S = (S_n)$ 的收益量 $h_n = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ 的经验分析中, 有 $1/2 < \mathbb{H} < 1$ 的分形高斯噪声可作为描述 "聚集性" 效应 (第四章, §3e) 的适当的模型.

协方差为负意味着跟随 β_n 的正 (负) 值后面的值可预期为负 (正) 值. 这种强交替 ("升—降—升— $\cdots$") 的局面实际上在分析波动率的性态时可观察到 (详情参见第四章中的第 3 节和第 4 节).

2. 序列 $\beta = (\beta_n)$ 是相关函数 $\rho_{\mathbb{H}}(n)$ 由公式 (3) 给定的平稳高斯序列.

可以直接断定, 在谱表示

$$\rho_{\mathbb{H}}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_{\mathbb{H}}(\lambda)\, d\lambda \tag{5}$$

中, 谱密度 $f_{\mathbb{H}}(\lambda)$ 可表示为下列形式:

$$f_{\mathbb{H}}(\lambda) = \frac{\displaystyle\int_0^{\infty} (\cos x\lambda)\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) x^{-2\mathbb{H}-1}\, dx}{\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) x^{-2\mathbb{H}-1}\, dx}. \tag{6}$$

引入相应的积分计算, 可以求得 (详情参见 [418]),

$$f_{\mathbb{H}}(\lambda) = K(\mathbb{H})|e^{i\lambda} - 1|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda + 2\pi k|^{2\mathbb{H}+1}}, \qquad |\lambda| \leqslant \pi, \tag{7}$$

其中常数 $K(\mathbb{H}) = \left(\dfrac{\pi}{\mathbb{H}\Gamma(2\mathbb{H})\sin(\mathbb{H}\pi)}\right)^{-1}$.

3. $\mathbb{H} = 1/2$ **的情形.**

在应用分形布朗运动来描述金融指数动态变化时, 我们选取某个时间度量单位 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 并令

$$H_n = B_{\mathbb{H}}(n), \qquad h_n = H_n - H_{n-1}.$$

显然, $\mathsf{E}h_n = 0$ 以及 $\mathsf{D}h_n^2 = 1$.

对应这一情形, 序列 $h = (h_n)$ 是独立同分布随机变量的高斯序列; 正如上面所指出的, 它称为*白 (高斯) 噪声*.

4. $1/2 < \mathbb{H} < 1$ **的情形.**

对应的噪声 $h = (h_n)$ 经常称为*黑噪声*. 这种噪声的特点是有*强后效*、*强记忆*. (在英文文献中, 对于这种性质使用术语 "persistence" (持续性).)

类似的效应例如可在以下的一些情形中观察到: 河流的水位状态、太阳活动特征、树的年轮宽度序列以及最后, 我们最感兴趣的, 对于股价、汇率以及其他金融指数的量 $h_n = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ $(n \geqslant 1)$ 所形成的序列 (参见后面的第四章).

如果 $\mathbb{H} = 1/2$, 那么标准差 $\sqrt{\mathsf{D}(h_1 + \cdots + h_n)}$ 随着 n 的增长如同 $\sqrt{n}$ 那样增长. 在 $\mathbb{H} > 1/2$ 的情形下, 这一增长更快, 它是 $n^{\mathbb{H}}$ 阶的. 换句话说, 所合成的值 $H_n = h_1 + \cdots + h_n$ 与*白噪声* ($\mathbb{H} = 1/2$) 的情形相比, 有更大的离差.

有益的是要注意到, 在 $\mathbb{H} = 1$ 的情形下, 分形布朗运动 $B_{\mathbb{H}}(t) = tB_{\mathbb{H}}(1)$ (P-a.s.). 因此, 在这一情形下, 增量 $h_n = B_{\mathbb{H}}(n) - B_{\mathbb{H}}(n-1)$ $(n \geqslant 1)$ 的序列 $h = (h_n)$ 只有平凡的特征: 所有量 $h_n \equiv B_{\mathbb{H}}(1)$, $n \geqslant 1$, 它也可称为 "理想持续性" 的情形.

5. $0 < \mathbb{H} < 1/2$ **的情形.**

可观察到有这种 Hurst 参数值的系统的典型例子是湍流. 著名的 Kolmogorov *三分之二定律* ([276], 1941 年) 指出, 在不可压缩粘性流体中, 当 Reynolds 数很大时, 在两个相距不大不小的 r 的点上的速度差的平方平均正比于 $r^{2\mathbb{H}}$, 其中 $\mathbb{H} = 1/3$.

有 $0 < \mathbb{H} < 1/2$ 的分形噪声 $h = (h_n)$ (*粉红噪声*) 有*负协方差*, 正如已经注意到, 它对应在值 h_n 上的*快速交替*. 正是这种性质刻画了*湍流现象*, 它 (与自相似性质一起) 说明, 有 $0 < \mathbb{H} < 1/2$ 的分形布朗运动可用来作为描述湍流现象的良好模型.

Hurst 参数满足 $0 < \mathbb{H} < 1/2$ 的*金融湍流*的例子是序列 $\widehat{r} = (\widehat{r}_n)$, 其中 $\widehat{r}_n = \ln \dfrac{\widehat{\sigma}_n}{\widehat{\sigma}_{n-1}}$ 以及

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(h_k - \overline{h}_n)^2$$

是对于股价、道琼斯指数、S&P500 等等的对数收益序列 $h=(h_n)$, $h_n=\ln\dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ 的经验方差 (波动率) (参见第四章 §3a).

许多作者 (参见例如, [180], [385], [386]) 都看到流体动力学的湍流性与金融市场的价格性态有很大类似. 这种类似导致, 例如, 著作 [180] 的作者所断定的那样: "我们有理由相信, 在过去 70 多年发展起来的湍流定性图景, 可帮助我们很好理解如金融市场那样的表面上毫不相干的领域."

3. 基于布朗运动的模型

§3a. 布朗运动及其作为一种基底过程的作用

1. 在以构造方式来给定描述 "收益" 量 $h_n=\ln\dfrac{S_n}{S_{n-1}}$ (它来自比如股价在时刻 n 为 S_n) 动态变化的随机序列 $h=(h_n)$ 时, 无论在线性模型中, 还是在非线性模型中, 通常假定有某个基底序列 $\varepsilon=(\varepsilon_n)$, 它也是生成序列 $h=(h_n)$ 的随机性的 "载体". 这个序列 $\varepsilon=(\varepsilon_n)$ 照例被认为是 (高斯) 白噪声.

选择这样的序列 $\varepsilon=(\varepsilon_n)$ 作为基底自然期待由 "简单" 构造的对象出发建立 "复杂" 的对象 (一般来说, 如同量 h_n 那样).

这时, 序列 $\varepsilon=(\varepsilon_n)$ 实际上可被认为是 "简单的", 因为它是由经典正态 (高斯) 分布 $\mathscr{N}(0,1)$ 的独立同分布随机变量所形成的.

2. 在连续时间情形下, 为构造许多 "复杂" 结构的模型, 布朗运动起着类似的作用. 布朗运动作为数学对象是在 L. Bachelier ([12]; 1900 年) 和 A. Einstein (爱因斯坦) ([132]; 1905 年) 的工作中引进的. 布朗运动的严格数学理论以及它在函数空间中的测度是 N. Wiener (维纳) [476] 在 1923 年建立的, 正因如此, 布朗运动也称为维纳过程, 而对应的测度称为维纳测度.

根据 §1b 中的定义 2, 标准布朗运动 $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是有同质独立增量以及 $B_0=0$, $\mathsf{E}B_t=0$, $\mathsf{E}B_t^2=t$ 的连续高斯随机过程. 这种过程的协方差函数是 $\mathsf{E}B_sB_t=\min(s,t)$.

前面已经不止一次地提到布朗运动的自相似性质: 对于每个 $a>0$,

$$\operatorname{Law}(B_{at};t\geqslant 0)=\operatorname{Law}(a^{1/2}B_t;t\geqslant 0).$$

由这一性质导出, 过程 $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}B_{at}\right)_{t\geqslant 0}$ 也是布朗运动. 除了这一性质以外, 我们还注意到一系列其他的变换; 它们得到的新的过程 $B^{(i)}$, $i=1,2,3,4$, 也是布朗运动: $B_t^{(1)}$, $B_t^{(2)}=tB_{1/t}$ 对于 $t>0$ 以及 $B_0^{(2)}=0$; $B_t^{(3)}=B_{t+s}-B_s$ 对于 $s>0$; $B_t^{(4)}=B_T-B_{T-t}$ 对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 以及 $T>0$.

由 d 个相互独立的标准布朗运动 $B^i = (B^i_t)_{t\geqslant 0}$ $(i = 1, \cdots, d)$ 所构成的多维过程 $B = (B^1, \cdots, B^d)$, 称为*d-维标准布朗运动*.

具有"丰富"结构的布朗运动可用来构建各种各样的随机过程.

例如, 布朗运动在构造扩散 Markov 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 作为随机微分方程

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \tag{1}$$

的解时, 起着"基底"的作用, 这里方程可解释为在下列 (积分) 意义下: 对于所有 $t > 0$,

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{2}$$

在这个表达式中出现的积分

$$I_t = \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{3}$$

理解为关于布朗运动的*Itô 随机积分*. (有关随机积分和随机微分方程的问题以后在 §3c 中讨论.)

在金融数学中, *几何布朗运动* $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 起着重要作用, 它服从随机微分方程

$$dS_t = S_t(adt + \sigma dB_t), \tag{4}$$

其中系数 $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

这个有不依赖于布朗运动 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 的初值 S_0 的方程, 有显式解

$$S_t = S_0 e^{at} e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}, \tag{5}$$

由此可见, 记

$$S_t = S_0 e^{H_t}$$

(比较第二章 §1a 中的公式 (1)), 则

$$H_t = \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t. \tag{6}$$

过程 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 称为*有局部漂移* $(a - \sigma^2/2)$ *和扩散* σ^2 *的布朗运动*. 由 (6) 得到, 局部漂移刻画 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 的变化的平均速度; 扩散 σ^2 经常称为*微分方差*, 而在金融文献中称为*波动率*.

P. Samuelson ([420]; 1965 年) 大概最早领悟到几何布朗运动在描述价格演变中的重要性, 他也把它称为经济布朗运动.

另一些著名的过程例子可作为随机微分方程 (1) 当系数 $a(t,x)$ 和 $\sigma(t,x)$ 如下选择时的解来提出.

有 $X_0=\alpha$ 和 $X_T=\beta$ 的**布朗桥** $X=(X_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是服从下列方程的过程:

$$dX_t=\frac{\beta-X_t}{T-t}dt+dB_t,\qquad 0<t<T, \tag{7}$$

其中 $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是某个布朗运动.

可以断定, 例如, 借助于 Itô 公式 (参见以后的 §3d), 过程 $X=(X_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 作为方程 (2) 的解可表示为

$$X_t=\alpha\left(1-\frac{t}{T}\right)+\beta\frac{t}{T}+(T-t)\int_0^t\frac{dB_s}{T-s}, \tag{8}$$

其中积分理解为按布朗运动的随机积分. 由于这个方程有唯一解 (参见 §3e), 故在时刻 $t=0$ 从点 α 出发、在时刻 $t=T$ 落在点 β 的布朗桥可用公式 (8) 来定义.

对于标准布朗运动来说, 它的自协方差函数 $\rho(s,t)=\min(s,t)$. 对于所考察的布朗桥来说, 对应的自协方差函数 $\rho(s,t)=\min(s,t)-\dfrac{st}{T}$. 均值 $\mathsf{E}X_t=\alpha\left(1-\dfrac{t}{T}\right)+\beta\dfrac{t}{T}$.

不难验证, 对于每个标准布朗运动 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$, 由公式

$$W_t^0=W_t-\frac{t}{T}W_t \tag{9}$$

定义的过程 $W^0=(W_t^0)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 有协方差函数 $\rho(s,t)$ 等于 $\min(s,t)-\dfrac{st}{T}$. 由此得到, 除了用公式 (8) 定义的过程 $X=(X_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 以外, 过程 $Y=(Y_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$,

$$Y_t=\alpha\left(1-\frac{t}{T}\right)+\beta\frac{t}{T}+W_t^0, \tag{10}$$

有同样的有限维分布 $(\mathrm{Law}(Y_t,t\leqslant T)=\mathrm{Law}(X_t,t\leqslant T))$, 从而可看作布朗桥的一个版本.

Ornstein-Uhlenbeck 过程 ([466]; 1930 年) 是下列 (线性) 随机微分方程的解:

$$dX_t=-\alpha X_t dt+\sigma dB_t,\qquad \alpha>0. \tag{11}$$

再次运用 Itô 公式, 可以断定, 过程 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$,

$$X_t=X_0e^{-\alpha t}+\sigma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dB_s \tag{12}$$

是方程 (11) 的解 (并且是唯一解; 参见 §3e).

如果初值 X_0 不依赖于布朗运动 $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$, 并且具有有限二阶矩, 那么

$$\mathsf{E}X_t=e^{-\alpha t}\mathsf{E}X_0, \tag{13}$$

$$\mathsf{D}X_t=\frac{\sigma^2}{2\alpha}+\left(\mathsf{D}X_0-\frac{\sigma^2}{2\alpha}\right)e^{2-\alpha t}, \tag{14}$$

$$\mathsf{Cov}(X_s,X_t)=\left[\mathsf{D}X_0+\frac{\sigma^2}{2\alpha}(e^{2\alpha\min(s,t)}-1)\right]e^{-\alpha(s+t)}. \tag{15}$$

在 X_0 为有 $\mathsf{E}X_0 = 0$ 和 $\mathsf{D}X_0 = \sigma^2/(2\alpha)$ 的正态 (高斯) 分布的情形下, 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 将为有零均值和协方差函数

$$\rho(s,t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha|t-s|} \tag{16}$$

的平稳高斯过程.

联系 Ornstein-Uhlenbeck 方程 (11), 有益的是要注意到, 它是*Langevin* (郎之万) *方程* ([295]; 1908 年)

$$m\frac{dV_t}{dt} = -\beta V_t + \sigma \frac{dB_t}{dt} \tag{17}$$

的修正形式; 这种方程描述处于具有摩擦力 $(-\beta V_t)$ 的液体中的质量为 m 的质点, 在用布朗运动描述的分子撞击相互作用下, 运动速度 V_t 的性态.

在 (17) 的形式中, 方程一般来说没有通常导数概念所理解的含义, 因为对于布朗运动 (的几乎所有实现) 来说, 导数 dB_t/dt 不存在 (参见后面的 §3b 中的第 7 点).

然而, 如果把方程理解为 Ornstein-Uhlenbeck 方程

$$dV_t = -\frac{\beta}{m} V_t dt + \frac{\sigma}{m} dB_t, \tag{18}$$

而它的当 $V_0 = 0$ 时的解根据 (12) 可用公式

$$V_t = \frac{\sigma}{m} \int_0^t e^{\frac{\beta}{m}(t-s)} dB_s \tag{19}$$

来给定, 那么这个方程就可以有精确的含义.

阶 $\alpha > 1$ 的 Bessel 过程, 按照定义, 是服从 (非线性) 随机微分方程

$$dX_t = \frac{\alpha - 1}{2} \frac{dt}{X_t} + dB_t \tag{20}$$

的过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, 其中方程的初值 $X_0 = x \geqslant 0$, $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 是布朗运动. (这个方程有唯一的强解; 参见后面的 §3c.)

在 $\alpha = d$ $(d = 2, 3, \cdots,)$ 的情形下, 过程 X 可实现为 d-维布朗运动 $B^{(x)} = (x_1 + B_t^1, \cdots, x_d + B_t^d)_{t\geqslant 0}$ $(x_1^2 + \cdots + x_d^2 = x^2)$ 的根部 $R = (R_t)_{t\geqslant 0}$:

$$R_t = \sqrt{(x_1 + B_t^1)^2 + \cdots + (x_d + B_t^d)^2}, \tag{21}$$

其中 $B^i = (B_t^i)_{t\geqslant 0}$ 是相互独立的标准布朗运动.

还有一系列服从随机微分方程的其他别的有意义的过程将在第 4 节中联系构造描述债券的市场价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 的动态变化的模型来引入 (参见第一章 §1b).

§3b. 布朗运动: 经典结果通报

1. 作为随机游走的极限的布朗运动. 各种来源证实 (参见例如, [201; 第 254 页], [266; 第 47 页]), 1827 年左右, 博物学家 Robert Brown (布朗) 发现, 浸没在液体中的花粉粒子总在胡乱运动. (他在 1828 年发表的小册子《显微镜观察简记 (A Brief Account of Microscopical Observation...)》中描述了这样的现象.)①

这种运动被赋以名称*布朗运动*, 正如后来变得很清楚, 这种运动是液体中的分子撞击浸没在其中的粒子所引起的. 1905 年 A. Einstein [132] 为这种运动建立了*物理–数学模型*. 然而, 为了公正起见, 应该强调, 就实质而言, 这样的模型早在 1900 年就已经由 L. Bachelier [12] 在联系巴黎证券市场上的股价和其他金融指数的运动时建立起来.

在第一章 (§1b) 中已经注意到, 对于 L. Bachelier 来说, 布朗运动实质上是作为最简单的随机游走的 (形式) 极限而生成的.

也就是说, 设 $(\xi_k)_{k\geqslant 1}$ 是独立同分布随机变量序列, 它们都以概率 $\frac{1}{2}$ 取两个值 ± 1 ("Bernoulli 模式"). 取半直线 $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, 并对每个 $\Delta > 0$ 形成过程 $S^{(\Delta)} = (S_t^{(\Delta)})_{t\geqslant 0}$, 它有*按段常数的*轨线

$$S_t^{(\Delta)} = x + \sum_{k=1}^{[t/\Delta]} \sqrt{\Delta}\xi_k. \tag{1}$$

令

$$\overline{S}_t^{(\Delta)} = S_{k\Delta}^{(\Delta)} + \frac{1}{\Delta}(t-k\Delta)\left(S_{(k+1)\Delta}^{(\Delta)} - S_{k\Delta}^{(\Delta)}\right). \tag{2}$$

它是由过程 $S^{(\Delta)}$ 所形成的有连续轨线的随机过程 $\overline{S}^{(\Delta)} = (\overline{S}_t^{(\Delta)})_{t\geqslant 0}$.

由多维中心极限定理 (参见例如, [51; 第 8 章], [439; 第 VII 章, §8]) 可以断定, 对于任何 $t_1,\cdots,t_k$, $k\geqslant 1$, 有限维分布 $\mathrm{Law}(S_{t_1}^{(\Delta)},\cdots,S_{t_k}^{(\Delta)})$ 和 $\mathrm{Law}(\overline{S}_{t_1}^{(\Delta)},\cdots,\overline{S}_{t_k}^{(\Delta)})$ (弱) 收敛于有限维分布 $\mathrm{Law}(B_{t_1},\cdots,B_{t_k})$, 其中 $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是标准布朗运动.

其实还可得到更强的断言:

$$\mathrm{Law}\left(S_t^{(\Delta)}, t\geqslant 0\right) \to \mathrm{Law}(B_t, t\geqslant 0)$$

和

$$\mathrm{Law}\left(\overline{S}_t^{(\Delta)}, t\geqslant 0\right) \to \mathrm{Law}(B_t, t\geqslant 0)$$

在空间 D (有左极限的右连续函数全体) 和 C (连续函数全体) 中分布律的弱收敛意义下成立; 详情参见例如, [39], [250].

2. 作为 Markov 过程的布朗运动. 我们将认为给定概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{P})$. 设 $B=(B_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ 是在这个空间上给定的布朗运动.

①括号中的内容是英文版加入的. —— 译者注

记 $\mathscr{F}_t^0 = \sigma(B_s, s \leqslant t)$ 是由 B_s $(s \leqslant t)$ 的值所生成的事件 σ-代数, 并令

$$\mathscr{F}_t^+ = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s^0 \tag{3}$$

是不仅在区间 $[0,t]$, 并且也在时刻 t 的 "无限小未来" 所观察到的事件 σ-代数.

注意, 不同于 $(\mathscr{F}_t^0)_{t\geqslant 0}$, 族 $(\mathscr{F}_t^+)_{t\geqslant 0}$ 具有重要的右连续性:

$$\bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s^+ = \mathscr{F}_t^+. \tag{4}$$

其实, 在 σ-代数 $\mathscr{F}_t^0$ 和 $\mathscr{F}_t^+$ 之间在下列意义下没有本质区别. 设 $\mathscr{N} = \{A \in \mathscr{F} \colon \mathsf{P}(A) = 0\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中有零概率的事件全体. 于是由事件 $\mathscr{F}_t^+$ 和 $\mathscr{N}$ 所生成的 σ-代数 $\sigma(\mathscr{F}_t^+ \cup \mathscr{N})$ 重合于由事件 $\mathscr{F}_t^0$ 和 $\mathscr{N}$ 所生成的 σ-代数 $\sigma(\mathscr{F}_t^0 \cup \mathscr{N})$:

$$\sigma(\mathscr{F}_t^+ \cup \mathscr{N}) = \sigma(\mathscr{F}_t^0 \cup \mathscr{N}). \tag{5}$$

这就为引进新的 σ-代数族 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, $\mathscr{F}_t = \sigma(\mathscr{F}_t^0 \cup \mathscr{N}) \equiv \sigma(\mathscr{F}_t^+ \cup \mathscr{N})$, 提供了理由, 它显然具有这样的性质: 每个 σ-代数 $\mathscr{F}_t$ 都以零概率集合来完备化, 同时都有右连续性: $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$. (关于相应的随机基底 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$, 我们说, 它满足常设条件; 参见以后的第 3 点.)

设 $T > 0$, $\widetilde{B}(T) = (\widetilde{B}_t(T;\omega))_{t\geqslant 0}$ 是由布朗运动 $B = (B_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ 按照下列公式得到的过程:

$$\widetilde{B}_t(T;\omega) = B_{t+T}(\omega) - B_T(\omega).$$

在 §3a 的第 2 点中, 已经注意到, 1) 过程 $\widetilde{B}(T)$ 也是*布朗运动*, 并且不难指出, 2) σ-代数 $\mathscr{F}_T^0 = \sigma(B_s, s \leqslant T)$ 和 $\widetilde{\mathscr{F}}_\infty^0(T) = \sigma(\widetilde{B}_s(T), s \geqslant 0)$ 是*相互独立的*. (照例, 先逐次运用 "单调" 类方法建立对应柱状集的代数中的事件的独立性; 参见例如, [439; 第 II 章, §2].)

正是这两个事实经常被称为布朗运动的*Markov 性质* (参见比如, [288; 第 II 章]), 由此然后引出另外的形式, 例如, 下列传统的在固定 "当前" 时, "未来" 与 "过去" 的 Markov 独立性质: *如果 $f = f(x)$ 是有界Borel 函数, $\sigma(B_T)$ 是由过程 B_T 生成的 σ-代数, 那么对于每个 $t > 0$ (P-a.s.)*

$$\mathsf{E}(f(B_{T+t}) \mid \mathscr{F}_T^0) = \mathsf{E}(f(B_{T+t}) \mid \sigma(B_T)). \tag{6}$$

这个 Markov 性质的解析形式有各种推广. 例如, 取代 $\mathscr{F}_T^0$ 可考察 σ-代数 $\mathscr{F}_T$, 而取代 $f(B_{T+t})$ 可考察 "轨线 $f(B_{T+t}, t \geqslant 0)$ 的有界泛函". 详情参见例如, [123], [126].

下列引入*严格Markov* 性质的推广有关对上述 Markov 性质扩充为把 (确定) 时刻 T 取代为随机 Markov 时刻 $\tau = \tau(\omega)$.

出于这一目的, 假定 $\tau = \tau(\omega)$ 是有限 Markov 时刻 (关于流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$).

类似于过程 $\widetilde{B}(T)$, 我们引入过程 $\widetilde{B}(\tau) = (\widetilde{B}_t(\tau(\omega);\omega))_{t\geqslant 0}$, 令

$$\widetilde{B}_t(\tau(\omega);\omega) = B_{t+\tau(\omega)}(\omega) - B_{\tau(\omega)}(\omega). \tag{7}$$

根据严格 Markov 性质的最简单的版本, 过程 $\widetilde{B}(\tau)$ 也是布朗运动, 并且 σ-代数 $\mathscr{F}_\tau$ (参见第二章 §1f 的定义 2) 和 $\widetilde{\mathscr{F}}^0_\infty(\tau) \equiv \sigma(\widetilde{\mathscr{F}}^0_\infty(\tau) \cup \mathscr{N})$ 独立; 参见例如, [123], [126], [288].

解析性质 (6) 允许有下列完全自然的推广:

$$\mathsf{E}(f(B_{\tau(\omega)+t}(\omega)) \,|\, \mathscr{F}_\tau) = \mathsf{E}(f(B_{\tau(\omega)+t}(\omega)) \,|\, \sigma(B_\tau)) \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}). \tag{8}$$

(关于这一性质的 "泛函" 推广, 参见例如上面提到的书 [123], [126], [288].)

3. 布朗运动和平方可积鞅. 直接由布朗运动 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 的定义得到下列性质满足: 对于 $t \geqslant 0$,

$$B_t \text{ 为 } \mathscr{F}_t\text{-可测}, \tag{9}$$

$$\mathsf{E}|B_t| < \infty, \tag{10}$$

$$\mathsf{E}(B_t \,|\, \mathscr{F}_s) = B_s \text{ 对于 } s \leqslant t \ (\mathsf{P}\text{-a.s.}) \text{ 成立}. \tag{11}$$

这三个性质恰好就是过程 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 关于 σ-代数流 $(\mathscr{F}_t)$ 和概率测度 P 为鞅的定义. (比较第二章 §1c 中的定义 2.)

又, 由于

$$\mathsf{E}(B_t^2 - B_s^2 \,|\, \mathscr{F}_s) = t - s, \tag{12}$$

故过程 $(B_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ 也是鞅.

现在假定 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 是某个满足性质 (9)–(12) 的过程. 尤其引人注目的是, 在实质上, 这些性质唯一确定了这一过程的概率结构.

也就是说, 我们将假定 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 是某个有 σ-代数 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的渗透概率空间, 并满足常设条件 [250; 第 I 章, §1]: 右连续和按测度 P 完备. (注意, 这里的 $\mathscr{F}_t$ 是 σ-代数, 它完全没有必要重合于前面引入的 σ-代数 $\sigma(\mathscr{F}_t^+ \cup \mathscr{N})$.)

每个满足性质 (9)–(11) 的过程 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 称为鞅. 为了强调关于流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的可测性和测度 P, 对于 B 经常也运用记号 $B = (B_t, \mathscr{F}_t)$ 或 $B = (B_t, \mathscr{F}_t, \mathsf{P})$. (比较第二章 §1c 中对于离散时间情形的定义.)

定理 (Lévy, [298]). *设 $B = (B_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是给定在某个渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上的连续平方可积鞅. 设性质 (12) 满足, 即 $(B_t^2 - t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 也是鞅.*

那么 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 是标准布朗运动.

证明参见后面的 §5c.

4. Wald 恒等式. 对于一致可积鞅的收敛和停时定理. 对于布朗运动,

$$\mathsf{E}B_t = 0, \qquad \mathsf{E}B_t^2 = t.$$

在许多随机分析问题中, 有必要对 (关于流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的) Markov 时刻 τ 求出 $\mathsf{E}B_\tau$ 和 $\mathsf{E}B_\tau^2$.

下列关系式是 *Wald* 恒等式对于 $B = (B_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的推广版本:

$$\mathsf{E}\sqrt{\tau} < \infty \Longrightarrow \mathsf{E}B_\tau = 0,$$
$$\mathsf{E}\tau < \infty \Longrightarrow \mathsf{E}B_\tau^2 = \mathsf{E}\tau.$$

在 τ 是有界 Markov 时刻 ($\mathsf{P}(\tau \leqslant c) = 1$ 对于某个常数 $c > 0$ 成立) 的特殊情形下, 等式 $\mathsf{E}B_\tau = 0$ 和 $\mathsf{E}B_\tau^2 = \mathsf{E}\tau$ 直接由下列结果得出.

定理 (J. L. Doob, [109]). 设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是一致可积鞅 (即, 当 $N \to \infty$ 时, $\sup_t \mathsf{E}(|X_t| I(|X_t| > N)) \to 0$). 那么

1) 存在这样的可积随机变量 X_∞, 当 $t \to \infty$ 时,

$$X_t \to X_\infty \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}),$$
$$\mathsf{E}|X_t - X_\infty| \to 0,$$

并且对于每个 $t \geqslant 0$,

$$\mathsf{E}(X_\infty \,|\, \mathscr{F}_t) = X_t \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.});$$

2) 对于任何 Markov 时刻 σ 和 τ,

$$X_{\tau\wedge\sigma} = \mathsf{E}(X_\sigma \,|\, \mathscr{F}_\tau) \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}),$$

其中 $\tau \wedge \sigma = \min(\tau, \sigma)$.

(比较第四章 §3a 中的对于离散时间情形下的关于收敛和停时的 Doob 定理.)

5. 随机指数. 在第二章 §1a 中曾给出对于 $\widehat{H} = (\widehat{H}_t)_{t\geqslant 0}$ 的随机指数 $\mathscr{E}(\widehat{H})_t$ 的定义; 这是一个半鞅.

应用于 $\widehat{H}_t = \lambda B_t$ 的情形, 随机指数 $\mathscr{E}(\lambda B)_t$ 由下列等式来定义:

$$\mathscr{E}(\lambda B)_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}. \tag{13}$$

由 Itô 公式 (§3d) 直接得到, $X_t = \mathscr{E}(\lambda B)_t$ 满足随机微分方程

$$dX_t = \lambda X_t dB_t, \tag{14}$$

其中初值条件为 $X_0 = 1$.

如果 ξ 有分布 $\mathscr{N}(0,1)$, 那么

$$\mathsf{E}e^{\lambda\xi-\frac{\lambda^2}{2}}=1.$$

由这个性质和布朗运动的自相似性 ($\mathrm{Law}(\lambda B_t)=\mathrm{Law}(\lambda\sqrt{t}B_1)$) 导出

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\exp\left\{\lambda B_t-\frac{\lambda^2}{2}t\right\}&=\mathsf{E}\exp\left\{\lambda B_t-\frac{(\lambda\sqrt{t})^2}{2}\right\}\\&=\mathsf{E}\exp\left\{(\lambda\sqrt{t})B_1-\frac{(\lambda\sqrt{t})^2}{2}\right\}=1.\end{aligned}$$

类似方式可指出, 对于所有 $s\leqslant t$,

$$\mathsf{E}(\mathscr{E}(\lambda B)_t\,|\,\mathscr{F}_s)=\mathscr{E}(\lambda B)_s\quad(\mathsf{P}\text{-a.s.}).\tag{15}$$

换句话说, 随机指数 $\mathscr{E}(\lambda B)=(\mathscr{E}(\lambda B)_t)_{t\geqslant 0}$ 是鞅.

6. 布朗运动的构造. 设 $\varepsilon=(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ 是高斯白噪声, 即独立正态分布 ($\mathscr{N}(0,1)$) 随机变量序列. 我们将以 $H_k=H_k(t)$, $k\geqslant 0$, 表示定义在时间区间 [0,1] 上的*Haar 函数* (参见例如, [439; 第 II 章, §11]), 并设

$$S_k(t)=\int_0^t H_k(s)ds$$

是*Schauder 函数*.

令

$$B_t^{(n)}=\sum_{k=0}^n\varepsilon_k S_k(t).$$

由 P. Lévy [298] 和 Z. Ciesielski [76] 的结果得到, 随机函数 $(B_t^{(n)})_{0\leqslant t\leqslant 1}$ (P-a.s.) (按 t) 一致收敛, 而其连续极限是标准布朗运动.

布朗运动更早的构造是 1934 年 R. Paley 和 N. Wiener [374] 以 (一致收敛的) 级数的形式表示来给出的:

$$B_t\equiv\varepsilon_0 t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\sqrt{2}\,\varepsilon_k\frac{\sin k\pi t}{k\pi}\right).$$

7. 轨线的局部性质. 下列结果众所周知, 它们的证明包含在许多专著和教科书中 (参见例如, [124], [245], [266], [470]).

布朗轨线以概率 1

a) 对于任何 $\gamma<\frac{1}{2}$ 满足 Hölder 条件

$$|B_t-B_s|\leqslant c|t-s|^{\gamma};$$

b) 不满足 Lipschitz 条件, 因而在每个点 $t>0$ 上不可微;

c) 在任何区间 (a,b) 上有无界变差: $\int_{(a,b)}|dB_s|=\infty$.

8. 布朗运动轨线的零. 设 $(B_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ 是布朗运动的某条对应基本结局 $\omega\in\Omega$ 的轨线, 以及

$$\mathfrak{N}(\omega)=\{0\leqslant t<\infty\colon B_t(\omega)=0\}$$

是其零集.

下列性质成立 ([124], [245], [266], [470]): P-a.s.

a) Lebesgue 测度 $\lambda(\mathfrak{N}(\omega))=0$;

b) 点 $t=0$ 是零的聚点;

c) 在 $(0,\infty)$ 上没有孤立零, 因而, 集合 $\mathfrak{N}(\omega)$ 在其中稠密;

d) 集合 $\mathfrak{N}(\omega)$ 闭而无界.

9. 零点上的性态. *局部迭代对数定律断言*, (P-a.s.)

$$\varlimsup_{t\downarrow 0}\frac{|B_t|}{\sqrt{2t\ln|\ln t|}}=1.$$

把这个性质应用于布朗运动 $(B_{t+h}-B_t)_{h\geqslant 0}$, 导出 ($\mathsf{P}$-a.s.) 对于任何 $t\geqslant 0$,

$$\varlimsup_{h\downarrow 0}\frac{|B_{t+h}-B_t|}{\sqrt{h}}=\infty,$$

由此特别得到, 正如上面已经注意到, 布朗轨线不满足 Lipschitz 条件.

10. 连续模是用来刻画函数、轨线等等的振荡的直观度量. 对于布朗运动轨线的连续模的 P. Lévy [298] 的著名结果断言, 以概率 1 有

$$\varlimsup_{h\downarrow 0}\frac{\max\limits_{0\leqslant s<t\leqslant 1,\,t-s\leqslant h}|B_t-B_s|}{\sqrt{2h\ln(1/h)}}=1.$$

11. $t\to\infty$ 时的性态. 以概率一有

$$\frac{B_t}{t}\to 0,\qquad t\to\infty$$

(*强大数定律*).

尤其是,

$$\frac{B_t}{\sqrt{t\ln t}}\to 0,\qquad t\to\infty\quad(\mathsf{P}\text{-a.s.}),$$

但

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{|B_t|}{\sqrt{t}}=\infty\quad(\mathsf{P}\text{-a.s.}).$$

当 $t \to \infty$ 时布朗运动轨线性态的精确特征由下列迭代对数定律来描述:

$$\overline{\lim_{t \downarrow \infty}} \frac{|B_t|}{\sqrt{2t \ln|\ln t|}} = 1 \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}). \tag{16}$$

12. 平方变差. 尽管布朗运动的轨线 (P-a.s.) 有无界变差, $\int_{(a,b)} |dB_s| = \infty$, 然而, 在一定的意义下, 可以断定, $\int_{(a,b)} |dB_s|^2 = b - a$.

相应的断言在随机分析的许多问题中都起着关键的作用 (例如, 在证明 Itô 公式时; §3d), 其陈述如下.

设 $T^{(n)} = (t_0^{(n)}, \cdots, t_{k_n}^{(n)})$ 是区间 $[a, b]$ 的分割, 且

$$a = t_0^{(n)} \leqslant \cdots \leqslant t_{k_n}^{(n)} = b.$$

设

$$\|T^{(n)}\| = \sup_{0 \leqslant k < k_n} |t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}|. \tag{17}$$

于是

a) 如果当 $n \to \infty$ 时, $\|T^{(n)}\| \to 0$, 那么

$$\sum_{k=0}^{k_n - 1} \left| B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}} \right|^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} b - a; \tag{18}$$

b) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^{(n)}\| < \infty$, 那么在 (18) 中的收敛性以概率 1 成立;

c) 如果 $B^{(1)}$ 和 $B^{(2)}$ 是两个独立的布朗运动, 且当 $n \to \infty$ 时, $\|T^{(n)}\| \to 0$, 那么

$$\sum_{k=0}^{k_n - 1} \left(B^{(1)}_{t_{k+1}^{(n)}} - B^{(1)}_{t_k^{(n)}} \right) \left(B^{(2)}_{t_{k+1}^{(n)}} - B^{(2)}_{t_k^{(n)}} \right) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{19}$$

作为一种记号形式, 断言 (18) 和 (19) 经常记为下列形式:

$$(dB_t)^2 = dt, \qquad dB_t^{(1)} dB_t^{(2)} = 0. \tag{20}$$

13. 水平的到达时刻. a) 设 $a > 0$, $T_a = \inf\{t \geqslant 0 \colon B_t = a\}$. 显然,

$$\mathsf{P}(T_a < t) = \mathsf{P}\left(\sup_{s \leqslant t} B_s > a \right), \tag{21}$$

并且借助于 D. André 反射原理, 我们求得

$$\mathsf{P}(T_a < t) = 2\mathsf{P}(B_t \geqslant a). \tag{22}$$

(参见例如, [124], [266], [439].)

由于

$$\mathsf{P}(B_t \geqslant a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}} dx, \tag{23}$$

故

$$\mathsf{P}(T_a < t) = \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{a^2}{2s}} ds, \tag{24}$$

因而, 密度 $p_a(t) = \dfrac{\partial \mathsf{P}(T_a < t)}{\partial t}$ 由下列公式确定:

$$p_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}. \tag{25}$$

由此顺便导出, $\mathsf{P}(T_a < \infty) = 1$, $\mathsf{E}T_a = \infty$ 以及 Laplace 变换

$$\mathsf{E}e^{-\lambda T_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}. \tag{26}$$

有益的是要注意到, 过程 $T = (T_a)_{a \geqslant 0}$ 是 (由于布朗运动的严格 Markov 性质) 有平稳独立增量的过程. 尤其是, 这个过程是有参数 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Law}(T_a) = \mathrm{Law}(a^2 T_1)$ 的稳定过程. 比较 §1c 中的第 4 点.

b) 设 $a > 0$ 和 $S_a = \inf\{t \geqslant 0\colon |B_t| = a\}$. 我们指出, $\mathsf{E}S_a = a^2$ 以及 Laplace 变换

$$\mathsf{E}e^{-\lambda S_a} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(a\sqrt{2\lambda})}. \tag{27}$$

由 Wald 恒等式, 对于每个 $t > 0$, $\mathsf{E}B_{S_a \wedge t} = \mathsf{E}(S_a \wedge t)$, 而这就是说, $\mathsf{E}(S_a \wedge t) \leqslant a^2$. 因此, 根据单调收敛定理, $\mathsf{E}S_a = \lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{E}(S_a \wedge t) \leqslant a^2$. (由此自然得到 $S_a < \infty$ 以概率 1 成立.) 然而, 既然 $\mathsf{E}S_a < \infty$, 故再次根据 Wald 恒等式, $\mathsf{E}B^2_{S_a} = \mathsf{E}S_a$. 考虑到等式 $B^2_{S_a} = a$, 由此求得 $\mathsf{E}S_a = a^2$.

为证明 (27), 我们考察鞅 $X^{(a)} = (X_{t\wedge S_a}, \mathscr{F}_t)$,

$$X_{t\wedge S_a} = \exp\left\{\lambda B_{t\wedge S_a} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge S_a)\right\}. \tag{28}$$

由于 $|B_{t\wedge S_a}| \leqslant a$, 这个鞅是一致可积的, 并且根据第 4 点的 Doob 定理,

$$\mathsf{E}X_{t\wedge S_a} = 1. \tag{29}$$

根据控制收敛定理, 在这个等式中可求得 $t \to \infty$ 时的极限, 并得到关系式

$$\mathsf{E}X_{S_a} = 1,$$

即

$$\mathsf{E}\exp\left\{\lambda B_{S_a} - \frac{\lambda^2}{2} S_a\right\} = 1. \tag{30}$$

由于 $\mathsf{P}(S_a < \infty) = 1$, 并且考虑到对称性, $\mathsf{P}(B_{S_a} = a) = \mathsf{P}(B_{S_a} = -a) = \frac{1}{2}$, 故由 (30) 得到所要求的等式 (27).

c) 设 $T_{a,b} = \inf\{t\colon B_t = a + bt\}$, $a > 0$. 如果 $b \leqslant 0$, 那么 $\mathsf{P}(T_{a,b} < \infty) = 1$, 且令 $\theta = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$, 由过程 $\left(e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t}\right)_{t\geqslant 0}$ 的鞅性得到 Laplace 变换

$$\mathsf{E}e^{-\lambda T_{a,b}} = \exp\left\{-a[b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}]\right\}. \tag{31}$$

由这个公式或者直接由 Wald 恒等式 $0 = \mathsf{E}B_{T_{a,b}}$ $(= a + b\mathsf{E}T_{a,b})$ 求得

$$\mathsf{E}T_{a,b} = -\frac{a}{b}.$$

(借助于公式 (27) 后面所叙述的方法, 可证 $\mathsf{E}T_{a,b} < \infty$.)

如果 $b > 0$, 那么考察鞅 $\left(e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t}\right)_{t\geqslant 0}$ $(\theta = 2b)$, 我们求得

$$\exp\left\{2bB_t - \frac{(2b)^2 t}{2}\right\} \leqslant \exp\left\{2b(a + bt) - \frac{(2b)^2}{2}t\right\} \leqslant e^{2ab},$$

而这就是说, 这个鞅是一致可积的. 因此,

$$\begin{aligned} 1 &= \mathsf{E}\exp\left\{\theta B_{T_{a,b}} - \frac{\theta^2}{2}T_{a,b}\right\} \\ &= \mathsf{E}\exp\left\{\theta B_{T_{a,b}} - \frac{\theta^2}{2}T_{a,b}\right\} I(T_{a,b} < \infty) = \mathsf{P}(T_{a,b} < \infty)e^{2ab}, \end{aligned}$$

从而, 在 $a > 0$, $b > 0$ (或者 $a < 0$, $b < 0$) 的情形下,

$$\mathsf{P}(T_{a,b} < \infty) = e^{-2ab}. \tag{32}$$

14. 最大值不等式. 设 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 是布朗运动. 于是对于 $\lambda > 0$, $p \geqslant 1$ 和有限 Markov 时刻 T,

$$\mathsf{P}\left(\max_{t\leqslant T}|B_t| \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}|B_T|^p}{\lambda^p}; \tag{33}$$

在 $p > 1$ 的情形下,

$$\mathsf{E}|B_T|^p \leqslant \mathsf{E}\max_{t\leqslant T}|B_t|^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{E}|B_T|^p. \tag{34}$$

特别是, 当 $p = 2$ 时,

$$\mathsf{P}\left(\max_{t\leqslant T}|B_t| \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{\mathsf{E}B_T^2}{\lambda^2}, \tag{35}$$

$$\mathsf{E}\max_{t\leqslant T}B_t^2 \leqslant 4\mathsf{E}B_T^2. \tag{36}$$

不等式 (33) 和 (35) 称为 "Kolmogorov-Doob 不等式", 而不等式 (34), (36) 称为 "Doob 不等式". 参见例如, [109], [110], [124], [303], [304], [402].

由 (36) 得到,

$$\mathsf{E}\max_{t\leqslant T}|B_t| \leqslant 2\sqrt{\mathsf{E}B_T^2}. \tag{37}$$

如果 $\mathsf{E}T < \infty$, 那么 $\mathsf{E}B_T^2 = \mathsf{E}T$, 因而,

$$\mathsf{E}\max_{t\leqslant T}|B_t| \leqslant 2\sqrt{\mathsf{E}T}. \tag{38}$$

正如 [116] 中所指出, 不等式 (38) 可细化: 其实,

$$\mathsf{E}\max_{t\leqslant T}|B_t| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\mathsf{E}T}, \tag{39}$$

这时, 常数 $\sqrt{2}$ 是最优的.

由 (39) 得到, 对于 $T=1$,

$$\mathsf{E}\max_{t\leqslant 1}|B_t| \leqslant \sqrt{2}. \tag{40}$$

当然, 有意义的是求出 $\mathsf{E}\max\limits_{t\leqslant 1}|B_t|$ 的精确值.

下列讨论指出,

$$\mathsf{E}\max_{t\leqslant 1}|B_t| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{41}$$

由布朗运动的自相似性 ($S_1 = \inf\{t \geqslant 0\colon |B_t| = 1\}$):

$$\begin{aligned}\left\{\sup_{t\leqslant 1}|B_t| \leqslant x\right\} &= \left\{\sup_{t\leqslant 1}\frac{1}{x}|B_t| \leqslant 1\right\} = \left\{\sup_{t\leqslant 1}|B_{t/x^2}| \leqslant 1\right\}\\ &= \left\{\sup_{t\leqslant 1/x^2}|B_t| \leqslant 1\right\} = \left\{S_1 \geqslant \frac{1}{x^2}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{S_1}} \leqslant x\right\}.\end{aligned}$$

这样, $\mathrm{Law}\left(\sup\limits_{t\leqslant 1}|B_t|\right) = \mathrm{Law}\left(\dfrac{1}{\sqrt{S_1}}\right)$.

又, 由于由正态积分的性质得到, 对于每个 $\sigma > 0$,

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx,$$

故取 $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{S_1}}$, 由 (27) 求得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\max_{t\leqslant 1}|B_t| &= \mathsf{E}\frac{1}{\sqrt{S_1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathsf{E}e^{-\frac{x^2 S_1}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{ch} x}\\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^\infty \frac{dy}{1+y^2}\\ &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{arctg} x\Big|_1^\infty = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},\end{aligned}$$

这就证明了所要求的公式 (41).

§3c. 关于布朗运动的随机积分

1. 在经典分析中有各种途径来通向 "积分运算", 它们一般来说导致不同的概念, 诸如 Riemann 积分、Lebesgue 积分、Riemann-Stieljes 积分、Lebesgue-Stieljes 积分、Denjoy 积分等等. (参见 A. N. Kolmogorov 在书 [277] 中的论文 "积分概念的研究".)

在随机分析中, 也考察各种途径来对随机函数关于随机过程、随机测度等等进行积分, 它们也导致 "随机积分" 的不同构造.

看来, N. Wiener (维纳) 是首先给出对于确定的光滑函数 $f = f(s)$ $(s \geqslant 0)$ 的随机积分

$$I_t(f) \equiv \int_{(0,t]} f(s)dB_s \tag{1}$$

的定义的, 他利用了 "分部积分法" 的观念. (参见 [375] 和 [476].)

正是从公式 $d(fB) = fdB + Bdf$ 的 "自然性" 出发, 按定义, 令

$$I_t(f) = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds, \tag{2}$$

其中积分 $\int_0^t f'(s)B_s ds$ 理解为按照轨线 (即, 对于每个 $\omega \in \Omega$) 对连续函数 $f'(s)B_s(\omega)$ $(s \geqslant 0)$ 作 Riemann 积分.

2. 1944 年, K. Itô (伊藤清) [244] 对 "随机积分" 概念的推广跨出了本质性的一步, 奠定了现代随机分析的基础, 从而成为随机过程研究的强有力的有效手段之一.

K. Itô 的构造如下.

设 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathrm{P})$ 是满足常设条件的渗透概率空间 (参见 §3b 中的第 2 点, 详情参见例如, [250]). 设 $B = (B_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是标准布朗运动, $f = (f(t,\omega))_{t\geqslant 0, \omega\in\Omega}$ 是按 (t,ω) 可测而非预见 (不依赖于 "未来") 的随机函数, 即对于每个 $t \geqslant 0$,

$$f(t,\omega) \text{ 为 } \mathscr{F}_t\text{-可测}.$$

这样的函数 $f = f(t,\omega)$ 也称为 (与 σ-代数族 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$) 协调的或者适应的①.

基本函数

$$f(t,\omega) = Y(\omega)I_{\{0\}}(t) \tag{3}$$

是这种函数的一个例子, 其中 $Y(\omega)$ 是 $\mathscr{F}_0$-可测随机变量.

函数 (也称为基本函数)

$$f(t,\omega) = Y(\omega)I_{(r,s]}(t) \tag{4}$$

①较通用的术语是 "适应的 (adapted)". 正如我们以前提到过, 本书作者似乎不太愿用 "适应的" 这一术语. 我们尊重作者的习惯. 但请读者注意, 本书中的 "随机序列" 就是 "适应序列"; "非预见函数" 或 "协调函数" 就是 "适应函数". —— 译者注

是另一个例子, 其中 $0 \leqslant r < s$, 而随机变量 $Y(\omega)$ 为 $\mathscr{F}_r$-可测.

对于型为 (3) 的 (关于时间) "坐" 在点 $t=0$ 上的函数, 随机积分

$$I_t(f) = \int_{(0,t]} f(s,\omega)dB_s$$

的 "自然定义的" 值为零. 对于型为 (4) 的 $I_t(f)$ 的 "自然" 值为值 $Y(\omega)[B_{s\wedge t} - B_{r\wedge t}]$.

如果有简单函数 $f = f(t,\omega)$ 定义为基本函数的线性组合

$$f(t,\omega) = Y_0(\omega)I_{\{0\}}(t) + \sum_i Y_i(\omega)I_{(r_i,s_i]}(t), \tag{5}$$

那么, 按照定义,

$$I_t(f) = \int_{(0,t]} f(s,\omega)dB_s = \sum_i Y_i(\omega)(B_{s_i\wedge t} - B_{r_i\wedge t}). \tag{6}$$

注 1. 我们强调, 在定义这样的基本函数的积分时, 完全没有必要假定 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 是布朗运动. 作为按照它导出积分的过程可以对任何过程来进行. 然而, 如果力求所定义的有简单性质的 "随机积分" 对于函数 $f = f(t,\omega)$ 的较广的总体有定义, 而不仅只对于基本函数及其线性组合 (简单函数) 有定义, 那么把它指定为现在所考察的布朗运动就变得十分本质.

以后我们规定把积分 (通常的或随机的) $\int_0^t \cdots$ 理解为按集合 $(0,t]$ 的积分 $\int_{(0,t]} \cdots$. 由于 $Y_i(\omega)$ 为 $\mathscr{F}_{r_i}$-可测, 故

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[Y_i(\omega)(B_{r_i\wedge t} - B_{s_i\wedge t})] &= \mathsf{E}\,\mathsf{E}[Y_i(\omega)(B_{r_i\wedge t} - B_{s_i\wedge t}) \mid \mathscr{F}_{r_i}] \\ &= \mathsf{E}[Y_i(\omega)\mathsf{E}((B_{r_i\wedge t} - B_{s_i\wedge t}) \mid \mathscr{F}_{r_i})] = 0\end{aligned}$$

以及类似地有

$$\mathsf{E}[Y_i(\omega)(B_{r_i\wedge t} - B_{s_i\wedge t})]^2 = \mathsf{E}Y_i^2(r_i\wedge t - s_i\wedge t).$$

由此得到, 如果 $f = f(t,\omega)$ 是简单函数, 那么

$$\mathsf{E}\int_0^t f(s,\omega)dB_s = 0 \tag{7}$$

以及

$$\mathsf{E}\left(\int_0^t f(s,\omega)dB_s\right)^2 = \mathsf{E}\int_0^t f^2(s,\omega)ds, \tag{8}$$

或者, 以更紧凑的形式记为:

$$\mathsf{E}I_t(f) = 0, \tag{7'}$$

$$\mathsf{E}I_t^2(f) = \mathsf{E}\int_0^t f^2(s,\omega)ds. \tag{8'}$$

3. 现在我们来描述其上可推广 "随机积分" 概念的 $f = f(t, \omega)$ 的函数类, 这里要求保持诸如 (7) 和 (8) 类型的 "自然" 性质.

我们将假定, 所有考察的函数 $f = f(t, \omega)$ 在 $\mathbb{R}_t \times \Omega$ 上给定, 并且非预见.

如果对于每个 $t > 0$,

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t f^2(s, \omega) ds < \infty\right) = 1, \tag{9}$$

那么我们将说, f 属于类 J_1.

同样, 如果对于所有 $t > 0$,

$$\mathsf{E}\int_0^t f^2(s, \omega) ds < \infty, \tag{10}$$

那么我们将说, f 属于类 J_2.

正是对于这两个函数类, K. Itô 在 [244] 中给出基于下列设想的随机积分 $I_t(f)$ 的 "自然" 定义.

由于布朗运动的轨线 (P-a.s.) 有无界变差 (参见 §3b 中的第 7 点), 故积分 $I_t(f) = \int_0^t f(s, \omega) dB_s$ 不能理解为按轨线的 Lebesgue-Stieljes 积分. K. Itô 的思路在于把这种积分定义为逼近原来的函数 f 的简单函数 f_n $(n \geqslant 1)$ 的积分 $I_t(f_n)$ 的 (在适当的概率意义下的) 极限.

原来 (参见 [244], 而详情参见例如, [303; 第 4 章]), 如果 $f \in J_2$, 那么可求得简单函数序列 $f_n = f_n(t, \omega)$, 使得对于每个 $t \geqslant 0$,

$$\mathsf{E}\int_0^t [f(s, \omega) - f_n(s, \omega)]^2 ds \to 0. \tag{11}$$

从而, 如果 $f \in J_2$, 那么当 $m, n \to \infty$ 时,

$$\mathsf{E}\int_0^t [f_n(s, \omega) - f_m(s, \omega)]^2 ds \to 0. \tag{12}$$

由 (8), 下列等距性质满足:

$$\mathsf{E}[I_t(f_n) - I_t(f_m)]^2 = \mathsf{E}\int_0^t [f_n(s, \omega) - f_m(s, \omega)]^2 ds, \tag{13}$$

它与 (12) 一起指出, 随机变量序列 $\{I_t(f_n)\}_{n \geqslant 1}$ 是均方收敛意义下 (即在 L^2 中) 的基本列.

由此和 L^2 中的 Cauchy 收敛判别准则 (参见例如, [439; 第 II 章, §10]) 得出, 存在 L^2 中的随机变量, 记作 $I_t(f)$, 使得

$$I_t(f) = \text{l.i.m.}\, I_t(f_n),$$

即,

$$\mathsf{E}[I_t(f) - I_t(f_n)]^2 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

对于这样得到的极限 $I_t(f)$, 容易指出, 它不依赖于逼近序列 $(f_n)_{n\geqslant 1}$ 的选择; 对它也运用记号 $\int_0^t f(s,\omega)dB_s$, 并称它为 (非预见) 函数 $f = f(s,\omega)$ 关于布朗运动 $B = (B_s)_{s\geqslant 0}$ 在时间区间 $(0,t]$ 上的随机积分.

我们叙述这样定义的对于 $f \in J_2$ 的积分 $I_t(f)$ $(t > 0)$ 的性质, 其详情例如可在 [123], [250], [288], [303] 中找到.

(a) 如果 $f, g \in J_2$, 那么对于常数 a 和 b,

$$I_t(af + bg) = aI_t(f) + bI_t(g).$$

(b) 可以以协调的方式选择这样的随机变量的样本 $I_t(f), t > 0$, 使得有 $I_0(f) = 0$ 的过程 $I(f) = (I_t(f))_{t\geqslant 0}$ 将是连续随机过程 (以后总是考察这样的修正); 这时,

$$I_s(f) = I_t(fI_{(0,s]}), \qquad s \leqslant t. \tag{14}$$

(c) 如果 $\tau = \tau(\omega)$ 是满足 $\tau(\omega) \leqslant T$ 的 Markov 时刻, 那么

$$I_\tau(f) = I_T(fI_{(0,\tau]}), \tag{15}$$

其中按照定义, $I_\tau(f) = I_{\tau(\omega)}(f)$.

(d) 过程 $I(f) = (I_t(f))_{t\geqslant 0}$ 是平方可积鞅, 即

$$I_t(f) \text{ 为 } \mathscr{F}_t\text{-可测}, \quad t > 0;$$
$$\mathsf{E}I_t^2(f) < \infty, \quad t > 0;$$
$$\mathsf{E}(I_t(f) \,|\, \mathscr{F}_s) = I_s(f).$$

这时, 如果 $f, g \in J_2$, 那么

$$\mathsf{E}I_t(f)I_t(g) = \mathsf{E}\int_0^t f(s,\omega)g(s,\omega)ds. \tag{16}$$

注 2. 类似于我们在离散时间情形下所使用的记号 (参见第二章 §1c 中的定义 7), 对于 $I_t(f)$ 也经常使用记号 $(f \cdot B)_t$, 比较 [250; 第 I 章, §4d].

现在我们转向对于 J_1 类的函数的随机积分 $I_t(f)$ 的定义, 其细节可在 [303; 第 4 章, §4] 中找到.

设 $f \in J_1$, 即 $\mathsf{P}\left(\int_0^t f^2(s,\omega)ds < \infty\right) = 1,\ t > 0$. 于是存在函数列 $f^{(m)} \in J_2$, $m \geqslant 1$, 使得对于每个 $t > 0$,

$$\int_0^t [f(s,\omega) - f^{(m)}(s,\omega)]^2 ds \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$$

(记号 "$\xrightarrow{\mathsf{P}}$" 意味着按概率收敛).

由于对于 $\varepsilon > 0, \delta > 0$,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{|I_t(f^{(m)})-I_t(f^{(n)})| > \delta\}\\ \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta^2} + \mathsf{P}\left(\int_0^t [f^{(m)}(s,\omega) - f^{(n)}(s,\omega)]^2 ds > \varepsilon\right),\end{aligned}$$

故, 先令 $m, n \to \infty$, 然后再令 $\varepsilon \downarrow 0$, 我们求得, 对于每个 $\delta > 0$,

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathsf{P}\{|I_t(f^{(m)}) - I_t(f^{(n)})| > \delta\} = 0.$$

从而, 序列 $I_t(f^{(m)})$, $m \geqslant 1$, 是按概率的基本列, 而根据按概率收敛的 Cauchy 判别准则 [439; 第 II 章, §10], 这就是说, 存在随机变量, 记为 $I_t(f)$, 使得

$$I_t(f^{(m)}) \xrightarrow{\mathsf{P}} I_t(f), \qquad m \to \infty.$$

量 $I_t(f)$ 也表示为 $(f\cdot B)_t$, $\int_{(0,t]} f(s,\omega)dB_s$ 或者 $\int_0^t f(s,\omega)dB_s$, 它称为函数 f 在区间 $(0, t]$ 上的随机积分.

我们注意到对于函数 $f \in J_1$ 的随机积分 $I_t(f)$ $(t > 0)$ 的一系列性质.

可以指出, 再次可以以协调的方式对不同的 $t > 0$ 定义随机积分 $I_t(f)$, 使得 $I(f) = (I_t(f))_{t\geqslant 0}$ 将有 (P-a.s.) 连续轨线.

上面对于函数 $f \in J_2$ 所注意到的性质 (a), (b), (c) 也对于 J_1 类的函数 f 成立. 然而, 性质 (d) 一般来说已经不成立, 这里把它改变如下:

(d′) 对于 $f \in J_1$, 过程 $I(f) = (I_t(f))_{t\geqslant 0}$ 是*局部鞅*, 即, 存在停时序列 $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$, 使得 $\tau_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$, 并且对于每个 $n \geqslant 1$, "停止" 过程

$$I^{\tau_n}(f) = (I_{t\wedge\tau_n}(f))_{t\geqslant 0}$$

是鞅. (比较第 II 章 §1c 中的定义 4.)

4. 设 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 是给定在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ 上的布朗运动, $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是这个过程所生成的 σ-代数族 (参见 § 3b 中的第 2 点; 为了直观, 我们将也把 $\mathscr{F}_t$ 表示为 $\mathscr{F}_t^B$, $t \geqslant 0$).

下列基于随机积分概念的定理描述了*布朗泛函*的结构.

定理 1. *设 $X = X(\omega)$ 是 $\mathscr{F}_T$-可测随机变量.*

1. 如果 $\mathsf{E}X^2 < \infty$, 那么可求得随机过程 $f = (f_t(\omega), \mathscr{F}_t^B)_{t\leqslant T}$ 使得

$$\mathsf{E}\int_0^T f_t^2(\omega)dt < \infty \tag{17}$$

以及 (P-a.s.)

$$X = \mathsf{E}X + \int_0^T f_t(\omega)dB_t. \tag{18}$$

2. 如果 $\mathsf{E}|X| < \infty$, 那么表示式 (18) 对某个过程 $f = (f_t(\omega), \mathscr{F}_t^B)_{t \leqslant T}$ 成立, 使得

$$\mathsf{P}\left(\int_0^T f_t^2(\omega)dt < \infty\right) = 1. \tag{19}$$

3. 设 $X = X(\omega)$ 是正随机变量序列 ($\mathsf{P}(X > 0) = 1$), 并且 $\mathsf{E}X < \infty$. 那么可求得有 $\mathsf{P}\left(\int_0^T \varphi_t^2(\omega)dt < \infty\right) = 1$ 的过程 $\varphi = (\varphi_t(\omega), \mathscr{F}_t^B)_{t \leqslant T}$, 使得 (P-a.s.)

$$X = \mathsf{E}X \cdot \exp\left\{\int_0^T \varphi_t(\omega)dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T \varphi_t^2(\omega)dt\right\}. \tag{20}$$

由这条定理导出下列关于布朗鞅结构的结果.

定理 2. 1. 设 $M = (M_t, \mathscr{F}_t^B)_{t \leqslant T}$ 是平方可积鞅. 那么可求得满足性质 (17) 的过程 $f = (f_t(\omega), \mathscr{F}_t^B)_{t \leqslant T}$, 使得

$$M_t = M_0 + \int_0^t f_s(\omega)dB_s. \tag{21}$$

2. 设 $M = (M_t, \mathscr{F}_t^B)_{t \leqslant T}$ 是局部鞅, 那么表示式 (21) 对某个服从条件 (19) 的过程 $f = (f_t(\omega), \mathscr{F}_t^B)_{t \leqslant T}$ 成立.

3. 设 $M = (M_t, \mathscr{F}_t^B)_{t \leqslant T}$ 是正局部鞅, 那么可求得有 $\mathsf{P}\left(\int_0^T \varphi_t^2(\omega)dt < \infty\right) = 1$ 的过程 $\varphi = (\varphi_t(\omega), \mathscr{F}_t^B)_{t \leqslant T}$, 使得

$$M_t = M_0 \exp\left\{\int_0^t \varphi_s(\omega)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2(\omega)ds\right\}.$$

这些定理的证明基本上属于 J. M. C. Clark, [77], 其各种变种由 K. Itô ([244]) 和 J. Doob ([109], [110]) 给出; 它们可在许多专著中找到. 参见例如, [266], [303], [402].

§3d. Itô 过程和 Itô 公式

1. 上面给出的随机积分概念对于定义下列重要的连续随机过程类起着关键作用.

我们将说, 给定在带流 $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 的满足常设条件 (参见 §3b 中的第 3 点) 的渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathsf{P})$ 上的随机过程 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$, 为*Itô* 过程, 是指存在两个非预见过程 $a = (a(t, \omega))_{t \geqslant 0}$ 和 $b = (b(t, \omega))_{t \geqslant 0}$, 满足下列条件:

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t |a(s, \omega)|ds < \infty\right) = 1, \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t b^2(s, \omega)ds < \infty\right) = 1, \qquad t > 0, \tag{2}$$

使得

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t b(s,\omega)dB_s, \tag{3}$$

其中 $B = (B_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是布朗运动, 而 X_0 为 $\mathscr{F}_0$-可测随机变量.

为了简明起见, (3) 的积分记法经常被取代为 (形式的) 微分记法:

$$dX_t = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dB_t, \tag{4}$$

这时, 我们说 Itô 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 有随机微分 (4).

2. 现在设 $F(t,x)$ 为给定在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上的 $C^{1,2}$ 类的连续函数, 即有连续导数 $\dfrac{\partial F}{\partial t}, \dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ 的函数, $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 是有微分 (4) 的过程.

正如 K. Itô 所确立的, 在这些假定下, 过程 $F = (F(t,X_t))_{t\geqslant 0}$ 也有随机微分:

$$dF(t,X_t) = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(t,\omega)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(t,\omega)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]dt + \frac{\partial F}{\partial x}b(t,\omega)dB_t. \tag{5}$$

说得更严格一些, 关于每个 $t > 0$, 对于 $F(t,X_t)$ 下列*Itô 公式* (*变量替换公式*) 成立:

$$F(t,X_t) = F(0,X_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial F}{\partial s} + a(s,\omega)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(s,\omega)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}b(s,\omega)dB_s. \tag{6}$$

(证明可在许多地方找到; 参见例如, [123], [250; 第 I 章, §4e], [303; 第 4 章, §3].)

3. 我们也引入公式 (6) 的多维推广.

我们将假定, $B = (B_1, \cdots, B^d)$ 是有独立 (一维) 布朗分量 $B^i = (B_t^i)_{t\geqslant 0}$ $(i = 1, \cdots, d)$ 的 d-维布朗运动.

我们说, 有 $X^i = (X_t^i)_{t\geqslant 0}$ 的过程 $X = (X^1, \cdots, X^d)$ 是*d-维 Itô 过程*, 是指可求得有非预见分量 $a^i = a^i(t,\omega)$ 的向量 $a = (a^1, \cdots, a^d)$ 和有非预见分量的 $b^{ij} = b^{ij}(t,\omega)$ 的 $d \times d$ 阶矩阵 $b = \|b^{ij}\|$, 对 $t > 0$ 满足条件

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t |a^i(s,\omega)|ds < \infty\right) = 1,$$

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t (b^{ij}(s,\omega))^2 ds < \infty\right) = 1,$$

使得对于 $i = 1, \cdots, d$, 有

$$dX_t^i = a^i(t,\omega)dt + \sum_{j=1}^d b^{ij}(t,\omega)dB_t^j, \tag{7}$$

或者以向量形式记为

$$dX_t = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dB_t,$$

其中向量 $a(t,\omega) = (a^1(t,\omega), \cdots, a^d(t,\omega))$, $B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^d)$ 都看作列向量.

现在设 $F(t,x_1,\cdots,x_d)$ 是有连续导数 $\dfrac{\partial F}{\partial t}, \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ 和 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i x_j}$ $(i,j=1,\cdots,d)$ 的连续函数.

于是下列Itô 公式的 d-维变体成立:

$$\begin{aligned}
F(t,X_t^1,\cdots,X_t^d) &= F(0,X_0^1,\cdots,X_0^d) \\
&+ \int_0^t \left[\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s^1,\cdots,X_s^d) + \sum_{I=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(s,X_s^1,\cdots,X_s^d)a^i(s,\omega)\right. \\
&+ \left.\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(s,X_s^1,\cdots,X_s^d)\sum_{k=1}^d b^{ik}(s,\omega)b^{jk}(s,\omega)\right)\right] ds \\
&+ \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(s,X_s^1,\cdots,X_s^d)b^{ij}(s,\omega)dB_s^j. \qquad (8)
\end{aligned}$$

对于连续过程 $X^i = (X_t^i)_{t\geqslant 0}$, 引入记号 $\langle X^i, X^j\rangle = (\langle X^i, X^j\rangle_t)_{t\geqslant 0}$, 并令

$$\langle X^i, X^j\rangle_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t b^{ik}(s,\omega)b^{jk}(s,\omega)ds.$$

于是公式 (8) 可记为下列紧凑形式:

$$\begin{aligned}
F(t,X_t) = F(0,X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s)ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(s,X_s)dX_s^i \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(s,X_s)d\langle X^i, X^j\rangle_s, \qquad (9)
\end{aligned}$$

利用微分它可记为下列形式 $(F = F(t,X_t))$:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}d\langle X^i, X^j\rangle_t. \qquad (10)$$

值得注意的是, 如果利用 Taylor 公式, 形式上记

$$dF = \frac{\partial F}{\partial s}dt + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}dX_t^i dX_t^j, \qquad (11)$$

那么当约定

$$(dB_t^i)^2 = dt, \tag{12}$$

$$dB_t^i dt = 0, \tag{13}$$

$$dB_t^i dB_t^j = 0, \quad i \neq j, \tag{14}$$

时, 由 (11) 就导出表示式 (10), 因为

$$dX_t^i dX_t^j = d\langle X^i, X^j\rangle_t. \tag{15}$$

注. 形式表达式 (15) 和 (14) 可赋以完全自然的含义; 这只要把它们理解为上一节 §3b 中的 (1) 和 (2) 的极限关系式的约定记法①. 类似地也可这样解释表达式 (13).

多维情形下的 Itô 公式的证明参见例如, 专著 [250; 第 I 章, §4e]. 关于这个公式对函数 $F \notin C^{1,2}$ 的推广, 参见例如, [166], [402].

4. 我们引入某些基于 Itô 公式应用的例子.

例 1. 设 $F(x) = x^2$ 和 $X_t = B_t$. 那么根据 (11), 形式上有

$$dB_t^2 = 2B_t dB_t + (dB_t)^2$$

以及考虑到 (12), 我们求得

$$dB_t^2 = 2B_t dB_t + dt, \tag{16}$$

或者写成积分形式:

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t. \tag{17}$$

例 2. 设 $F(x) = e^x$ 以及 $X_t = B_t$. 于是

$$d(e^{B_t}) = e^{B_t} dB_t + \frac{1}{2} e^{B_t} (dB_t)^2,$$

即, 考虑到 (11),

$$d(e^{B_t}) = e^{B_t}\left(dB_t + \frac{1}{2}dt\right). \tag{18}$$

设 $F(t,x) = e^{x - \frac{1}{2}t}$ 以及 $X_t = B_t$. 那么, 形式上,

$$dF(t, B_t) = -\frac{1}{2}F(t, B_t)dt + F(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2}F(t, B_t)(dB_t)^2.$$

---

①原版和英文版中, 这里的 "(1) 和 (2)" 都误为 "(2) 和 (3)". 尤其是英文版没有注意到 "(1) 和 (2)" 本身并不是 "极限关系式". 其实这里更好的说明是 §3b 中的 (18) 和 (19). —— 译者注

考虑到约定 (12), 我们看到

$$dF(t, B_t) = F(t, B_t)dB_t.$$

如果记

$$\mathscr{E}(B)_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t} \tag{19}$$

为随机指数 (参见第二章 §1a 中的公式 (13)), 那么我们看到, 它有随机微分

$$d\mathscr{E}(B)_t = \mathscr{E}(B)_t dB_t. \tag{20}$$

这个关系式可看作随机微分方程 (参见 §3a, 以及后面的 §3e), 其解由公式 (19) 给出.

例 3. 推广上一例子, 我们考察过程

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t b(s,\omega)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(s,\omega)ds\right\}, \tag{21}$$

其中 $b = (b(t,\omega))_{t\geqslant 0}$ 是非预见过程, 且

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t b^2(s,\omega)ds < \infty\right) = 1, \qquad t > 0.$$

如果令

$$X_t = \int_0^t b(s,\omega)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(s,\omega)ds$$

以及 $F(x) = e^x$, 那么, 应用 Itô 公式 (5), 我们求得, 所谓 "Girsanov 指数" 过程 $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ 有随机微分

$$dZ_t = Z_t b(t,\omega)dB_t. \tag{22}$$

例 4. 设 $X_t = B_t$ 以及 $Y_t = t$. 于是

$$d(B_t t) = t dB_t + B_t dt,$$

或者写成积分形式:

$$B_t t = \int_0^t s dB_s + \int_0^t B_s ds. \tag{23}$$

(比较在 §3c 的第 1 点中引入的随机积分 $\int_0^t s dB_s$ 的 N. 维纳的定义.)

例 5. 设 $F(x_1, x_2) = x_1 x_2$ 以及 $X^1 = (X_t^1)_{t\geqslant 0}$, $X^2 = (X_t^2)_{t\geqslant 0}$ 是两个有 Itô 微分的过程. 于是, 形式上有,

$$d(X_t^1 X_t^2) = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + dX_t^1 dX_t^2. \tag{24}$$

特别是, 如果

$$dX_t^i = a^i(t,\omega)dt + b^i(t,\omega)dB_t^i, \qquad i = 1, 2,$$

那么

$$d(X_t^1X_t^2)=X_t^1dX_t^2+X_t^2dX_t^1. \tag{25}$$

如果

$$dX_t^i=a^i(t,\omega)dt+b^i(t,\omega)dB_t,\qquad i=1,2,$$

那么

$$d(X_t^1X_t^2)=X_t^1dX_t^2+X_t^2dX_t^1+b^1(t,\omega)b^2(t,\omega)dt. \tag{26}$$

例 6. 设 $X=(X^1,\cdots,X^d)$ 是 d-维 Itô 过程, 其分量 X^i 有随机微分 (7). 设 $V=V(x)$ 是实二次连续可微函数 $x=(x_1,\cdots,x_d)$ 以及

$$(L_tV)(x,\omega)=\sum_{i=1}^d a^i(t,\omega)\frac{\partial V}{\partial x_i}+\sum_{i,j=1}^d\left(\sum_{k=1}^d b^{ik}(t,\omega)b^{jk}(t,\omega)\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}. \tag{27}$$

于是过程 $(V(X_t))_{t\geqslant0}$ 有随机微分 (用矩阵—向量记法):

$$dV(X_t)=(L_tV)(X_t,\omega)dt+\frac{\partial V}{\partial x}(X_t)b(t,\omega)dB_t, \tag{28}$$

其中

$$\frac{\partial V}{\partial x}(X_t)b(t,\omega)dB_t=\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial V}{\partial x_i}(X_t)b^{ij}(t,\omega)dB_t^j. \tag{29}$$

例 7. 设 $V=V(t,x)$ 是在 $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 上的有连续导数 $\frac{\partial V}{\partial t},\frac{\partial V}{\partial x_i},\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}$ 的实连续函数. 又设

$$\varphi_t=\int_0^t C(s,\omega)ds,$$

其中 $C=C(t,\omega)$ 是非预见函数, 且

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t|C(s,\omega)|ds<\omega\right)=1,\qquad t>0.$$

于是过程 $(e^{-\varphi_t}V(t,X_t))_{t\geqslant0}$ 是 Itô 过程, 且其随机微分

$$\begin{aligned}d\left(e^{-\varphi_t}V(t,X_t)\right)=e^{-\varphi_t}\left[\frac{\partial V}{\partial t}(t,X_t)+(L_tV)(X_t,\omega)-C(t,\omega)V(t,X_t)\right]dt\\+e^{-\varphi_t}\frac{\partial V}{\partial x}(t,X_t)b(t,\omega)dB_t.\end{aligned} \tag{30}$$

5①. **注 2.** 设 $X=(X_t)_{t\geqslant0}$ 为有下列随机微分的扩散 *Markov* 过程:

$$dX_t=a(t,X_t)dt+b(t,X_t)dB_t,$$

①以下的 "注 2" 只有英文版中有. —— 译者注

其中 $\int_0^t |a(s,X_s)|ds < \infty$, $\int_0^t b^2(s,X_s)ds < \infty$ (P-a.s.), 以及 $t > 0$ (比较 §3 中的公式 (1) 和 §3e 中的 (9)).

如果 $Y_t = F(t, X_t)$, 其中 $F = F(t,x) \in C^{1,2}$ 以及 $\dfrac{\partial F}{\partial x} > 0$, 那么 $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ 也是一个扩散 Markov 过程, 满足

$$dY_t = \alpha(t, Y_t)dt + \beta(t, Y_t)dB_t,$$

其中

$$\alpha(t,y) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)a(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)b^2(t,x), \tag{31}$$

$$\beta(t,y) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}b(t,x), \tag{32}$$

以及 t, x 和 y 通过等式 $y = F(t,x)$ 相联系.

这些公式描述了由 Markov 过程 X 的 (局部) 特征 $a(t,x)$ 和 $b(t,x)$ 到 Markov 过程 Y 的 (局部) 特征 $\alpha(t,y)$ 和 $\beta(t,y)$ 的变换, 它是 A. N. Kolmogorov [280; §17] 早在 1931 年就提出的. 它们是 Itô 公式 (5) 的推论. 这就自然有理由把 (31) 和 (32) 称为*Kolmogorov-Itô* 公式.

§3e. 随机微分方程

1. 在有随机微分

$$dX_t = \alpha(t,\omega)dt + \beta(t,\omega)dB_t \tag{1}$$

的 Itô 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 中, 起重要作用的是这样的 Itô 过程: 依赖于 ω 的系数 $\alpha(t,\omega)$ 和 $\beta(t,\omega)$ 是通过 $X_t(\omega)$ 的值来联系的:

$$\alpha(t,\omega) = a(t, X_t(\omega)), \qquad \beta(t,\omega) = b(t, X_t(\omega)), \tag{2}$$

其中 $a = a(t,x)$ 和 $b = b(t,x)$ 是 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上的可测函数.

这样, 例如, 称为几何或经济布朗运动的过程 (参见 §3a)

$$S_t = S_0 e^{at} e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}, \tag{3}$$

(根据 Itô 公式) 有随机微分

$$dS_t = aS_t dt + \sigma S_t dB_t. \tag{4}$$

容易断定, 再次借助于 Itô 公式, 过程

$$Y_t = \int_0^t \frac{S_t}{S_u} du \tag{5}$$

有微分

$$dY_t = (1 + aY_t)dt + \sigma Y_t dB_t. \tag{6}$$

(过程 $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ 在布朗运动的局部漂移变化的最速检测问题中起着重要作用; 参见 [441].)

如果

$$Z_t = S_t \left[Z_0 + (c_1 - \sigma c_2) \int_0^t \frac{du}{S_u} + c_2 \int_0^t \frac{dB_u}{S_u} \right], \tag{7}$$

其中 c_1 和 c_2 是常数, 那么再次借助于 Itô 公式, 可以验证,

$$dZ_t = (c_1 + aZ_t)dt + (c_2 + \sigma Z_t)dB_t. \tag{8}$$

在所引入的例子中, 我们从过程 $S = (S_t)$, $Y = (Y_t)$, $Z = (Z_t)$ 的 "显式" 出发, 再借助于 Itô 公式得到它们的随机微分 (4), (6) 和 (8).

然而, 换一个视角, 也可把 (4), (6) 和 (8) 看作未知过程 $S = (S_t)$, $Y = (Y_t)$, $Z = (Z_t)$ 的随机微分方程, 并且可试图指出, 对它们所求出的解 (3), (5) 和 (7) (在一定意义下) 是这些方程的唯一解.

当然, 必须给出 "随机微分方程" 概念自身的精确含义, 并定义什么是它的 "解", 在怎样的含义下来理解解的 "唯一性".

在定义后面考察的所有这些概念时, 起关键作用的是前面引入的随机积分的概念.

2. 我们将认为给定有常设条件 (§7a 第 2 点) 的渗透概率空间 (随机基底) $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$, 并设 $B = (B_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是布朗运动.

设 $a = a(t,x)$ 和 $b = b(t,x)$ 是 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上的可测函数.

定义 1. 我们说, 有 $\mathscr{F}_0$-可测初值条件 X_0 的随机微分方程

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t \tag{9}$$

有连续强解 (或者简称解) $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, 是指对于每个 $t > 0$,

X_t 为 $\mathscr{F}$-可测,

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t |a(s, X_s)| ds < \infty \right) = 1, \tag{10}$$

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t b^2(s, X_s) ds < \infty \right) = 1 \tag{11}$$

以及 (P-a.s.)

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s. \tag{12}$$

定义 2. 两个连续随机过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 和 $Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ 称为随机无区别, 是指对于任何 $t > 0$,

$$\mathsf{P}\left(\sup_{s\leqslant t}|X_s - Y_s| > 0\right) = 0. \tag{13}$$

定义 3. 我们将说, 定义在 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上的可测函数 $f = f(t,x)$ (按相变量 x) 满足*局部 Lipschitz* 条件, 是指对于每个 $n \geqslant 1$ 可求得常数 $K(n)$, 使得对于所有 $t \geqslant 0$ 和 $|x| \leqslant n$, $|y| \leqslant n$, 有

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leqslant K(n)|x - y|. \tag{14}$$

定理 1 (K. Itô [242], [243]; 也参见例如, [123; 第 9 章], [288; 第 V 章], [303; 第 4 章]). *设系数 $a(t,x)$ 和 $b(t,x)$ 满足局部Lipschitz 条件和线性增长条件:*

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| \leqslant K(1)|x|, \tag{14'}$$

并设初值条件 X_0 为 $\mathscr{F}_0$-可测.

那么随机微分方程 (9) 有且仅有 (精确到随机无区别) 一个为 Markov 过程的连续解 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)$.

这个结果在各个方向上都有推广: 减弱局部 Lipschitz 条件, 允许系数依赖于 ω (但有专门特征), 考察系数 $a = a(t, X_t)$ 和 $b = b(t, X_t)$ 依赖于 "过去" 的情形 (用有点含糊的记号: $a = a(t; X_s, s \leqslant t)$, $b = b(t; X_s, s \leqslant t)$).

在多维情形下也有推广, 其中 $X = (X^1, \cdots, X^d)$ 为向量过程, $a = a(t,x)$ 是向量, $b = b(t,x)$ 是矩阵以及 $B = (B^1, \cdots, B^d)$ 是 d-维布朗运动. 关于这方面参见例如, [123], [288], [303].

在各种推广中, 我们只引入一个有点令人意外的 A. K. Zvonkin [485] 的结果, 它断言, 为使随机微分方程

$$dX_t = a(t, X_t)dt + dB_t \tag{15}$$

存在强解, 完全不必要求系数 $a(t,x)$ 满足局部 Lipschitz 条件, 而只需它按 (t,x) 的可测性和一致有界性. (这个结果的多维推广是 A. Yu. Veretennikov [471] 得到的.)

这样一来, 例如, 随机微分方程

$$dX_t = \sigma(X_t)dt + dB_t, \qquad X_0 = 0, \tag{16}$$

即使有 "坏" 系数

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \tag{17}$$

也有且仅有唯一的强解.

然而, 我们要注意, 如果取代 (16) 来考察方程

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t, \qquad X_0 = 0, \tag{18}$$

其中 $\sigma(x)$ 是同样的函数, 局面就发生急剧改变, 因为, 首先, 存在这样的概率空间, 使得这个方程显然至少有两个解; 其次, 在某个概率空间上, 这个方程可能完全没有任何强解.

为了指出第一个断言成立, 我们在有维纳测度的连续函数 $\omega = (\omega_t)_{t\geqslant 0}$ 的空间上考察协调定义的维纳过程 $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$, 即定义为 $W_t(\omega) = \omega_t$ $(t \geqslant 0)$ 的过程.

于是, 根据 Lévy 定理 (参见 §3b 中的第 3 点), 定义为

$$B_t = \int_0^t \sigma(W_s)dW_s$$

的过程 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 也将是维纳过程 (布朗运动). 容易看出,

$$\int_0^t \sigma(W_s)dB_s = \int_0^t \sigma^2(W_s)dW_s = W_t,$$

因为 $\sigma^2(x) = 1$.

这样, 过程 $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ (在所考察的概率空间上) 是以特殊方式选取的布朗运动 B 的方程 (18) 的解. 但是, 由于 $\sigma(-x) = -\sigma(x)$, 故

$$\int_0^t \sigma(-W_s)dB_s = -\int_0^t \sigma(W_s)dB_s = -W_t,$$

即, 除了 $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ 以外, 过程 $-W = (-W_t)_{t\geqslant 0}$ 也是方程 (18) 的解.

至于第二个断言, 则对方程假定 (关于由布朗运动 B 所生成的 σ-代数 $(\mathscr{F}_t^B)_{t\geqslant 0}$,)

$$X_t = \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$$

有强解. 由 Lévy 定理得到, 这时过程 $X = (X_t, \mathscr{F}_t^B)_{t\geqslant 0}$ 是布朗运动.

根据 Tanaka 公式 (参见后面的 §5c 以及比较第二章 §1b 中的例子):

$$|X_t| = \int_0^t \sigma(X_s)dX_s + L_t(0),$$

其中

$$L_t(0) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t I(|X_s| \leqslant \varepsilon)ds$$

是布朗运动 X 在区间 $[0,t]$ 上零点处度过的 (Lévy) 局部时间.

因此, (P-a.s.)

$$B_t = \int_0^t \sigma(X_s)dX_s = |X_t| - L_t(0),$$

而这就是说, $\mathscr{F}_t^B \subseteq \mathscr{F}_t^{|X|}$.

上面所作的 X 关于流 $\mathscr{F}^B = (\mathscr{F}_t^B)_{t\geqslant 0}$ 为适应过程的假定给出包含式 $\mathscr{F}_t^X \subseteq \mathscr{F}_t^{|X|}$, 它当然不可能对于布朗运动 X 成立. 所有这些表明, 在先验给定的有给定布朗运动的概率空间上, 方程的解可能不存在. (在 M. Barlow 的著作 [20] 中指出, 方程 (18) 可能在 $\sigma = \sigma(x) > 0$ 是连续有界函数的情形下没有强解.)

3. 我们察觉, 所求得的方程 (18) 的两个解 W 和 $-W$ 其实有同样的分布:

$$\mathrm{Law}(W_s, s \geqslant 0) = \mathrm{Law}(-W_s, s \geqslant 0).$$

这一状况可用来说明下面引入的随机微分方程的弱解概念的合理性; 这种弱解概念的实质如下列定义所述:

定义 4. 设 μ 是在实数直线 $\mathbb{R}$ 的 Borel 集上的某个概率测度.

我们说, 初值 X_0 满足 $\mathrm{Law}(X_0) = \mu$ 的随机微分方程 (9) 有弱解, 是指可求得渗透概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$, 可求得其上的布朗运动 $B = (B_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 以及连续随机过程 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, 使得 $\mathrm{Law}(X_0|\mathsf{P}) = \mu$, 且对于每个 $t > 0$ (P-a.s.) 满足等式 (12).

重要的是要强调, 不同于强解是在先验给定的渗透概率空间上对于先验给定的布朗运动来讨论的, 在弱解的定义中, 这些对象事先是不固定的, 而只要求可找到它们.

由所引入的定义显然可见, 可以期待在对方程 (9) 的系数限制较少的条件下存在弱解.

在这一方向上的首批结果 (参见 [446], [457]) 之一陈述如下.

考察有初值分布 $\mathrm{Law}(X_0) = \mu$ 的随机微分方程

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dB_t, \tag{19}$$

其中 μ 对于每个 $\varepsilon > 0$ 满足 $\int x^{2(1+\varepsilon)}\mu(dx) < \infty$.

如果系数 $a = a(x)$ 和 $b = b(x)$ 是连续有界函数, 那么方程 (19) 有弱解.

如果同时还有 $b^2(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, 那么弱解 (按分布的) 唯一性成立.

注 1. 在系数 $b(x)$ 的有界性和非退化性的假定下, 如果只要求系数 $a(x)$ 的有界性和可测性, 弱解的存在唯一性仍然成立. 参见 [457].

4. 所引入有关弱解的结果有各种推广: 多维情形, 系数依赖于过去的情形, 如此等等.

在这一方向上的最为透彻的结果之一基于应用关于测度的绝对连续替换的 "Girsanov 定理"; 我们在这里引入这条定理是因为它还在许多其他问题中有其重要性. (关于这条定理对于离散时间情形下的应用, 参见第四章中的 §§3b, 3d.)

设 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P})$ 是某个渗透概率空间, $B = (B_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是 d-维布朗运动, $B = (B^1, \cdots, B^d)$, 又设 $a = (a_t, \mathscr{F}_t)$ 是 d-维随机过程, $a = (a^1, \cdots, a^d)$ 满足条件

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t \|a_t\|^2 < \infty\right) = 1, \qquad t \leqslant T, \tag{20}$$

其中 $\|a_t\|^2 = (a_t^1)^2 + \cdots + (a_t^d)^2$, 而 $T < \infty$.

令

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t (a_s, dB_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|a_s\|^2 ds\right\}, \tag{21}$$

其中纯量积

$$(a_s, dB_s) = \sum_{i=1}^d a_s^i dB_s^i \ (= a_s^* dB_s),$$

我们由此形成过程 $Z = (Z_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$.

如果

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \|a_s\|^2 ds\right\} < \infty$$

("Novikov 条件"; 也比较第五章 §3b 中对于离散时间情形下的对应条件), 那么

$$\mathsf{E}Z_T = 1, \tag{22}$$

而这就是说, 过程 $Z = (Z_t, \mathscr{F}_t)_{t\leqslant T}$ 将是一致可积鞅.

由 Z_t (P-a.s.) 的正性和条件 (22), 在 $(\Omega, \mathscr{F}_T)$ 上可通过令

$$\widetilde{\mathsf{P}}_T(A) = \mathsf{E}[I_A Z_T], \qquad A \in \mathscr{F}_T$$

引入概率测度 $\widetilde{\mathsf{P}}_T$. 显然, 如果 $\mathsf{P}_T = \mathsf{P}\,|\,\mathscr{F}_T$ 是测度 P 在 $\mathscr{F}_T$ 上的限制, 那么 $\widetilde{\mathsf{P}}_T \sim \mathsf{P}_T$.

定理 2 (I. V. Girsanov [183]). 设

$$\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t a_s ds, \qquad t \leqslant T.$$

那么 $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t, \mathscr{F}_t, \widetilde{\mathsf{P}}_T)_{t\leqslant T}$ 是布朗运动.

证明在著作 [183] 和后面的第七章 §3b 中引入; 也参见 [266], [303].

我们考察下列一维随机微分方程的弱解的存在性问题:

$$dX_t = a(t, X)dt + dB_t, \tag{23}$$

其中系数 $a = a(t, X)$ 被假定为一般依赖于 "过去" 值 X_s, $s \leqslant t$. ($d > 1$ 的情形类似讨论.)

我们将以 C 表示连续函数 $x=(x_t)_{t\geqslant 0}$ $(x_0=0)$ 的空间, $\mathscr{C}_t=\sigma(x\colon x_s, s\leqslant t)$, $\mathscr{C}=\sigma\left(\bigcup_{t\geqslant 0}\mathscr{C}_t\right)$. 还设 P^W 是 $(C,\mathscr{C})$ 上的维纳测度.

泛函 $a=a(t,x)$ $(t\in\mathbb{R}_+, x\in C)$ 称为可测, 是指它是由 $\mathbb{R}_+\times C$ 到 $\mathbb{R}$ 的可测映射, 而称为循序可测, 是指, 此外, 对于每个 $t>0$ 和每个 Borel 集 A, 集合

$$\{(s\leqslant t, x\in C)\colon a(s,x)\in A\}\in\mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{C}_t.$$

我们将假定, 方程 (23) 对于 $t\leqslant T$ 和 $X_0=0$ (为了简单起见) 来讨论, 并假定下列条件满足: $a=a(t,x)$ 是循序可测泛函,

$$\mathsf{P}^W\left\{x\colon \int_0^t a^2(t,x)dt<\infty\right\}=1, \tag{24}$$

$$\mathsf{E}^W\exp\left\{\int_0^T a(t,x)dW_t(x)-\frac{1}{2}\int_0^T a^2(t,x)dt\right\}=1, \tag{25}$$

其中 $W=(W_t(x))_{t\geqslant 0}$ 是按坐标定义 $(W_t(x)=x_t)$ 的维纳过程, $\mathsf{E}^W(\cdot)$ 是关于维纳测度 P^W 的均值.

对应弱解的概念, 我们必须构造某个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\leqslant T},\mathsf{P})$, 使得其上过程 $X=(X_t,\mathscr{F}_t)$ 和 $B=(B_t,\mathscr{F}_t)$ 满足 B 关于测度P 是布朗运动, 以及对于每个 $t\leqslant T$,

$$X_t=\int_0^t a(s,X)ds+B_t \tag{26}$$

(P-a.s.) 成立.

令

$$\Omega=C,\qquad \mathscr{F}=\mathscr{C},\qquad \mathscr{F}_t=\mathscr{C}_t,$$

以及令

$$\mathsf{P}(dx)=Z_T(x)\mathsf{P}^W(dx)$$

来定义 $\mathscr{F}_T$ 上的测度 P, 其中

$$Z_T(x)=\exp\left\{\int_0^T a(t,x)dW_t(x)-\frac{1}{2}\int_0^T a^2(t,x)dt\right\}.$$

根据 Girsanov 定理, 在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F}_T,\mathsf{P})$ 上, 过程

$$B_t(x)=W_t(x)-\int_0^t a(s,W(x))ds,\qquad t\leqslant T$$

是布朗运动. 因此, 令 $X_t(x)=W_t(x)$, 我们求得

$$X_t(x)=\int_0^t a(s,X(x))ds+B_t(x),\qquad t\leqslant T,$$

它 (在假定 (24) 和 (25) 下) 也证明了随机微分方程 (23) 的弱解的存在性.

注 2. 如果 $|a(t,x)| \leqslant c$ 对于所有 $t \leqslant T$ 和 $x \in C$ 成立, 那么条件 (24) 和 (25) 明显成立. 因此, 在这一假定下, 方程 (23) 有弱解. 然而, 我们强调, 正如 B. Tsirelson 的例子 (参见例如, [303; §4.4]) 所指出, 这样的方程可能没有强解. 在这一联系中, 我们记得, 当方程 $dX_t = a(t, X_t)dt + dB_t$ 中, 系数 $a(t, X_t)$ 仅仅依赖于 "当前" X_t, 而不是全部 "过去" X_s, $s \leqslant t$ (如同在 (23) 中那样), 那么它不仅有弱解, 并且也有强解 (参见上面的联系 A. K. Zvonkin [485] 的结果的第 2 点).

§3f. 正向和倒向 Kolmogorov 方程. 解的概率论表示

1. 下面叙述扩散 Markov 过程理论的某些结果和方法, 它们在 A. N. Kolmogorov 发表于 1931 年的奠基著作 "论概率论中的解析方法 (Über die analitishen Methoden in der Warscheinlichkeitsrechnung)" [280] 中讨论.

P. S. Aleksandrov 和 A. Ya. Khintchine 在 [5] 中这样描述这篇把随机过程理论与数学分析, 特别是, 与 (常、偏) 微分方程理论联系在一起的著作:

> "在 20 世纪的全部概率论中, 很难指出别的研究对今后的学科发展是如此至关紧要 ······."

A. N. Kolmogorov 在著作 [280] 中没有直接处理, 比如, Markov 过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 的轨线, 而是研究下列转移概率的性质:

$$\mathsf{P}(s, x; t, A) = \mathsf{P}(X_t \in A \,|\, X_s = x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

它就是在时刻 s 有 $X_s = x$ 的假定下, 过程 X 的轨线在时刻 t 落在集合 A 中的概率.

每一分析的出发点是表达 Markov 性质的方程 $(0 \leqslant s < u < t)$

$$\mathsf{P}(s, x; t, A) = \int_{\mathbb{R}} \mathsf{P}(s, x; u, dy)\mathsf{P}(u, y; t, A). \tag{1}$$

(方程 (1) 通常称为*Kolmogorov-Chapman 方程.*)

令

$$F(s, x; t, y) = \mathsf{P}(s, x; t, (-\infty, y]).$$

假定密度

$$f(s, x; t, y) = \frac{\partial F(s, x; t, y)}{\partial y} \tag{2}$$

存在以及下列极限存在:

$$a(s, x) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) f(s, x; s + \Delta, y) dy, \tag{3}$$

$$b^2(s,x) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^2 f(s,x;s+\Delta,y)dy, \tag{4}$$

同时还假定所考察的函数的光滑性以及 ($\delta > 0$)

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{\mathbb{R}} |y-x|^{2+\delta} f(s,x;s+\Delta,y)dy = 0, \tag{5}$$

由方程 (1), A. N. Kolmogorov 对于这样的所谓扩散过程导出 (详情参见 [280] 或者例如, [170], [182]) (关于 $x \in \mathbb{R}$ 和 $s < t$ 的) *倒向抛物型微分方程*:

$$-\frac{\partial f}{\partial s} = a(s,x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(s,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{6}$$

和 (关于 $y \in \mathbb{R}$ 和 $t > s$ 的) *正向抛物型微分方程*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}[a(t,y)f] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[b^2(t,y)f], \tag{7}$$

还讨论了这些方程的解的存在性、唯一性、光滑性等等问题. (方程 (7) 曾由 A. D. Fokker [161] 和 M. Planck [389] 在扩散理论的物理研究中考察过.)

2. 在 Markov 随机过程的理论和方法的发展中, 此后的重要一步是在 1940—1950 年代 K. Itô [242]-[244] 中走出的; 这些著作旨在给出扩散 (以及扩散—跳跃) 过程的 "明确的" 构造性的结构, 其中的系数 $a(s,x)$ 和 $b^2(s,x)$ 带有在 (3) 和 (4) 中定义的局部特征.

为实现这一宏图, Itô 构造了相应的过程, 它是作为下列随机微分方程的解来得到的:

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dB_t, \tag{8}$$

其中涉及某个 "基底" 布朗运动 $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$.

对应于 [242]-[244] (也参见 §3e), 初值 $X_0 = \mathrm{Const}$、其系数按相变量满足局部 Lipschitz 条件和增长线性有界的方程 (8) 有且仅有唯一的强解. 如果同时要求系数 $a(t,x)$ 和 $b(t,x)$ 按 (t,x) 连续, 那么过程 X 将是扩散 Markov 过程, 它特别是满足性质 (3)-(5); 而这就是说, 在对转移密度和系数 $a(t,x)$ 和 $b(t,x)$ 附加光滑性条件时 (详情参见例如, [182] 中的 §14), 它将满足正向和倒向 Kolmogorov 方程.

类似地也可考察 d-维过程 $X = (X^1, \cdots, X^d)$ 的情形:

$$dX_t^i = a^i(t,X_t)dt + \sum_{j=1}^{d} b^{ij}(t,X_t)dB_t^j. \tag{9}$$

如果令

$$\sigma^{ij} = \sum_{k=1}^{d} b^{ik}b^{jk} \tag{10}$$

以及 (比较 §3d 中的 (27))

$$L(s,x)f=\sum_{i=1}^{d}a^i(s,x)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma^{ij}(s,x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}, \tag{11}$$

$$L^*(t,y)f=-\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial y_i}[a^i(t,y)f]+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}[\sigma^{ij}(t,y)f], \tag{12}$$

则 Kolmogorov 倒向和正向抛物型方程将有下列形式:

$$-\frac{\partial f}{\partial s}=L(s,x)f \tag{13}$$

和

$$\frac{\partial f}{\partial t}=L^*(t,y)f. \tag{14}$$

我们特别注意系数 a^i 和 b^{ij} 不依赖于时间参数的情形:

$$a^i=a^i(x),\qquad b^{ij}=b^{ij}(x).$$

在这一情形下, 对于 $0\leqslant s<t$,

$$f(s,x;t,y)=f(0,x;t-s,y).$$

如果引入函数 $g=g(x,t;y)$, 按定义, 令

$$g(x,t;y)=f(0,x;t,y),$$

那么由 (13) 求得, 这个 (t,x) 的函数满足抛物型方程

$$\frac{\partial g}{\partial t}=L(x)g, \tag{15}$$

其中 $L(x)g=\sum_{i=1}^{d}a^i(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma^{ij}(x)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial X_j}$.

3. 现在转向叙述一系列众所周知的结果, 它们借助于布朗运动和随机微分方程的解, 对于偏微分方程理论的许多经典问题, 可给出抛物型方程 (15) 的解的概率表示.

A. Cauchy 问题. 在区域 $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 中求连续函数 $u=u(t,x)$, 使得

$$u(0,x)=\varphi(x) \tag{16}$$

对于给定的函数 $\varphi=\varphi(x)$ 成立, 同时还满足下面引入的抛物型方程之一 (比较 (15)).

A1. 热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta u, \tag{17}$$

其中 Δ 是 Laplace 算子, $\Delta=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

函数

$$v(t,x)=\mathsf{E}_x f(B_t) \tag{17$'$}$$

就是方程 (17) 的 Cauchy 问题的被称为概率解的解. (在 (17′) 中 E_x 是关于适合从点 x 出发的布朗运动 (即 $B_0=x$) 的测度 P_x 的均值.)

A2. 非齐次热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta u+\psi, \tag{18}$$

其中 $\psi=\psi(t,x)$.

概率解是函数

$$v(t,x)=\mathsf{E}_x\left(\varphi(B_t)+\int_0^t \psi(t-s,B_t)ds\right). \tag{18$'$}$$

A3. *Feynman-Kac* 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta u+cu, \tag{19}$$

其中 $c=c(x)$.

概率解是函数

$$v(t,x)=\mathsf{E}_x\left(\varphi(B_t)\exp\left\{\int_0^t c(B_s)ds\right\}\right). \tag{19$'$}$$

A4. *Cameron-Martin* 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\Delta u+(a,\nabla u), \tag{20}$$

其中 $a=(a^1(x),\cdots,a^d(x))$, $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_d}\right)$.

概率解是函数

$$v(t,x)=\mathsf{E}_x\left(\varphi(B_t)\exp\left\{\int_0^t a(B_s)dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t |a(B_s)|^2ds\right\}\right). \tag{20$'$}$$

注 1. 当然, 为了使公式 (17′)–(20′) 中的函数 $v(t,x)$ 是解, 首先需要定义这些公式中的数学期望. 为此例如只需要求函数 $\varphi(x)$, $\psi(t,x)$, $c(x)$, $a(x)$ 的有界性. (在许多问题中, 这些假定极受限制, 它要求我们在讨论这些问题时要格外谨慎.)

注 2. 当说到 "概率解" 时, 并不意味着这是在某个特殊的 "概率类" 中的解, 而只是说, 它们是借助于诸如按维纳测度的均值那样的概率论概念来定义的解.

B. Dirichlet 问题. 考察某个开区域 $G \subseteq \mathbb{R}^d$ 和寻求 C^2 类函数 $u = u(x)$, 满足方程

$$\Delta u = 0, \qquad x \in G, \tag{21}$$

(即它是调和函数) 和条件

$$u(x) = \varphi(x), \qquad x \in \overline{\partial G}. \tag{22}$$

设

$$\tau = \inf\{t \colon B_t \notin G\}.$$

于是概率解是函数

$$v(x) = \mathsf{E}_x \varphi(B_\tau). \tag{23}$$

注 3. 这里也需要某个关于区域 G 的假定, 使得时刻 τ 是 Markov 时刻, 而这也是 $\varphi(B_\tau)$ 可积的必要条件.

4. 在证明的基本点上余下的是要指出, 在 (23) 中定义的函数 $v(x)$ 实际上 (在某些补充假定下) 是方程 (21) 的解.

我们将假定, $\mathbb{R}^d$ 中的开集 G 是有界的, 以及 $\varphi = \varphi(x)$ 是有界函数. 又假定, 函数 $v(x) = \mathsf{E}_x \varphi(B_\tau)$ 属于 C^2 类.

于是根据 Itô 公式, 我们求得 (在 $[\![0, \tau[\![= \{(\omega, t) \colon t < \tau(\omega)\}$ 中)①

$$v(B_t) = v(B_0) + \frac{1}{2} \int_0^t (\Delta v)(B_s) ds + \int_0^t (\nabla v)(B_s) dB_s. \tag{24}$$

如果函数 v 满足

$$\mathsf{P}\left(\int_0^\tau \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}(B_s) \right)^2 ds < \infty \right) = 1,$$

那么 (24) 中的后一个积分将在 $[\![0, \tau[\![$ 上是局部鞅 (参见 [250; 第 88 页]).

由布朗运动的 Markov 性质, 在集合 $[\![0, \tau[\![$ 上, (P-a.s.) 有

$$\mathsf{E}_x(\varphi(B_\tau) \mid \mathscr{F}_s) = v(B_s), \tag{25}$$

即, 在这个集合上, $v(B_s)$ 是鞅.

这样, 由 (24) 得到, 过程 $\left(\text{积分} \left(\int_0^t \Delta v(B_s) ds \right)_{t \leqslant \tau} \right)$ 在 $[\![0, \tau[\![$ 上是局部鞅, 并且由于同时它还是连续的有界变差过程, 它等于零. (这个事实是对于半鞅*Doob-Meyer*分解的推论, 后者在检验概率解是否满足某个方程的问题上经常运用; 参见 [250; §3b, 第 I 章] 和以后的 §5b.)

①这个括号中以及后面的 $[\![0, \tau[\![$ 都是英译本加上的, 并指出它们来自 [250]. 俄文版上有时把这个集合记为 $\{\omega \colon s < \tau\}$, 不太确切. —— 译者注

由此我们断定, $\Delta v(x)=0,\ x\in G$, 因为, 如果在某个点 $x_0\in G$ 上不成立, 那么由 $\Delta v(x)$ 的连续性得到, $\Delta v(x)\neq 0$ 在点 x_0 的某个邻域中成立, 以及于是有正概率使过程 $\left(\int_0^t \Delta v(B_s)ds\right)_{t\leqslant\tau}$ 不等于零.

注 4. 关于椭圆方程的 Dirichlet 问题的解的唯一性问题和这个问题的任何解可表示为 $\mathsf{E}_x\varphi(B_\tau)$ 形式的问题, 参见例如, [123; 8.5], [170; 第 1 卷, 第 6 章, §2].

5. 在同样的思路中, 也可用完全类似的方式来考察 Cauchy 问题中的概率解问题.

例如, 我们考察热传导方程 (17), 并指出函数 $v(t,x)=\mathsf{E}_x\varphi(B_t)$ (在某些补充假定下) 是这一方程的有初值条件 $u(0,x)=\varphi(x)$ 的解.

其实, 由布朗运动的 Markov 性质,

$$\mathsf{E}_x(f(B_t)\,|\,\mathscr{F}_s)=v(t-s,B_s). \tag{26}$$

由于 $(\mathsf{E}_x(f(B_t)\,|\,\mathscr{F}_s))_{s\leqslant t}$ 是鞅 (至少对于 $|f|\leqslant c$), 故 $(v(t-s,B_s))_{s\leqslant t}$ 也是鞅.

又, 在 $v\in C^2$ 的假定下, 可以应用 Itô 公式:

$$v(t-s,B_s)=v(t,B_0)+\int_0^t\left(-\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta v\right)(t-r,B_r)dr \\ +\int_0^t \nabla v(t-r,B_r)dB_r. \tag{27}$$

如果对于每个 t,

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^t\sum_{i=1}^d\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_i-r,B_r)\right)^2dr<\infty\right\}=1, \tag{28}$$

那么 (27) 中的后一积分将是局部鞅. 因此, 过程

$$\left(\int_0^t\left(-\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta v\right)(t-r,B_r)dr\right)_{t\geqslant 0}$$

作为局部鞅和连续有界变差过程, 与零过程 (P-a.s.) 无区别.

如果此外, 函数 $\varphi=\varphi(x)$ 连续, 那么当 $t\to 0$ 时 $v(t,x)\to\varphi(x)$.

借助于 Itô 公式可类似地确立, 公式 (17′)–(20′) 相应定义了问题 (17)–(20) 的概率解.

注 5. 对于上面陈述的抛物型方程的 Cauchy 问题和 Dirichlet 问题以及 Kolmogorov 正向和倒向方程的相应问题的更详尽的讨论参见例如, [123], [170], [182], [288].

4. 利率、股票和债券价格演化的扩散模型

§4a. 随机利率

1. 我们所遇到的随机利率 $r=(r_n)_{n\geqslant 1}$ 的最简单的模型是银行账户模型 $B=(B_n)_{n\geqslant 0}$, 其中 (根据定义)

$$r_n=\frac{\Delta B_n}{B_{n-1}}. \tag{1}$$

如果 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0},\mathsf{P})$ 是随机基底 (渗透概率空间), 它用来描述金融市场的随机性以及其上的 "信息" $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$, 那么, 正如已经注意到 (第二章, §1e), 银行账户 B_n 自然被认为是 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的.

因此, 无论是序列 $B=(B_n)_{n\geqslant 0}$, 还是序列 $r=(r_n)_{n\geqslant 1}$, 它们都是可料的 (参见第二章, §1a).

这一状况说明, 为什么在连续时间情形下, 通常对利率 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 附加可料性要求; 当 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 是连续 (或者仅仅是左连续) 过程时, 它自动满足.

以后我们将只考察利率 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 是扩散随机过程的模型; 因而, 它有连续轨线 (从而所提到的可料性要求变为多余).

在连续时间 $t\geqslant 0$ 的情形下, 通常的银行账户 $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$ 的利率 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 通过下列关系式来给出:

$$dB_t=r(t)B_t dt, \tag{2}$$

它是 (1) 的自然 "连续" 类比.

很明显,

$$r(t)=(\ln B_t)' \tag{3}$$

以及

$$B_t=B_0\exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\}. \tag{4}$$

利率 (短期利率 (short rate of interest)、即时利率 (spot rate)、瞬时利率 (instantaneous interest ratc)) 的概念在 "间接" 给定债券价格演变中起着重要作用 (参见以后的 §4c). 这一状况说明, 为什么大多数各种各样的利率 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 的模型可用下列形式的扩散方程来描述:

$$dr(t)=a(t,r(t))dt+b(t,r(t))dW_t, \tag{5}$$

或者比如用下列形式的 "带跳跃的扩散" 型模型的方程来描述:

$$dr(t)=a(t,r(t))dt+b(t,r(t))dW_t+\int c(t,r(t-),x)(\mu(dt,dx)-\nu(dt,dx)), \tag{6}$$

其中 $\mu=\mu(dt,dx)$ 是在 $\mathbb{R}_t\times E\times\mathbb{R}^d$ 上的随机泊松测度, 而 $\nu=\nu(dt,dx)$ 是它的补偿量 (详情参见 [250; 第 III 章, §2c]).

2. 我们引入利率 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 的某些有关扩散模型 (5) 的流行模型, 其中 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 是给定在某个随机基底 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$ 上的标准维纳过程 (布朗运动).

Merton 模型 (R. C. Merton, [346]; 1973 年):

$$dr(t)=\alpha dt+\gamma dW_t. \tag{7}$$

Vasiček 模型 (O. Vasiček, [472]; 1977 年):

$$dr(t)=(\alpha-\beta r(t))dt+\gamma dW_t. \tag{8}$$

Dothan 模型 (L. Dothan, [111]; 1978 年):

$$dr(t)=\alpha r(t)dt+\gamma r(t)dW_t. \tag{9}$$

Cox-Ingersoll-Ross 模型 (J. C. Cox, J. E. J. Ingersoll, S. A. Ross, [80], 1980 年; [81], 1985 年):

$$dr(t)=\beta(r(t))^{3/2}dW_t, \tag{10}$$

$$dr(t)=(\alpha-\beta r(t))dt+\gamma(r(t))^{1/2}dW_t. \tag{11}$$

Ho-Lee 模型 (T. Ho, S. Lee, [224]; 1986 年):

$$dr(t)=\alpha(t)dt+\gamma dW_t. \tag{12}$$

Black-Derman-Toy 模型 (F. Black, E. Derman, W. Toy, [42], 1990 年):

$$dr(t)=\alpha(t)r(t)dt+\gamma(t)dW_t. \tag{13}$$

Hull-White 模型 (J. Hull, A. White, [234]; 1990 年):

$$dr(t)=(\alpha(t)-\beta(t)r(t))dt+\gamma(t)dW_t, \tag{14}$$

$$dr(t)=(\alpha(t)-\beta(t)r(t))dt+\gamma(t)(r(t))^{1/2}dW_t. \tag{15}$$

Black-Karasinski 模型 (F. Black, P. Karasinski, [43]; 1991 年):

$$dr(t)=r(t)(\alpha(t)-\beta(t)\ln r(t))dt+\gamma(t)r(t)dW_t. \tag{16}$$

Sandmann-Sondermann 模型 (K. Sandmann, D. Sondermann, [422]; 1993 年):

$$r(t)=\ln(1+\xi(t)), \tag{17}$$

其中

$$d\xi(t) = \xi(t)(\alpha(t)dt + \gamma(t)dW_t). \tag{18}$$

3. 在引入上述模型的论文中, 也给出了他们讨论的动机.

例如, 如果认为利率在某个常值水平 α/β 附近波动, 那么 Vasiček 模型 (8) 是完全自然的. (由 (8) 可见, 当 $r(t) < \alpha/\beta$ 时, 过程呈现正漂移, 而当 $r(t) > \alpha/\beta$ 时, 漂移是负的; 如果 $\alpha = 0$, 那么方程 (8) 变为 §3a 中讨论的 Ornstein-Uhlenbeck 方程.)

然而, 应该注意, 许多债券利率性态的经验研究 (参见例如, [69], [70]) 指出, 一般来说, 不能认为, 存在某个固定平均值 (α/β), 使得利率有回归这个值的倾向 (这样的现象在英文文献中称为*平均复归* (mean reversion)).

这种状况在 Hull 和 White 模型中考虑, 其中固定的水平 α/β 替换为变动的 $\alpha(t)/\beta(t)$, $t \geqslant 0$.

以后还可认为, 这种变动的水平本身也可以是随机过程.

下列模型可以作为这方面的例子:

Chen 模型 (L. Chen, [70]; 1995 年):

$$dr(t) = (\alpha(t) - r(t))dt + (\gamma(t)r(t))^{1/2}dW_t^1, \tag{19}$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\gamma(t)$ 是扩散型随机过程,

$$d\alpha(t) = (\alpha - \alpha(t))dt + (\alpha(t))^{1/2}dW_t^2, \tag{20}$$

$$d\gamma(t) = (\gamma - \gamma(t))dt + (\gamma(t))^{1/2}dW_t^3 \tag{21}$$

(α, γ 为常数; W^1, W^2 和 W^3 是独立的维纳过程).

在所引入的许多模型中, 扩散系数 ("波动率") 都被认为是依赖于利率值 $r(t)$ 的; 这点例如可这样来解释: 如果利率很高, 那么有相应利率的资产必定也具有很高的风险, 它们就由波动项 (比如在对于 $r(t)$ 所对应的方程中的 $(r(t))^{1/2}dW_t$) 来确定.

4. 我们再引入一个 (相当简单的) 利率演变模型, 它出于下列设想.

很自然, 随机过程 $r = (r(t))_{t\geqslant 0}$ 在一定意义下是 "经济" 状态的反映以及对这种状态的某种评价.

由此出发, 我们假定, "经济" 状态比如建模为只有两个状态: $i = 0, 1$ (为了简化讨论) 的齐次跳跃 Markov 过程 $\theta = (\theta(t))_{t\geqslant 0}$. 设 $\mathsf{P}(\theta(0) = 0) = \mathsf{P}(\theta(0) = 1) = \frac{1}{2}$ 以及转移概率密度 λ_{ij} 满足 $\lambda_{ii} = -\lambda$ 以及当 $i \neq j$ 时, $\lambda_{ij} = \lambda$.

这样一来, "经济" 以参数为 λ 的逗留时间指数分布时而在状态 $i = 0$, 时而在状态 $i = 1$.

我们将假定, "经济" 状态 $\theta = (\theta(t))_{t\geqslant 0}$ 只能通过间接方式来判断; 这种方式就是观察有微分为

$$dX_t = \theta(t)dt + d\widetilde{W}_t, \tag{22}$$

的过程 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$, 其中 $\widetilde{W}=(\widetilde{W}_t)_{t\geqslant 0}$ 是某个维纳过程.

记

$$r(t)=\mathsf{E}(\theta(t)\,|\,\mathscr{F}_t^X) \tag{23}$$

为状态 $\theta(t)$ 关于观察 X_s $(s\leqslant t)$ 的均方意义下的最优估计 $(\mathscr{F}_t^X=\sigma(X_s,s\leqslant t))$.

由非线性滤波的一般理论可得 (参见 [303; 公式 (9.86)]),

$$dr(t)=\lambda(1-2r(t))dt+r(t)(1-r(t))(dX_t-r(t)dt). \tag{24}$$

我们察觉, 过程 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$,

$$W_t=X_t-\int_0^t r(s)ds, \tag{25}$$

是关于流 $(\mathscr{F}_t^X)_{t\geqslant 0}$ 的维纳过程 (参见 [303; 定理 7.12]; 也参见第七章 §3b 中的定理 5; 过程 W 称为更新过程①). 因此, (24) 是型为 (5) 的方程:

$$dr(t)=\lambda(1-2r(t))dt+r(t)(1-r(t))dW_t. \tag{26}$$

还值得注意的是, 由 (24), 并考虑到 (22), 可得

$$dr(t)=a(r(t),\theta(t))dt+b(r(t))d\widetilde{W}_t, \tag{27}$$

其中

$$a(r,\theta)=\lambda(1-2r)+r(1-r)(\theta-r),\qquad b(r)=r(1-r).$$

(比较 Chen 模型 (19).)

5. 上面考察的利率 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 的动态模型都基于有某个基底维纳过程的随机微分方程.

同时, 还可察觉, 所考察的许多模型允许有作为维纳过程的泛函的 "显式" 解. 例如, 在 Vasiček 模型 (8) 及其推广 Hull-White 模型 (14) 中, 其解 (由方程 (8) 和 (14) 的线性性) 可表示为下列形式:

$$r(t)=g(t)\left[r(0)+\int_0^t\frac{\alpha(s)}{g(s)}ds+\int_0^t\frac{\gamma(s)}{g(s)}dW_s\right], \tag{28}$$

其中

$$g(t)=\exp\left\{-\int_0^t\beta(s)ds\right\}, \tag{29}$$

它容易借助于 Itô 公式来建立; 比较 §3e 中的 (7).

①括号中的最后一句话是英文版加入的.　　——译者注

记

$$T(t)=\int_0^t\left(\frac{\gamma(s)}{g(s)}\right)^2 ds, \tag{30}$$

并假定对于所有 $t>0$, 有 $T(t)<\infty$, 以及当 $t\to\infty$ 时, $T(t)\to\infty$, 我们引入公式 $\theta=T(t)$ 表示由 "老" 时间 t 变到 "新" 时间 θ. (详情参见第四章 §3d, 其中把 "新" 时间解释为 "运作" 时间.)

如所周知 (参见例如, [303; 引理 17.4]), 在所作的假定下, 可求得 (新的) 维纳过程 $W^*=(W_t^*)_{t\geqslant 0}$, 使得

$$\int_0^t\left(\frac{\gamma(s)}{g(s)}\right) dW_s=W^*_{T(t)}. \tag{31}$$

这样, 由 (28) 对于 $r(t)$ 得到下列表示式:

$$r(t)=f(t)+g(t)W^*_{T(t)}, \tag{32}$$

其中

$$f(t)=g(t)\left[r(0)+\int_0^t\frac{\alpha(s)}{g(s)}ds\right]. \tag{33}$$

如果

$$T^*(\theta)=\inf\{t\colon T(t)=\theta\},$$

那么由 "新" 时间 $\theta=T(t)$ 回归到 "老" 时间将由公式 $t=T^*(\theta)$ 来确定. 因此, 按照 "新" 时间 θ, 定义为 $r^*(\theta)=r(T^*(\theta))$ 的过程 $r^*=(r^*(\theta))_{\theta\geqslant 0}$ 将有非常简单的结构:

$$r^*(\theta)=f^*(\theta)+g^*(\theta)W^*_\theta,$$

其中 $f^*(\theta)=f(T^*(\theta))$, $g^*(\theta)=g(T^*(\theta))$.

在 Black-Karasinski 模型 (16) 中,

$$d\ln r(t)=(\alpha(t)-\gamma^2(t)-\beta(t)\ln r(t))dt+\gamma(t)dW_t. \tag{34}$$

按照同一个公式 (30) 确定 $T(t)$, 我们 (对于某个新的维纳过程 $W^*=(W_t^*)_{t\geqslant 0}$) 求得

$$r(t)=F(f(t)+g(t)W^*_{T(t)}), \tag{35}$$

其中 $g(t)$ 由公式 (29) 来确定,

$$f(t)=g(t)\left[r(0)+\int_0^T\frac{\alpha(s)-\gamma^2(s)}{g(s)}ds\right] \tag{36}$$

以及 $F(x)=e^x$.

对于 Sandman-Sonderman 模型 (17)–(18), 类似地可求得

$$r(t)=F(f(t)+W^*_{T(t)}), \tag{37}$$

其中 $F(x)=\ln(1+e^x)$, $T(t)=\int_0^t \gamma^2(s)ds$,

$$f(t)=\ln\xi(0)+\int_0^t\left(\alpha(s)-\frac{1}{2}\gamma^2(s)\right)ds.$$

正如 W. Schmidt 在著作 [426] 中所注意到, 在所有考察过的 "显式" 表示中, 利率都有形式 (35). 这一状况导致下列非常一般的模型.

Schmidt 模型 (W. Schimidt, [426]; 1997 年):

$$r(t)=F(f(t)+g(t)W_{T(t)}), \tag{38}$$

其中 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 是某个维纳过程, $T(t)$ 和 $F(x)$ 是非负连续严格递增函数, $t\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$; $f=f(t)$ 和 $g=g(t)$ 是连续函数, 并且 $g(t)>0$.

注意, 在这个模型中, "新" 时间 $\theta=T(t)$ 是 "老" 时间 t 的确定函数, 因而, 过程 $X_t=f(t)+g(t)W_{T(t)}$ 是高斯过程, 并且适当选择的函数 $F(x)$ 可用来得到利率 $r(t)$ 的各种分布.

6. Schmidt 模型 (38) 还有这样的吸引力: 它的 "离散化" 可用自然的方式得到利率演变的离散模型, 其中只需借助随机游走来运用某种维纳过程的逼近.

例如, 如果对于 $n\geqslant 1$,

$$T_i^{(n)}=\inf\left\{t\geqslant 0\colon T(t)>\frac{i}{n}\right\},$$

$i=0,1,\cdots$, 以及 $(\xi_i^{(n)})$ 是 Bernoulli 随机变量序列, 且有 $\mathsf{P}(\xi_i^{(n)}=\pm 1/\sqrt{n})=\frac{1}{2}$, 那么由

$$W_t^{(n)}=\sum_{i=1}^{[nT(t)]}\xi_i^{(n)},\qquad W_0^{(n)}=0$$

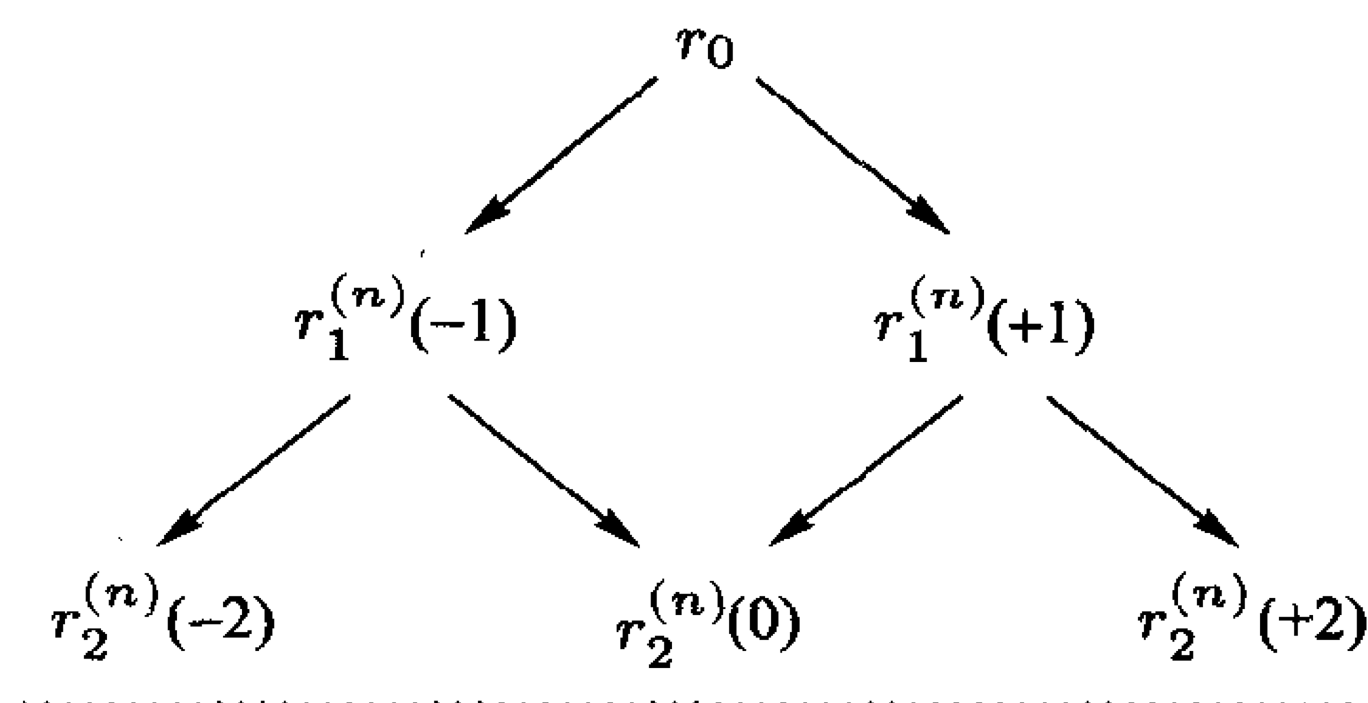
所定义的 (按段常数) 过程 $W^{(n)}=(W_t^{(n)})_{t\geqslant 0}$ 当 $n\to\infty$ 时弱收敛于维纳过程 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$.

令

$$r_i^{(n)}(j)=F\left(f(t_i^{(n)})+g(t_i^{(n)})\frac{j}{\sqrt{n}}\right),\qquad j=0,\pm 1,\cdots,\pm i.$$

我们得到利率演变的离散序列版本 $r^{(n)}=(r_i^{(n)})_{i=0,1,\cdots}$, 其中 $r_i^{(n)}$ 取值 $r_i^{(n)}(j)$, $j=0,\pm 1,\cdots,\pm i$, 并且认为 $r_0^{(n)}=r_0$; 然后假定, 以概率 $\frac{1}{2}$ 使状态 $r_i^{(n)}(j)$ $(j=0,\pm 1,\cdots,\pm i)$ 或者转向状态 $r_{i+1}^{(n)}(j+1)$, 或者转向 $r_{i+1}^{(n)}(j-1)$.

这样的构造显然导致 (参见 [426]) 利率演变的二叉树模型, 它可 (对于给定的 $n=1,2,\cdots$) 描绘为下列样式:



§4b. 股票价格的标准扩散模型 (几何布朗运动) 及其推广

1. 在前面 (第一章 §1b) 已经注意到, 第一个描述股票价格 $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ 演变的模型是 L. Bachelier 的线性模型 (1900 年)

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t, \tag{1}$$

其中 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 是标准布朗运动 (维纳过程).

尽管从原理的视角来看, 这是把概率论的概念用于金融市场分析的决定性的一步, 但是从一开始就很明显, 模型 (1) 有许多不足, 其中首先是量 S_t (其含义是股票的价格) 可能取负值.

在这方面, 重要的是由 P. Samuelson [420] 所作出的下一步, 其中提出股票价格用几何 (或者正如他也说过的经济) 布朗运动来描述:

$$S_t = S_0 e^{\mu t} e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}. \tag{2}$$

换句话说, P. Samuelson 假定, 不是价格 S_t, 而是这些价格的对数服从型为 (1) 的线性模型:

$$\ln\frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t. \tag{3}$$

由 Itô 公式 (§3d) 立即得到

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t). \tag{4}$$

这样, 如果把这个表达式改写为另一种 (有点含糊的) 形式

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{5}$$

那么变得明显的是, (按时间步长 Δ 的) 离散逼近可写成下列形式 ($\Delta S_t = S_t - S_{t-\Delta}$):

$$\frac{\Delta S_t}{S_{t-\Delta}} \approx \mu\Delta + \sigma\Delta W_t,$$

它非常类似于表达式

$$\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} = \rho_n, \tag{6}$$

其中 ρ_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测, 它在前面被用来 (参见例如, 第二章 §2a 中的第 6 点) 描述在离散时间情形下的股票 (更确切地说, 股票价格) 的演变.

有意思的是也可把表示式 (5) 与对于 (相伴的) 银行账户 $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$ 的表达式来比较, 后者服从方程

$$dB_t = rB_t dt, \tag{7}$$

其中 (常) 利率 $r>0$.

如果所考虑的金融市场由分别服从方程 (7) 和 (4) 的银行账户 $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$ 和股票 $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ 所构成, 那么我们将说, 我们涉及*标准扩散* (B,S) (Black-Merton-Scholes)-*模型*或者*标准扩散* (B,S)-*市场*.

这个标准扩散模型是 1973 年由 F. Black 和 M. Scholes [44] 以及 R. Merton [346] 在为期权定价时所考察的. 正是这个模型联系着欧式期权的合理 (公平) 价格的著名的*Black-Scholes 公式*. (后面的第八章就讨论这个问题.)

相当明显的是, 标准模型基于不太现实的假定. 事实上, 其中假定银行账户的利率 r 是常数 (其实它是波动的), 变化率系数 (波动率) σ 和增长系数 μ 也是常数 (其实它们随时间而改变). 在导出*Black-Scholes 公式*时还假定 (参见以后的第八章中的 §§1b, c), (B,S) 是 "无摩擦" 市场 (没有交易费用, 不分红, 获得数据和采取决策无延迟等等), 使得有可能在银行账户中存取任何金额, 以及买卖任何数量的股票.

所有这些都说明, 标准的 (B,S)-市场的扩散模型大大简化了实际, 但是它仍然是最为流行的模型.

与此相联系的是, F. Black ([41], 1988 年) 的下列关于所考察的模型的 "简单性" 的主张声誉卓著:

> *"简单性有其自身的力量. 人们采用这个简单模型, 是因为他们容易理解在他们的假定中的偏差. 这个模型很好地作为一阶近似, 并且如果你看到在所作的假设中的 '窟窿', 那么你可以改进这个模型, 而代之以它的进一步的细化."*

2. 这种先验的自然完善之一在于在所考察的模型中, 其中的常数 r, μ 和 σ 取代为确定性的或者 (与 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 相协调的) 随机函数 $r(t)$, $\mu(t)$ 和 $\sigma(t)$:

$$dB_t = r(t)B_t dt, \tag{8}$$

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(t)dW_t). \tag{9}$$

当然, 在考察较复杂的模型时, 必定先要从试验发现的事实出发, 而这种事实既不能用标准 (B,S)-模型来说明, 又不能被 (B,S)-模型所 "把握". 但是, 另一方面, 更为细化的模型不应该复杂得 "不能进行任何计算".

在这方面, 应该注意到所谓*微笑效应* (smile effect), 它正是那种不能用标准 (B,S)-模型来解释的事实, 而导致它的各种各样的推广和完善.

微笑效应的实质如下.

设股票价格满足 $S_0 = 1$ (为了简单) 的方程 (4), 而 $\mathbb{C} = \mathbb{C}(\sigma, T, K)$ 是有偿付函数为 $f_T = \max(S_T - K, 0)$ 的标准欧式买入期权的合理价格.

对于 $\mathbb{C}$ 的 Black-Scholes 公式 (参见第一章 §1b 中的 (9), 更详细的参见第八章中的 §§1b, c) 对这个价格与波动率 σ、执行时间 T 和执行价格 K 给出显式依赖关系.

然而, 人们可转向金融市场上这些期权对于给定的 T 和 K 的价格的现实存在, 并把它们与理论值 $\mathbb{C}$ 相比较.

设在金融市场上的这个 (现实) 价格为 $\widehat{\mathbb{C}}(T, K)$.

我们求出 $\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(T, K)$ 作为下列方程的解:

$$\mathbb{C}(\sigma, T, K) = \widehat{\mathbb{C}}(T, K),$$

其中 $\mathbb{C}(\sigma, T, K)$ 由 Black-Scholes 公式来确定.

量 $\widehat{\sigma}(T, K)$ 称为隐含 (implied) 波动率, 它就可用来说明原来的标准模型的某些"窟窿" (F. Black 的说法) 的特征. 实际上, 试验上已经确立

(a) 固定 K, 量 $\widehat{\sigma}(T, K)$ 随 T 的变化而变化;

(b) 固定 T, 量 $\widehat{\sigma}(T, K)$ 也随 K 的变化而变化, 并且是下凸的函数 (这点说明了"微笑效应" 这一名称).

为了考虑所观察到的效应 (a), R. Merton 提出 ([346], 1973 年), 在标准模型中认为 μ 和 σ 是时间的函数 ($\mu = \mu(t), \sigma = \sigma(t)$), 并且这样的模式实际上也在金融市场中运用, 特别是在计算美式期权定价时那样做.

微笑效应 (b) 更为微妙, 为了说明这点, 引入了各种各样的标准模型的复杂化 ("带跳跃的扩散" 型模型, "随机波动率" 型模型等等都属于这一类).

这方面最为清楚透彻的是 B. Dupire ([121], [122]) 所提出的模型, 其中假定

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t), \tag{10}$$

这里 $\sigma = \sigma(S, t)$ 是某个依赖于状态 S 和时间 t 的函数.

在上面提到的著作 [121] 和 [122] 中, B. Dupire 还指出, 市场的 "无套利性和完全性" 允许利用标准欧式买入期权对于执行时间 T 和执行价格 K 的 (在时刻 $t \leqslant T$ 和在状态 $S_t = s$ 的) 价格 $\mathbb{C}_{s,t}(K, T)$ 的现实观察值来估计未知的波动率.

3. 标准扩散 (B, S)-模型 (4) 和 (7) 的复杂化在思路上非常类似于在离散时间情形下的简单模型的复杂化.

正是出于这一点, 我们记得 (参见第二章 §1d), 在离散时间情形下, 我们从下列表示式出发

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \tag{11}$$

其中 $H_n = h_1 + \cdots + h_n$ 以及 $h_n = \mu_n + \sigma_n\varepsilon_n$, 而 μ_n 和 σ_n 是非随机量以及 $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0,1)$.

如果在 (9) 中系数 $\mu(t)$ 和 $\sigma(t)$ 是非随机的, 那么 S_t 可写成下列形式:

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \tag{12}$$

其中

$$H_t = \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}\right) ds + \int_0^s \sigma(s) dW_s. \tag{13}$$

显然, 在这一情形下, H_t 有高斯分布, 并且 (12) 是表示式 (11) 的连续类比.

同时, 在第二章的 §1d 中, 曾经考察过*AR, MA, ARMA* 等模型, 其中波动率 σ_n 被认为是常数 ($\sigma_n \equiv \sigma = \text{Const}$), 而 μ_n 由 "过去的" 值 $h_{n-1}, h_{n-2}, \cdots$ 和 $\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \cdots$ 来确定.

最后, 在*ARCH* 和*GARCH* 模型中, 假定 $h_n = \sigma_n\varepsilon_n$, 并且认为波动率 σ_n 依赖于 "过去" (参见例如, 第二章 §1d 中的 (19)).

我们强调, 在所有这些模型中, 只有一个随机源, 它就是白 (高斯) 噪声 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$.

在 "随机波动率" 模型 (参见第二章 §1d 中的第 7 点) 中则假定有两个随机源: 独立白 (高斯) 噪声 $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ 和 $\delta = (\delta_n)$. 这时, $h_n = \sigma_n\varepsilon_n$, 其中 $\sigma_n = e^{\frac{1}{2}\Delta_n}$, 且

$$\Delta_n = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Delta_{n-i} + c\delta_n \tag{14}$$

(参见第二章 §3c).

在连续时间情形下, 同样可考察*ARCH–GARCH* 型模型以及随机波动率型模型的各种类比.

例如对于第二种类型, 就有下列形式的模型 (比较第二章 §3a 中的 (37) 和 (38)):

$$dS_t = S_t(\mu(t, S_t, \sigma_t)dt + \sigma_t dW_t^{\varepsilon}), \tag{15}$$

$$d\Delta_t = a(t, \Delta_t)dt + b(t, \Delta_t)dW_t^{\delta}, \tag{16}$$

其中 $\Delta_t = \ln \sigma_t^2$, 而 $W^{\varepsilon} = (W_t^{\varepsilon})_{t\geqslant 0}$, $W^{\delta} = (W_t^{\delta})_{t\geqslant 0}$ 是两个独立维纳过程. (类似的模型在著作 [235], [364], [432], [477] 中讨论.)

在运作型为 (15) 和 (16) 的模型时, 当只观察过程 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ (而不观察波动率过程 $\sigma = (\sigma_t)_{t\geqslant 0}$) 时, 我们就面临市场的 "不完全性问题", 在这样的市场中, 不能唯一地定义例如诸如期权的合理价格之类的重要概念, 并且导致采用更复杂的上价格和下价格的分析. 参见第五章 §1b.

在这方面, "*ARCH–GARCH*" 型的扩散模型在连续时间情形下, 有其特有的吸引力, 它们在金融资产的定价中能用来发展 "无套利性和完全性" 技巧.

这种*Markov* 型的模型的例子是上面考察过的 B. Dupire 模型 (10).

遵循在 “*ARCH–GARCH*” 模型中的 “对过去的依赖性” 的想法, 自然导致例如考察表示式

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \tag{17}$$

其中扩散过程 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 是由单个维纳过程生成的*多维扩散过程*

$$(H_t, H_t^1, \cdots, H_t^{n-1})_{t\geqslant 0}$$

的分量.

具有有理谱密度的高斯平稳过程可作为对应的例子, 它可看作满足线性随机微分方程的多维 Markov 过程的分量. (详情参见 [303] 中的定理 15.4 和方程组 (15.64).)

4. 我们继续考察上面引入的扩散模型, 它将在第七章中描述股票价格的动态变化, 并且在那里将从 “无套利性和完全性” 的视角来研究这些模型.

在第一章中已经注意到, *无套利概念*也就是在我们的叙述中被我们所认定的合理建立的市场的经济学概念. 在离散时间情形下, “资产定价第一基本定理” (参见第五章 §2b) 给出在 (B, S)-市场上的无套利机会的鞅判别准则, 其中对银行账户 $B = (B_n)_{n\geqslant 0}$ 和对股票 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 加上一定的限制.

完全一样, 在连续时间情形下, 自然期待 (B, S)-市场的*无套利概念*要对股票价格的动态变化和银行账户的动态变化加上一定的限制 (参见第七章).

应该注意, 连续时间情形 (与离散时间情形相比) 更为微妙; 其中许多方面不但涉及相应的随机分析工具的技巧上的复杂性, 也涉及连续交易与离散交易的原则区别.

另一个重要问题有关 (B, S)-市场的结构具体化, 它联系着市场的*完全性*, 即, 构建其资本在需要的时刻复制 “支付义务” 的资产组合的可能性 (详情参见第五章 §1b).

一般来说, 这种期待的性质多半是例外, 而不是惯例. 然而, 尤其引人注目的是, 在扩散 (B, S)-市场的情形下, 相当一般的完全性条件将成立 (参见第七章中的 §4a).

§4c. 债券族的价格期限结构的扩散模型

1. 在本书的开始 (第一章 §1a), 我们已经描述性地给出了作为金融债务的债券及其市场价格 $\mathsf{P}(t, T)$ 的表示式.

同样, 我们也引入了债券的某些特征, 诸如*初始价格* $\mathsf{P}(0, T)$, *面值* $\mathsf{P}(T, T)$ (为了确定起见, 假定它为 1), *当前利率*, *到期获利*等等. 也已经注意到, 价格 $\mathsf{P}(t, T)$ $(0 \leqslant t < T)$ 作为随机对象族, 在一定的意义下, 其结构问题比股票的概率结构问题更为复杂.

困难之一在于, 如果对于函数 $\mathsf{P}(t, T)$ *给定* T, 并把 $\mathsf{P}(t, T)$ 对于 $0 \leqslant t \leqslant T$ 看作变量为 t 的随机过程, 那么首先应该注意到, 这个过程必定是*带条件的*, 因为 $\mathsf{P}(T, T) = 1$.

这种过程的典型例子是在 §3a 中所考察的布朗桥 $X = (X_t)_{t \leqslant T}$, 它服从方程

$$dX_t = \frac{1 - X_t}{T - t} dt + dW_t,$$

其中 $X_0 = \alpha$, 并且它有这样的性质: 当 $t \uparrow T$ 时, $X_t \to 1$.

类似于 L. Bachelier 为对股票价格建模而运用线性布朗运动 (参见 §4b 中的 (1)), 在债券情形下, $X = (X_t)_{t \leqslant T}$ 可被认为是描述价格 $\mathsf{P}(t, T)$ $(t \leqslant T)$ 演变的某个可能的模型.

这里发生的困难在于, 在股票情形下, 量 X_t $(t > 0)$ 取值一般来说是 $\mathbb{R}$ 上的任意值, 而按照债券价格的自身含义, 它必定满足条件 $0 < \mathsf{P}(t, T) \leqslant 1$.

在为债券价格建模时的另一个困难在于, 通常在债券的金融市场中, 债券是以不同的到期时间 T 出现的, 并且购买者的组合中可包含不同的债券. 因此, 债券价格演变的自然模型必须不仅要对于固定的 T 来建立, 而是要立即对某个子集 $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}_+$ 来建立, 这个子集要把市场上出现的债券的所有可能的到期时间都包括在内. 这时金融市场中必定无套利机会, 即, 形象地说, 必定没有机会来购买某些债券然后再出售它而无任何风险地获利.

2. 在构造到期时间为 T 的债券 (我们将称它为 T-债券) 价格 $\mathsf{P}(t, T)$ $(t \leqslant T)$ 的期限结构模型时, 我们假定 $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$. 换句话说, 我们将认为, 存在价格为 $\{\mathsf{P}(t, T), 0 \leqslant t \leqslant T, T \in \mathbb{R}_+\}$ 的整个 (连续) 债券族.

这时也将认为, 所有债券没有中间 (息票) 支付, 即我们将只考虑零息票债券 (zero-coupon bonds).

注 1. 在英文金融文献中, 所有为描述资产价格的期限结构的建模论证都 (十分流行地) 称为 "利率期限结构 (The term structure of interest rates)".

3. 在处理一种 T-债券或者一族 T-债券时 $(T > 0)$, 要引进一系列经常在建立各种模型及其分析中运用的它的特征.

为此, 我们把价格 $\mathsf{P}(t, T)$ 表示为下列形式:

$$\mathsf{P}(t, T) = e^{-r(t,T)(T-t)}, \quad t \leqslant T, \tag{1}$$

$$\mathsf{P}(t, T) = e^{-\int_t^T f(t,s)\,ds}, \quad t \leqslant T, \tag{2}$$

其中 $r(t, T)$ 和 $f(t, s)$ $(0 \leqslant t \leqslant s \leqslant T)$ 是某两个非负函数.

很明显,

$$r(t, T) = -\frac{\ln \mathsf{P}(t, T)}{T - t}, \qquad t < T, \tag{3}$$

以及 (假定 $\mathsf{P}(t, T)$ 关于 $T > t$ 可微)

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln \mathsf{P}(t, T), \qquad t \leqslant T. \tag{4}$$

对于一种有零息票支付的 T-债券的情形来说, 我们利用下列公式 (参见第一章 §1a 中的 (6)) 对 $t \leqslant T$ 引入它的*收益*或者*到期收益* $\rho(T-t,T)$:

$$\mathsf{P}(t,T) = e^{-(T-t)\ln(1+\rho(T-t,t))}. \tag{5}$$

把这个公式与 (1) 相比较, 我们看到,

$$r(t,T) = \ln(1+\rho(T-t,t)). \tag{6}$$

这个量通常也称为 T-债券关于余下时间 $T-t$ 的*收益* (yield), 而函数 $t \rightsquigarrow r(t,T)$ 称为 (对于 $t \leqslant T$) 的 *T-债券的收益曲线*.

量 $r(t,T)$ 在考察有不同到期时间 $T>t$ 的*不同* T-债券时也有用. 在这一情形下, 函数 $T \rightsquigarrow r(t,T)$ 也称为 *T-债券族* (在时刻 t 的) *收益曲线*.

为了在以后对一种债券和债券族这两种情形不加区分, 我们将把函数 $r(t,T)$ 看作*两个变量* t 与 T 的函数, 并认为 $0 \leqslant t \leqslant T$ 和 $T>0$; 它仍然称为*收益*.

量 $f(t,T)$ 通常称为在时刻 t 签约的合约的*远期利率*.

在以后所有的分析中起关键作用的是时刻 t 的*利率* (即时利率, spot rate) $r(t)$, 它通过远期利率定义为:

$$r(t) = f(t,t). \tag{7}$$

由这个定义很明显, 联系时刻 t 的利率 $r(t)$ 刻画了债券价格在无限小区间 $(t,t+dt)$ 中的变化速度.

还要注意到, $r(t,T)$ 和 $f(t,T)$ 通过下列关系式联系在一起:

$$f(t,T) = r(t,T) + (T-t)\frac{\partial r(t,T)}{\partial T}, \tag{8}$$

它直接由 (4) 和 (1) 得到.

这样, 比如, 假定导数 $\dfrac{\partial r(t,T)}{\partial T}$ 在 $T=t$ 时有限, 那么

$$r(t) = f(t,t) = r(t,t) \quad \left(= \lim_{T\downarrow t} r(t,T)\right). \tag{9}$$

4. 现在转向关于描述债券价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 动态变化的问题. 这里有两种基本途径: *间接的*和*直接的*. (比较第一章 §1b 中的第 5 点.)

在第一种途径中, 价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 表示为下列形式:

$$\mathsf{P}(t,T) = F(t,r(t);T), \tag{10}$$

其中 $r=(r(t))_{t\geqslant 0}$ 是某个 “利率”.

在这样的模型中, 整个价格结构用唯一的因子 $r = (r(t))_{t\geqslant 0}$ 来确定, 它说明为什么这样的模型称为单因子模型.

这样的模型的一个重要而又适于解析研究的子类是函数 $F(t, r(t); T)$ 由下列形式来描述的子类:

$$F(t, r(t); T) = e^{\alpha(t,T)-r(t)\beta(t,T)}. \tag{11}$$

这种模型称为*仿射模型*或者有时也称为*指数仿射模型*, [117], [119], 因为 $\ln F(t, x; T)$ 是关于 x 的线性函数 $\alpha(t,T) - x\beta(t,T)$, 其中 $\alpha(t,T)$ 和 $\beta(t,T)$ 是某两个函数.

另一种广为人所知的途径是在著作 [219] 中运用的, 并按照其作者的姓 (D. Heath, R. Jarrow, A. Morton) 称对应的模型为*HJM-模型*.

在 [219] 中提出的途径的实质在于求出作为下列随机微分方程的解的价格 $\mathsf{P}(t,T)$ (比较 §4b 中的 (4)):

$$d\mathsf{P}(t,T) = \mathsf{P}(t,T)(A(t,T)dt + B(t,T)dW_t), \tag{12}$$

其中 $A(T,T) = B(T,T) = 0$ 以及 $\mathsf{P}(T,T) = 1$, 或者是求解对于远期利率 $f(t,T)$ 的方程

$$df(t,T) = a(t,T)dt + b(t,T)dW_t. \tag{13}$$

现在, 有益的是回忆起这里和以后都假定给定某个渗透概率空间 (随机基底)

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P}).$$

假定, 所有被考察的函数 ($\mathsf{P}(t,T)$, $f(t,T)$, $A(t,T)$ 等等) 对于 $t \leqslant T$ 都是 $\mathscr{F}_t$-可测的. 照例, $W = (W_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是标准维纳过程, 并假定, 确保 (12) 和 (13) 中的随机积分存在和方程 (12) 的解存在的可积性必要条件满足.

由价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 和远期利率 $f(t,T)$ 之间的关系式 (2), 运用 Itô 公式和随机 Fubini 定理 (参见 [303] 中的引理 12.5 或者 [395]) 可求得下列在 [219] 中引入的方程 (12) 和 (13) 中的系数 $(A(t,T), B(t,T))$ 和 $(a(t,T), b(t,T))$ 之间的联系公式:

$$a(t,T) = \frac{\partial B(t,T)}{\partial T} B(t,T) - \frac{\partial A(t,T)}{\partial T}, \tag{14}$$

$$b(t,T) = -\frac{\partial B(t,T)}{\partial T} \tag{15}$$

以及

$$A(t,T) = r(t) - \int_t^T a(t,s)ds + \frac{1}{2}\left(\int_t^T b(t,s)ds\right)^2, \tag{16}$$

$$B(t,T) = -\int_t^T b(t,s)ds. \tag{17}$$

由 (13) 也可求得,

$$dr(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial T}(t,t) + a(t,t)\right) dt + b(t,t)dW_t. \tag{18}$$

注 2. 在许多著作 (参见例如, [38], [359], [421]) 中, 取代远期利率 $f(t,T)$, 而使用它的修正 $\widetilde{r}(t,x)$, 其中

$$\widetilde{r}(t,x) = f(t,t+x).$$

使用这个量的最大好处在于它能达到一系列解析上的简化. 在这样的重新参数化下, 例如, 公式 (2) 看起来就被简化为

$$\mathsf{P}(t,T) = \exp\left\{-\int_0^{T-t} \widetilde{r}(t,x)dx\right\}. \tag{19}$$

5. 债券价格 $\mathsf{P}(t,T)$ 的结构以及远期利率 $f(t,T)$ 和利率 $r(t)$ 的结构的进一步的细节, 将在第七章中从相应的 T-债券市场中的 "无套利性和完全性" 的视角来给出. 这里我们仅仅注意到, 正如在 (B,S)-市场情形中那样 (参见前面的 §4b 中的第 4 点), 我们所采用的 T-债券市场的 "无套利性概念", 将自动对方程 (12) 和 (13) 中的系数以及仿射模型 (11) 中的系数 $\alpha(t,T)$ 和 $\beta(t,T)$ 以及利率, 加上一定的结构限制; 从而, 由此分离出债券市场无套利模型的自然类.

5. 半鞅模型

§5a. 半鞅和随机积分

1. 面对前面提出的描述诸如股票价格之类的金融指数演变的各种各样的模型, 自然会提出这样的问题: 怎样区分出某个足够一般的随机过程类, 使得它一方面能包括上面考察的许多模型, 另一方面又适用于解析研究.

从许多方面来看, 半鞅类就是这样的类, 即 (可能但不唯一地) 表示为下列形式的随机过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 的类:

$$X_t = X_0 + A_t + M_t, \tag{1}$$

其中 $A = (A_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是有界变差过程 $(A \in \mathscr{V})$, 而 $M = (M_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是局部鞅 $(M \in \mathscr{M}_{\text{loc}})$, 它定义在某个也称为随机基底的下列满足常设条件的渗透概率空间上:

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P}),$$

这里常设条件是指 σ-代数 $\mathscr{F}_t$ $(t \geqslant 0)$ 有右连续性, 并要求 σ-代数 $\mathscr{F}_t$ $(t \geqslant 0)$ 包含所有 $\mathscr{F}$ 中的零概率集合 (比较 §3b 中的第 3 点).

假定 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是关于 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的协调 (适应) 过程, 且有右连续轨线 $t \rightsquigarrow X_t(\omega), \omega\in\Omega$, 以及轨线对每个 $t>0$ 存在左极限 (简称 "右连左极"). (在法文中, 这样的过程称为*càdlàg* 过程, 它来自 *C*ontinu *À* *D*roite avec des *L*imites *À* *G*auche.)

2. 转向半鞅有几个理由. 首先, 这个类非常广, 它包括离散时间过程 $X=(X_n)_{n\geqslant 0}$ (在下列意义下: 它们与过程 $X^*=(X^*)_{t\geqslant 0}$ (其中 $X_t^*=X_{[t]}$, 而显然有 X^* 属于类 $\mathscr{V}$) 之间有一一对应), 扩散过程, 带跳跃的扩散过程, 点过程, 独立增量过程 (除了某些例外, 参见 [250; 第 II 章, §4c]) 以及许多其他过程.

半鞅类对于许多变换都是*稳定的*: 测度的绝对连续替换, 时间替换, 局部化程序, 渗透替换等等. (详情参见 [250; 第 I 章, §4c].)

其次, 对于半鞅存在发展成熟的随机分析工具, 它基于对诸如*Markov 时刻*, *鞅*, *上鞅和下鞅*, *局部鞅*, *可选和可料 σ-代数和过程*等等概念的运作.

在一定的意义下, 对于半鞅的随机分析的成功在于对它们可定义*随机积分*, 并且*Itô 公式*成立 (§5c).

注 1. 在现代随机分析奠基者之一 P.-A. Meyer 的著作 [139; 附录] 中, 对半鞅的随机分析和随机积分的基本概念和思想给出了紧凑而又引人入胜的描述.

其上给定半鞅的随机基底 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$ 的要素是 σ-代数*流* $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的概念. 正如已经在第一章 §2a 中所注意到, 对于金融理论来说, 这个概念也起着关键作用; 这样的流就是金融市场上的 "信息" 流, 投资者和交易者都在此基础上作出他们的决策.

当然, 需要注意的是, 在建立 (从金融理论的视角来看) "自然的" 模型时, 也会转向*不是*半鞅的过程. 在这方面典型的是上面 (§2c) 考察过的有任何 Hurst 参数 $0<\mathbb{H}<1$ 的分形布朗运动 $B^{\mathbb{H}}=(B_t^{\mathbb{H}})_{t\geqslant 0}$, 其中仅仅要除去 $\mathbb{H}=1/2$ 的情形, 它对应 (通常的) 布朗运动.

3. 现在转向对半鞅的随机积分的概念, 它用来描述自融资的资本演变再好不过.

设 $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是某个在随机基底 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$ 上的半鞅, 而 $\mathscr{E}$ 是下列形式的*简单函数*类:

$$f(t,\omega)=Y_0(\omega)I_{\{0\}}(t)+\sum_i Y_i(\omega)I_{(r_i,s_i]}(t), \tag{2}$$

它是有限个*基本函数*

$$f_i(t,\omega)=Y_i(\omega)I_{(r_i,s_i]}(t) \tag{3}$$

的线性组合, 其中 $Y_i(\omega)$ 是 $\mathscr{F}_{r_i}$-可测的随机变量; 比较 §3c.

正如在维纳过程 (布朗运动) 的情形下, 形为 (2) 的简单函数 f 的对半鞅 X 的*随机积分* $I_t(f)$ 的 "自然" 定义 (记为 $(f\cdot X)_t$, $\int_0^t f(s,\omega)dX_s$ 和 $\int_{(0,t]} f(s,\omega)dX_s$), 是

值

$$I_t(f) = \sum_i Y_i(\omega)[X_{s_i \wedge t} - X_{r_i \wedge t}], \tag{4}$$

其中 $a \wedge b = \min(a, b)$.

注 2. 从金融理论的视角来看, 随机积分

$$I_t(f_i) = Y_i(\omega)[X_{s_i \wedge t} - X_{r_i \wedge t}]$$

有完全清澈的解释: 如果 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ 比如说是股票价格, 而你在时刻 r_i 以价格 X_{r_i} 购买股票 "量 $Y_i(\omega)$", 那么 $Y_i(\omega)[X_{s_i} - X_{r_i}]$ 恰好就是该股票在时刻 s_i 当其价格变为 X_{s_i} 时的获利 (也可能是负的).

应该强调, 在这个简单函数的随机积分 $I(f) = (I_t(f))_{t \geqslant 0}$ 的定义中, 没有任何必要假定 X 是半鞅, 因为表达式 (4) 对于任何过程 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ 都有意义.

然而, 当要求把 (保持其 "自然" 性质的) 积分概念从简单函数类扩充到更广的函数 $f = f(t, \omega)$ 的类上, 半鞅假定就变成决定性的假定.

在过程 $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ 是布朗运动时, 根据 §3c, 随机积分 $I_t(f)$ 可对每个 (可测) 函数 $f = (f(s, \omega))_{s \leqslant t}$ 来定义, 只要 $f(s, \omega)$ 为 $\mathscr{F}_s$-可测以及

$$\int_0^t f^2(s, \omega) ds < \infty \qquad \text{(P-a.s.)}. \tag{5}$$

这时, 关键在于这样的函数可用简单函数 $(f_n, n \geqslant 1)$ 来逼近, 而其相应的积分 $(I_t(f_n), n \geqslant 1)$ 收敛, 至少是按概率收敛. 相应的极限值记为 $I_t(f)$, 并称它为 f 对布朗运动 (在区间 $(0, t]$ 上的) 随机积分.

在把布朗运动取代为任意的半鞅的情形下, 随机积分 $I_t(f)$ 的构造同样基于用简单函数 $(f_n, n \geqslant 1)$ 来逼近 f 的想法, 其中积分 $I_t(f_n)$ 有定义, 而当 $n \to \infty$ 时, 逐渐向极限过渡.

然而, 这里的逼近问题开始变得更复杂, 并且对函数导致要附加某些与 X 的半鞅性质相 "协调" 的限制.

4. 为了说明这一点, 我们引入对于 $X = M$ 的情形的有关结果, 其中 $M = (M_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 是 $\mathscr{H}^2$ 类的平方可积鞅 $(M \in \mathscr{H}^2)$, 即有性质为

$$\sup_{t \geqslant 0} \mathsf{E} M_t^2 < \infty \tag{6}$$

的鞅.

设 $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 是鞅 $M \in \mathscr{H}^2$ (或 $M \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$) 的平方特征, 根据定义, 它是可料 (参见下面的定义 2) 不减过程, 使得过程 $M^2 - \langle M \rangle = (M_t^2 - \langle M \rangle_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 是鞅 (参见 §5b 和比较第二章 §1b).

已知 (参见例如, [303; 第 5 章]):

A) 如果过程 $\langle M\rangle$ 关于 t (P-a.s.) 绝对连续, 那么简单函数集合 $\mathscr{E}$ 在可测函数 $f=f(t,\omega)$ 的空间 L_1^2 中稠密, 这里 f 满足

$$\mathsf{E}\int_0^\infty f^2(t,\omega)d\langle M\rangle_t<\infty. \tag{7}$$

换句话说, 可求得简单函数序列 $f_n=(f_n(t,\omega))_{t\geqslant 0}$, $\omega\in\Omega$, $n\geqslant 1$, 使得

$$\mathsf{E}\int_0^\infty |f(t,\omega)-f_n(t,\omega)|^2 d\langle M\rangle_t\to 0. \tag{8}$$

我们察觉, 对于标准布朗运动 $B=(B_t)_{t\geqslant 0}$ 来说, 平方特征 $\langle B\rangle_t\equiv t$, $t\geqslant 0$.

B) 如果过程 $\langle M\rangle$ (P-a.s.) 连续, 那么简单函数集合 $\mathscr{E}$ 在空间 L_2^2 中稠密, 这里 L_2^2 由满足 (7) 以及对于每个 (有限) Markov 时刻 $\tau=\tau(\omega)$, 量 $f(\tau(\omega),\omega)$ 为 $\mathscr{F}_\tau$-可测的可测函数 $f=(f(t,\omega))_{t\geqslant 0}$ 所组成.

C) 在一般的不对 $\langle M\rangle$ 附加轨线的光滑性条件的情形下, 简单函数集合 $\mathscr{E}$ 在可测函数 $f=(f(t,\omega),\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的空间 L_3^2 中稠密, 其中 f 满足条件 (7), 并在下列意义下可料.

先设 $X=(X_n,\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是某个给定在随机基底上的随机序列. 对应于标准定义 (参见第二章 § 1b), 序列 X 的可料性意味着对于所有 $n\geqslant 1$, 量 X_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测.

在连续时间情形下, 同样有 (在随机基底 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$ 上的) 最为合适的可料性概念如下.

我们考察空间 $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 上的使得所有映射 $(t,\omega)\rightsquigarrow Y(t,\omega)$ 可测的极小 σ-代数 $\mathscr{P}$, 这里 (可测) 函数 $Y=(Y(t,\omega))_{t\geqslant 0,\omega\in\Omega}$ 有 (对每个 $\omega\in\Omega$ 的关于 t 的) 左连续的轨线, 并且对于每个 $t\geqslant 0$ 为 $\mathscr{F}_t$-可测.

定义 1. $\mathbb{R}_+\times\Omega$ 中的子集的 σ-代数 $\mathscr{P}$ *称为可料集的 σ-代数.*

定义 2. 给定在随机基底 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathsf{P})$ 上的随机过程 $X=(X_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ 称为*可料的*, 是指映射 $(t,\omega)\rightsquigarrow X(t,\omega)$ $(=X_t(\omega))$ 为 $\mathscr{P}$-可测.

5. 所引入的有关函数 f 逼近的结果可用来类比布朗运动情形, 对于每个 $M\in\mathscr{H}^2$, (等距) 定义随机积分

$$I_\infty(f)=\int_0^\infty f(s,\omega)dM_s. \tag{9}$$

积分 $I_t(f)$ 对于 $t>0$ 于是可借助于公式

$$I_t(f)=\int_0^\infty I(s\leqslant t)f(s,\omega)dM_s \tag{10}$$

来定义.

重要的是要强调, 如果在 $\langle M\rangle$ 上不附加光滑性条件 (正如在条件 A) 和 B) 中那样), 那么所引入的讨论指出, 在 $M\in\mathscr{H}^2$ 的情形下, 随机积分 $I(f)=(I_t(f))_{t>0}$ 对于任何可料有界函数可定义.

把随机积分 $I_t(f)$ 的概念再推广的下一步在于考察可料局部有界函数 f 和 $\mathscr{H}^2_{\text{loc}}$ 类的局部平方可积鞅; 这一随机积分也可记为 $(f\cdot X)_t$, 以强调对它导入积分的过程 X. (如果 $\mathscr{K}$ 是某个过程类, 那么我们说, 过程 $Y=(Y_t(\omega))_{t\geqslant 0}$ 属于 $\mathscr{K}_{\text{loc}}$ 类, 是指可求得 Markov 时刻序列 $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$, 使得 $\tau\uparrow\infty$, 使得 "停止" 过程对于 $n\geqslant 1$, $Y^{\tau_n}=(Y_{t\wedge\tau_n})_{t\geqslant 0}\in\mathscr{K}$; 比较第二章 §1c 中的定义.)

如果 (τ_n) 是 (对于局部有界函数 f 和 $M\in\mathscr{H}^2_{\text{loc}}$ 的) 局部化序列, 那么根据上面给出的对于有界函数 f 和 $M\in\mathscr{H}^2$ 的随机积分的构造, 定义积分 $f\cdot M^{\tau_n}=((f\cdot M^{\tau_n})_t)_{t\geqslant 0}$. 这时, 不难看出, 对于不同的 $n\geqslant 1$, 下列协调性质满足: $(f\cdot M^{\tau_{n+1}})^{\tau_n}=f\cdot M^{\tau_n}$.

由此得出, 存在 (精确到随机无区别) 唯一的过程, 记为 $f\cdot M=((f\cdot M)_t)_{t\geqslant 0}$, 对于所有 $n\geqslant 1$, 满足

$$(f\cdot M)^{\tau_n}=f\cdot M^{\tau_n}.$$

这样确定的过程 $f\cdot M=(f\cdot M)_{t\geqslant 0}$ 属于 $\mathscr{H}^2_{\text{loc}}$ 类 (详情参见 [250; 第 I 章, §4d]), 并称它为 f 对 M 的随机积分, 或者随机过程积分.

6. 在构造局部有界可料函数 $f=f(t,\omega)$ 对半鞅 $X=(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的随机积分 $f\cdot X$ 的结局性的一步基于有关半鞅结构的下列注记.

根据定义, 半鞅是表示为形式 (1) 的过程, 其中 $A=(A_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是有界变差过程, 即 $\int_0^t|dA_s(\omega)|<\infty$, $t>0$, $\omega\in\Omega$ 以及 $M=(M_t,\mathscr{F}_t)$ 是局部鞅.

一个一般鞅论的重要结果在于, 每个局部鞅有 (一般来说, 不是唯一的) 分解

$$M_t=M_0+M'_t+M''_t,\qquad t\geqslant 0,\tag{11}$$

其中 $M'=(M'_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 和 $M''=(M''_t,\mathscr{F})_{t\geqslant 0}$ 是局部鞅, $M'_0=M''_0=0$, 并且 M'' 有有界变差 (记为 $M''\in\mathscr{V}$), 而 $M'\in\mathscr{H}^2_{\text{loc}}$. (参见 [250] 中的第 I 章的命题 4.17.)

这样, 每个半鞅 $X=(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 可表示为下列形式:

$$X_t=X_0+A'_t+M'_t,\tag{12}$$

其中 $A'=A+M''$ 以及 $M'\in\mathscr{H}^2_{\text{loc}}$.

对于局部有界函数 f (对于每个 $\omega\in\Omega$) 定义 Lebesgue-Stieltjes 积分

$$(f\cdot A')_t=\int_{(0,t]}f(s,\omega)dA'_s,\tag{13}$$

而如果函数 f 同时还是可料的, 那么定义随机积分 $(f\cdot M')_t$; 自然, 还可令

$$(f\cdot X)_t=(f\cdot A')_t+(f\cdot M')_t,\tag{14}$$

来定义积分 $(f\cdot X)_t$.

为使这样的随机积分定义准确, 当然要指出, 它的值 (精确到随机无区别) 不依赖于表示式 (12) 的特殊性; 即, 如果同时还有 $X_t = X_0 + \overline{A}_t + \overline{M}_t$, 使得 $\overline{A}\in\mathscr{V}$, $\overline{M}\in\mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$, 那么

$$f\cdot A' + f\cdot M' = f\cdot\overline{A} + f\cdot\overline{M}. \tag{15}$$

对于基本函数 f 来说, 这个性质显然, 而再由线性性, 它也对简单函数 $(f\in\mathscr{E})$ 保持成立. 如果函数 f 为可料且有界, 那么它们可用简单函数 f_n 来逼近, 使得 f_n 逐点收敛于 f. 利用这一事实和局部化程序, 我们得到所要求的性质 (15).

注 3. 关于上述断言的证明细节以至对半鞅 (包括取向量值的半鞅) 的随机积分的各种其他构造, 参见例如, [248], [250], [303] 以及后面第七章的 §1a.

7. 余下的是要指出*局部有界*函数 f 对半鞅的随机积分的某些性质 (参见 [250; 第 I 章] 中的性质 (4.33)–(4.37)):

(a) $f\cdot X$ *是半鞅*;

(b) 映射 $f\rightsquigarrow f\cdot X$ *是线性映射*;

(c) 如果 X 是局部鞅 $(X\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}})$, 那么 $f\cdot X$ 也将是*局部鞅*;

(d) 如果 $X\in\mathscr{V}$, 那么随机积分将重合于 Stieltjes 积分;

(e) $(f\cdot X)_0=0$ 以及 $f\cdot X = f\cdot(X-X_0)$;

(f) $\Delta(f\cdot X)=f\Delta X$, 其中 $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$;

(g) 如果 g 是可料局部有界函数, 那么 $g\cdot(f\cdot X)=(gf)\cdot X$.

我们还要特别区分出下列关于随机积分号下的极限过渡可能性的 (Lebesgue 控制收敛定理型) 结果:

(h) 如果 $g_n = g_n(t,\omega)$ 是可料过程列, 它逐点收敛于 $g=g(t,\omega)$, 并且 $|g_n(t,\omega)|\leqslant G(t,\omega)$, 其中 $G=(G(t,\omega))_{t\geqslant 0}$ 是某个局部有界可料过程, 那么按测度收敛 $g_n\cdot X\to g\cdot X$ 成立 (在任何有限区间上是一致的):

$$\sup_{s\leqslant t}|g_n\cdot X - g\cdot X| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{16}$$

8. 联系上述可料函数 f 对半鞅 X 的随机积分 $f\cdot X$ 的构造, 自然产生是否可能借助于更简单的诸如 "Riemann 积分" 观念那样的程序的问题.

在这方面, 左连续函数 $f=(f(t,\omega))_{t\geqslant 0}$ 的情形使人感兴趣.

为了陈述相应的结果, 我们引入下列定义 ([250; 第 I 章, §4d.]).

对于每个 $n\geqslant 1$ 设

$$T^{(n)} = \{\tau^{(n)}(m), m\geqslant 1\}$$

是 Markov 时刻 $\tau^{(n)}(m)$ 的族, 并在集合 $\{\tau^{(n)}(m)<\infty\}$ 上满足 $\tau^{(n)}(m)\leqslant\tau^{(n)}(m+1)$.

我们将说, 序列 $T^{(n)}$, $n \geqslant 1$ 是*Riemann 序列*, 是指对于每个 $t \in \mathbb{R}_+$ 和 $\omega \in \Omega$,

$$\sup_m [\tau^{(n)}(m+1) \wedge t - \tau^{(n)}(m) \wedge t] \to 0. \tag{17}$$

我们把随机积分 $(f \cdot X)_t$ 联系它的 $T^{(n)}$-*Riemann 逼近*:

$$T^{(n)}(f \cdot X)_t = \sum_m f(\tau^{(n)}(m), \omega)[X_{\tau^{(n)}(m+1)\wedge t} - X_{\tau^{(n)}(m)\wedge t}]. \tag{18}$$

果然, 在过程 $f = (f(t,\omega), \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 有左连续轨线时, 所引入的 $T^{(n)}$-Riemann 逼近 $T^{(n)}(f \cdot X)$ 在每个有限区间 $[0,t]$ $(t > 0)$ 上按测度一致收敛于 $f \cdot X$:

$$\sup_{u\leqslant t} |T^{(n)}(f \cdot X)_u - (f \cdot X)_u| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{19}$$

证明非常简单. 令

$$f^{(n)}(t,\omega) = \sum_m f(\tau^{(n)}(m), \omega) I\{(t,\omega) \colon \tau^{(n)}(m) < t \leqslant \tau^{(n)}(m+1)\}. \tag{20}$$

函数 $f^{(n)} = f^{(n)}(t,\omega)$ 可料, 且逐点收敛于 f, 因为 f 左连续.

设 $K_t = \sup\limits_{s\leqslant t} |f_s|$. 显然, 过程 $K = (K_t, \mathscr{F}_t)$ 左连续, 局部有界, 且 $|f^{(n)}| \leqslant K$.

于是, 根据性质 (h),

$$\sup_{u\leqslant t} |(f^{(n)} \cdot X)_u - (f \cdot X)_u| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,$$

以及所要求的断言 (19) 由察觉 $T^{(n)}(f \cdot X) = f^{(n)} \cdot X$ 而得到.

§5b. Doob-Meyer 分解. 补偿量. 二次变差

1. 在离散时间情形下, 有 $\mathsf{E}|H_n| < \infty$ $(n \geqslant 0)$ 的 (任意!) 随机序列 $H = (H_n, \mathscr{F}_n)$ 的 "鞅" 分析的重要手段是*Doob 分解*

$$H_n = H_0 + A_n + M_n, \tag{1}$$

其中 $A = (A_n, \mathscr{F}_{n-1})$ 是可料序列, 而 $M = (M_n, \mathscr{F}_n)$ 是鞅 (参见第二章 §1b 中的公式 (1)-(5)).

在连续时间情形下 (对于下鞅) 恰好起着相应作用的是*Doob-Meyer 分解*, 它与随机积分概念一起成为对于半鞅的随机分析的基础.

设 $H = (H_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是下鞅, 即它是有 $\mathscr{F}_t$-可测和可积的 H_t $(t \geqslant 0)$ 的随机过程, 并且它有 càdlàg (右连左极) 轨线, 以及满足下鞅性质:

$$\mathsf{E}(H_t \,|\, \mathscr{F}_s) \geqslant H_s \quad (\mathsf{P}\text{-a.s.}), \quad s \leqslant t. \tag{2}$$

我们将说, 任意的随机过程 $Y=(Y_t)_{t\geqslant 0}$ 属于*Dirichlet* 类 (D) 是指

$$\sup_{\tau}\mathsf{E}\{|Y_\tau|I(|Y_\tau|\geqslant c)\}\to 0,\qquad c\to\infty, \tag{3}$$

其中 sup 对所有有限 Markov 时刻来取. 换句话说, 随机变量族

$$\{Y_\tau\colon \tau \text{ 是有限 Markov 时刻}\}$$

是一致可积的.

定理 1 (Doob-Meyer 分解). 每个 (D) 类的下鞅 H 有 (且仅有) 分解

$$H_t=H_0+A_t+M_t, \tag{4}$$

其中 $A=(A_t,\mathscr{F}_t)$ 是有 $\mathsf{E}A_t<\infty$, $t>0$, $A_0=0$ 的可料递增过程, 而 $M=(M_t,\mathscr{F}_t)$ 是一致可积鞅.

由关系式 (4) 可见, 每个 (D) 类下鞅是半鞅, 并且有这样的性质: 过程 A 属于类 $\mathscr{V}$ (参见 §5a 中的第 6 点), 并且可料.

这一状况是在半鞅 $X=(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的类中区分出一个特殊半鞅子类的基础, 对于这一子类, 存在有可料过程 $A=(A_t,\mathscr{F}_t)$ 的表示式 (4).

在离散时间情形下, Doob 分解具有唯一性 (参见第二章 §1b). 完全一样, 如果对于特殊半鞅有两个带可料有界变差过程的表示式 (4), 那么这两个表示式重合.

有益的是还要察觉到, 其实, 每个特殊半鞅是两个局部下鞅 (或者与此相等价, 局部上鞅) 之差.

注 1. Doob-Meyer 分解是 "鞅论" 中很难的结果. 这里不引入它的证明 (参见例如, [103], [248], [303]), 而只停留在阐述它怎样可能从对于离散时间的 Doob 分解出发而得到.

设 $X=(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是下鞅, $X^{(\Delta)}=(X_t^{(\Delta)},\mathscr{F}_t^{(\Delta)})_{t\geqslant 0}$ 是它的离散 Δ-逼近, 且

$$X_t^{(\Delta)}=X_{[t/\Delta]\Delta},\qquad \mathscr{F}_t^{(\Delta)}=\mathscr{F}_{[t/\Delta]\Delta}.$$

根据对于离散时间的 Doob 分解,

$$X_t^{(\Delta)}=X_0+A_t^{(\Delta)}+M_t^{(\Delta)},$$

其中

$$\begin{aligned}A_t^{(\Delta)}=A_{[t/\Delta]\Delta}^{(\Delta)}&=\sum_{i=1}^{[t/\Delta]}\mathsf{E}\left(X_{i\Delta}^{(\Delta)}-X_{(i-1)\Delta}^{(\Delta)}\,\middle|\,\mathscr{F}_{(i-1)\Delta}^{(\Delta)}\right)\\&=\frac{1}{\Delta}\int_0^{[t/\Delta]\Delta}\mathsf{E}\left(X_{[s/\Delta]\Delta+\Delta}-X_{[s/\Delta]\Delta}\,|\,\mathscr{F}_{[s/\Delta]\Delta}\right)ds.\end{aligned}$$

因此, 自然期待在 Doob-Meyer 分解中出现的不减可料过程 $A=(A_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 能以下列方式求得:

$$A_t=\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\int_0^t \mathsf{E}(X_{s+\Delta}-X_s\,|\,\mathscr{F}_s)ds;$$

如果这样的过程确定, 那么余下要做的全在于证明, 补偿过程 $X-A=(X_t-A_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是一致可积鞅.

由上所说也就变得很清楚, 为什么在 Doob-Meyer 分解中, 过程 $A=(A_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 称为下鞅 X 的补偿量.

2. 由 Doob-Meyer 分解可导出若干有益的推论 (参见 [250; 第 I 章, §3b]), 其中我们注意到如下一些:

推论 1. 每个有 $X_0=0$ 的有界变差可料局部鞅 $X=(X_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 随机无区别于零.

推论 2. 设 $A=(A_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 属于 $\mathscr{A}_{\mathrm{loc}}$ 类, 即它是局部可积过程. 那么存在 (精确到随机无区别) 唯一的称为 A 的**补偿量**的可料过程 $\widetilde{A}=(\widetilde{A}_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, 使得 $A-\widetilde{A}$ 是局部鞅. 如果同时还有过程 A 不减, 那么补偿量 $\widetilde{A}$ 也将不减.

3. 我们转向半鞅的二次变差和二次协变差的概念, 它们在随机分析中起着重要作用. (这些半鞅的特征例如将明显出现在下面 (§5c) 导出的 Itô 公式中.)

在离散时间情形下, 鞅的二次协变差已经在第二章的 §1b 中引入.

在连续时间情形下, 这个定义可如下推广.

定义 1. 对于两个半鞅 X 和 Y, 如下定义的过程 $[X,Y]=([X,Y]_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 称为它们的二次协变差:

$$[X,Y]_t=X_tY_t-\int_0^t X_{s-}dY_s-\int_0^t Y_{s-}dX_s-X_0Y_0. \tag{5}$$

(我们察觉, 在 (5) 中出现的随机积分有定义, 因为左连续过程 (X_{t-}) 和 (Y_{t-}) 是局部有界的.)

定义 2. 对于半鞅 X, 如下定义的过程 $[X,X]=([X,X]_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 称为它的二次变差:

$$[X,X]_t=X_t^2-2\int_0^t X_{s-}dX_s-X_0^2. \tag{6}$$

对于 $[X,X]$ 也使用记号 $[X]$; 比较第二章 §1b 中的 (10).

我们察觉, 由定义 (5) 和 (6) 立即导出 "极化" 关系式:

$$[X,Y]=\frac{1}{4}([X+Y,X+Y]-[X-Y,X-Y]). \tag{7}$$

下列讨论回答了为什么 $[X,Y]$ 和 $[X,X]$ 称为二次协变差和二次变差.

设 $T^{(n)}$, $n \geqslant 1$, 是 Riemann 序列 (参见 §5a 中的第 8 点), 并且

$$S_t^{(n)}(X,Y) = \sum_m (X_{\tau^{(n)}(m+1)\wedge t} - X_{\tau^{(n)}(m)\wedge t})(Y_{\tau^{(n)}(m+1)\wedge t} - Y_{\tau^{(n)}(m)\wedge t}). \tag{8}$$

于是对于每个 $t > 0$,

$$\sup_{u \leqslant t} |S_u^{(n)}(X,Y) - [X,Y]_u| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty, \tag{9}$$

特别是,

$$\sup_{u \leqslant t} |S_u^{(n)}(X,X) - [X,X]_u| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad n \to \infty. \tag{10}$$

为证明 (10) 只需注意到 (参见 (6))

$$S_u^{(n)}(X,X) = X_u^2 - X_0^2 - 2T^{(n)}(X_- \cdot X)_u \tag{11}$$

以及根据性质 §5a 中的性质 (19),

$$T^{(n)}(X_- \cdot X)_u \to (X_- \cdot X)_u = \int_0^u X_{s-} dX_s.$$

断言 (9) 由 (10) 和 "极化" 关系式 (7) 来得到.

4. 由 (10) 可见, 过程 $[X,X]$ 不减. 由于这是 càdlàg (右连左极) 过程, 故 $[X,X] \in \mathscr{V}^+$, 而这就是说, (由 (7)) 过程 $[X,Y] \in \mathscr{V}$, 即它有有界变差.

后一事实与公式 (5) 一起可证明下列结果: *任意两个半鞅的乘积也是半鞅.*

公式 (5) 可改写为下列形式

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_{s-} dY_s + \int_0^t Y_{s-} dX_s + [X,Y]_t, \tag{12}$$

其中过程 $[X,Y]$ 由 (7) 来定义, 它可看作采用直观形式的*对于半鞅的分部积分公式*; 如果写成微分形式, 那么它变为:

$$d(XY) = X_- dY + Y_- dX + d[X,Y]. \tag{13}$$

显然, 这个公式可看作下列对于序列 $X = (X_n)$ 和 $Y = (Y_n)$ 的经典关系式的半鞅推广:

$$\Delta(X_n Y_n) = X_{n-1}\Delta Y_n + Y_{n-1}\Delta X_n + \Delta X_n \Delta Y_n. \tag{14}$$

在关于 X 和 Y 的不同假定下可求得许多二次协变差和二次变差的性质, 例如, 见书 [250; 第 I 章, §4e].

我们只注意其中的有关 $Y \in \mathscr{V}$ 的某些性质:

a) 如果半鞅 X 或 Y 之一连续, 那么 $[X,Y] = 0$;

b) 如果 X 是半鞅, Y 是有界变差可料过程, 那么

$$[X,Y]=\Delta Y\cdot X \qquad \text{以及} \qquad XY=Y\cdot X+X_{-}\cdot Y;$$

c) 如果 Y 是可料过程, X 是局部鞅, 那么 $[X,Y]$ 是局部鞅;

d) $\Delta[X,Y]=\Delta X\Delta Y$.

5. 除了所引入的经常被形象地称为"方括号"的过程 $[X,Y]$ 和 $[X,X]$ 以外, 在随机分析中起重要作用的还有下面引入的称为"角括号"的过程 $\langle X,Y\rangle$ 和 $\langle X,X\rangle$.

设 $M=(M_t,\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathscr{H}^2$ 类的平方可积鞅. 于是, 由 Doob 不等式 (参见例如, [303]; 对于布朗运动情形参见 §3b 中的 (36)),

$$\mathsf{E}\sup_t M_t^2\leqslant 4\sup_t \mathsf{E}M_t^2<\infty. \tag{15}$$

由此导出, (根据 Jensen 不等式) 过程 M^2 是下鞅, 且属于 (D) 类. 于是由 Doob-Meyer 分解得到, 存在不减的可料可积过程, 记为 $\langle M,M\rangle$ 或者 $\langle M\rangle$, 使得差 $M^2-\langle M,M\rangle$ 是一致可积鞅.

在 $M\in\mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ 的情形下, 对应的局部化使得我们可断定, 也存在不减可料过程, 再记为 $\langle M,M\rangle$ 或者 $\langle M\rangle$, 使得 $M^2-\langle M\rangle$ 是局部平方可积鞅.

如果有两个 $\mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ 类的鞅 M 和 N, 那么它们相互间的"角括号" $\langle M,N\rangle$ 用下列公式来定义:

$$\langle M,N\rangle=\frac{1}{4}(\langle M+N,M+N\rangle-\langle M-N,M-N\rangle). \tag{16}$$

直接可见, $\langle M,N\rangle$ 是有界变差的可料过程, 并且 $MN-\langle M,N\rangle$ 是局部鞅.

由公式 (5) 得到, $MN-[M,N]$ 也是局部鞅. 因此, 如果鞅 M 和 N 属于 $\mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$ 类, 那么 $[M,N]-\langle M,N\rangle$ 是局部鞅.

对应于第 2 点中的推论 2, 可料过程 $\langle M,N\rangle$ 称为过程 $[M,N]$ 的补偿量. 这时, 经常运用下列记号:

$$\langle M,N\rangle=\widetilde{[M,N]}. \tag{17}$$

注 2. 在离散时间情形下, 对于平方可积鞅 $M=(M_n,\mathscr{F}_n)$ 和 $N=(N_n,\mathscr{F}_n)$, 对应的序列 $[M,N]$ 和 $\langle M,N\rangle$ 由下列公式来定义

$$[M,N]_n=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k\Delta N_k \tag{18}$$

以及

$$\langle M,N\rangle_n=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}(\Delta M_k\Delta N_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1}), \tag{19}$$

其中 $\Delta M_k=M_k-M_{k-1}$, $\Delta N_k=N_k-N_{k-1}$. (比较第二章 §1b.)

公式 (19) 暗示, 在连续时间情形下, 一种虽是形式、却很直观的二次协变差的记法是

$$\langle M, N\rangle_t = \int_0^t \mathsf{E}(dM_s dN_s \mid \mathscr{F}_s). \tag{20}$$

(比较第 1 点最后的注 1 中的对于 A_t 的公式.)

6. 余下的是要对于半鞅定义 "角括号" 以及它与 "方括号" 的联系问题.

设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是有分解为 $X = X_0 + M + A$ 的半鞅, 其中 M 是局部鞅 ($M \in \mathscr{M}_{\text{loc}}$) 以及 A 是有界变差过程 ($A \in \mathscr{V}$).

除了上面已经用过的局部鞅 M 的表示式 $M = M_0 + M' + M''$ 以外, 其中 $M'' \in \mathscr{V} \cap \mathscr{M}_{\text{loc}}$, $M' \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}} \cap \mathscr{M}_{\text{loc}}$ (参见 §5a 中的 (11)), 每个局部鞅 M 可 (唯一) 表示为下列形式:

$$M = M_0 + M^c + M^d, \tag{21}$$

其中 $M^c = (M^c_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是连续局部鞅, $M^d = (M^d_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是纯间断局部鞅. (局部鞅 X 称为纯间断的, 是指 $X_0 = 0$, 并且它正交于所有连续鞅 Y, 即 XY 是局部鞅; 详情参见 [250; 第 I 章, §4b].)

因此, 每个半鞅 X 可表示为下列形式:

$$X = X_0 + M^c + M^d + A.$$

尤其引人注目的是, 对于半鞅 X 来说的连续鞅成分 M^c 唯一确定 (这是 Doob-Meyer 分解的推论; 详情参见 [250; 第 I 章, 4.18 和 4.27]), 这就说明为什么一般都把它记为 X^c.

可以证明 ([250; 第 I 章, 4.52]), 如果 X 是半鞅, 那么

$$[X, X]_t = \langle X^c, X^c\rangle_t + \sum_{s\leqslant t} (\Delta X_s)^2, \tag{22}$$

并且如果 X 和 Y 是半鞅, 那么 (其中 $\langle X, Y\rangle_t \equiv \langle X^c, Y^c\rangle_t$)

$$[X, Y]_t = \langle X, Y\rangle_t + \sum_{s\leqslant t} \Delta X_s \Delta Y_s. \tag{23}$$

注 3. 对局部鞅 M 来说, 对于每个 $t > 0$,

$$\sum_{s\leqslant t} (\Delta M_s)^2 < \infty \qquad (\mathsf{P}\text{-a.s.}) \tag{24}$$

并且过程

$$[M, M] \in \mathscr{A}_{\text{loc}}. \tag{25}$$

(参见例如, [250; 第 I 章, §4b].)

由于对于有界变差过程 A, $\sum_{s\leqslant t}(\Delta A_s)^2 < \infty$ (P-a.s.), $t > 0$, 故对于每个半鞅 $X = X_0 + M + A$,

$$\sum_{s\leqslant t}(\Delta A_s)^2 < \infty \quad (\text{P-a.s.}), \quad t > 0. \tag{26}$$

因此, 考虑到 (24),

$$\sum_{s\leqslant t}(\Delta X_s)^2 < \infty \quad (\text{P-a.s.}), \quad t > 0.$$

从而, (22) 和 (23) 的右端有定义, 且有限 (P-a.s.).

§5c. 半鞅的 Itô 公式. 某些推广

1. 定理 (Itô 公式). 设过程

$$X = (X^1, \cdots, X^d)$$

是 d-维半鞅, $F = F(x_1, \cdots, x_d)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的 C^2 类函数.

那么过程 $F(X)$ 也是半鞅, 且

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i\leqslant d}(D_iF(X_-)) \cdot X^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j\leqslant d}(D_{ij}F(X_-)) \cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle$$
$$+ \sum_{s\leqslant t}\left[F(X_s) - F(X_{s-}) - \sum_{i\leqslant d} D_iF(X_{s-})\Delta X_s^i\right], \tag{1}$$

其中 $D_iF = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}, D_{ij}F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$.

证明可在许多随机分析的专著中找到 (参见例如, [103], [248], [250]).

2. 我们讨论两个能显示 Itô 公式在各种随机分析问题中的效率的例子.

例 1 (*Doléan*方程和随机指数). 设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是给定的半鞅. 考察在 càdlàg 过程 (右连左极过程) 类中求下列 Doléan 方程的解 $Y = (Y_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$:

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-} dX_s, \tag{2}$$

该方程也可写成微分形式:

$$dY = Y_- dX, \qquad Y_0 = 1. \tag{3}$$

对下列过程

$$X_t^1 = X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t,$$
$$X_t^2 = \prod_{0<s\leqslant t}(1 + \Delta X_s)e^{-\Delta X_s}, \qquad X_0^2 = 1, \tag{4}$$

以及函数 $F(x_1, x_2) = e^{x_1} \cdot x_2$ 应用 Itô 公式, 可验证, 过程

$$\mathscr{E}(X)_t = F(X_t^1, X_t^2), \qquad t \geqslant 0,$$

即过程

$$\mathscr{E}(X) = (\mathscr{E}(X)_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0} \tag{5}$$

有

$$\mathscr{E}(X)_t = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c \rangle_t} \prod_{0<s\leqslant t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}, \tag{6}$$

是

1) 半鞅;

2) 满足 Doléan 随机方程 (2);

尤其是, 在有 càdlàg 轨线的过程类中, 称为 (Doléan) 随机指数的过程 $\mathscr{E}(X)$ 是方程 (2) 的 (精确到随机无区别的) 唯一解. (对于复值半鞅情形下的证明和推广参见 [250; 第 I 章, §4f].)

例 2 (*Lévy 定理*; §3b). 设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 是有 $\langle X \rangle_t \equiv t$ 的连续局部鞅. 那么 X *是布朗运动*.

为了证明这点, 我们考察函数 $F(x) = e^{i\lambda x}$, 并运用 Itô 公式 (对实部和虚部分别应用). 于是我们求得

$$e^{i\lambda X_t} = 1 + i\lambda \int_0^t e^{i\lambda X_s} dX_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t e^{i\lambda X_s} ds. \tag{7}$$

积分 $\int_0^t e^{i\lambda X_s} dX_s$ 是局部鞅. 令 $\tau_n = \inf\{t \colon |X_t| \geqslant n\}$, 并设 $\mathsf{E}(\cdot; A)$ 为对集合 A 的平均. 于是如果 $A \in \mathscr{F}_0$, 那么由 (7) 可得,

$$\mathsf{E}(e^{i\lambda X_{t\wedge\tau_n}}; A) = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \mathsf{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} e^{i\lambda X_s} ds; A\right). \tag{8}$$

由此当 $n \to \infty$ 时, 对于 $f_A(t) = \mathsf{E}(e^{i\lambda X_t}; A)$, $t \geqslant 0$, 我们得到关系式

$$f_A(t) = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t f_A(s) ds, \qquad t \geqslant 0, \tag{9}$$

并且很明显, $|f_A(t)| \leqslant 1$ 以及 $f_A(0) = \mathsf{P}(A)$.

满足所述条件的方程 (9) 的唯一解是

$$f(A) = e^{-\frac{\lambda^2}{2} t} \mathsf{P}(A). \tag{10}$$

这样,

$$\mathsf{E}(e^{i\lambda X_t} \mid \mathscr{F}_0) = e^{-\frac{\lambda^2}{2} t}.$$

类似地可指出, 对于任何 $s \leqslant t$,

$$\mathsf{E}(e^{i\lambda(X_t-X_s)} \mid \mathscr{F}_s) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}. \tag{11}$$

因此, 过程 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 有独立高斯增量, $\mathsf{E}(X_t - X_s) = 0$, $\mathsf{E}(X_t - X_s)^2 = t - s$. 联系轨线的连续性假定, 由此得到, X (由定义; 参见 §1b) 是布朗运动.

3. Itô 公式是随机分析的重要工具, 它在各个方向上都有推广: 非半鞅 (参见例如 [299]), 非光滑函数 $F = F(X_1, \cdots, X_d)$ 等等情形.

这里我们依照 [166], 对于 $d = 1$, X 是标准布朗运动 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 的情形引入这一方向上的一个结果.

设函数 $F = F(x)$ 绝对连续:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(y)dy; \tag{12}$$

这里我们将假定 (可测) 函数 $f = f(y)$ 属于类 $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^1)$, 即

$$\int_{|x|\leqslant K} f^2(x)dx < \infty \tag{13}$$

对于每个 $K > 0$ 成立.

我们察觉, 无论是过程 $f(B) = (f(B_t))_{t\geqslant 0}$, 还是过程 $F = (F(B_t))_{t\geqslant 0}$, 一般来说都不是半鞅, 因而形为 (1) 的 Itô 公式不能应用.

然而, 在 [166] 中指出, 下列公式成立:

$$F(B_t) = F(0) + \int_0^t f(B_s)dB_s + \frac{1}{2}[f(B), B]_t, \tag{14}$$

其中 $[f(B), B]$ 是过程 $f(B)$ 和 B 的二次协变差, 其定义如下:

$$\begin{aligned}[f(B), B]_t = \mathsf{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_m \big(f(B_{t^{(n)}(m+1)\wedge t}) - f(B_{t^{(n)}(m)\wedge t})\big) \\ \times \big(B_{t^{(n)}(m+1)\wedge t} - B_{t^{(n)}(m)\wedge t}\big),\end{aligned} \tag{15}$$

这里 $T^{(n)} = \{t^{(n)}(m), m \geqslant 1\}$, $n \geqslant 1$, 是满足 §5a 的第 8 点中所引入的性质的 (确定性) 时刻 $t^{(n)}(m)$ 的 Riemann 序列.

重要的是要强调, 由于过程 $f(B)$ 一般来说不是半鞅, 故在 (15) 中的 (按概率 P) 极限存在是一个非平凡的事实. 著作 [166] 的结果之一就在于证明了这个极限的存在.

推论 1. 设函数 $F(x) \in C^2$. 那么

$$[f(B), B]_t = \int_0^t f'(B_s)ds,$$

并且公式 (14) 变为 Itô 公式.

推论 2. 设函数 $F(x) = |x|$. 那么 $[f(B), B]_t = 2L_t(0)$, 其中

$$L_t(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|B_s| \leqslant \varepsilon) ds, \tag{16}$$

它是在区间 $[0, t]$ 上布朗运动在零点处度过的局部时间. 因此, 由 (14) 得到 *Tanaka* 公式:

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{Sgn} B_s dB_s + L_t(0) \tag{17}$$

(比较第二章 §1b 中的例子和 §3e).

我们察觉, 过程 $|B| = (|B_t|, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 是下鞅, 随机积分是鞅, 以及 $L(0) = (L_t(0), \mathscr{F}_t)$ 是连续的 (而这就是说它也是可料的) 不减过程.

因此, 公式 (17) 可看作下鞅 $|B|$ 的 Doob-Meyer 分解的显式.①

另一方面, 再设 $d = 1$, X 是有 Hurst 参数 $\mathbb{H} \in (\frac{1}{2}, 1]$ 的分形布朗运动 $B^{\mathbb{H}} = (B_t^{\mathbb{H}})_{t \geqslant 0}$; 参见 §2c. 与前面一样, 令 $T^{(n)} = \{t^{(n)}(m), m \geqslant 1\}$, $n \geqslant 1$, 是 (确定) 时间 $t^{(n)}(m)$ 的 Riemann 序列.

由于 $\mathsf{E}|\Delta B_t^{\mathbb{H}}|^2 = |\Delta t|^{2\mathbb{H}}$ (参见 §2c 中的 (6)), 故

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{E} \left[\sum_m \left| B^{\mathbb{H}}_{t^{(n)}(m+1) \wedge t} - B^{\mathbb{H}}_{t^{(n)}(m)} \right|^2 \right] = 0,$$

因而, 对于 $\mathbb{H} \in (\frac{1}{2}, 1]$, 我们有

$$\mathsf{P}\text{-} \lim_{n \to \infty} \sum_m \left| B^{\mathbb{H}}_{t^{(n)}(m+1) \wedge t} - B^{\mathbb{H}}_{t^{(n)}(m)} \right|^2 = 0 \tag{18}$$

对于按概率收敛的极限成立.

注. 如果 $\mathbb{H} = \frac{1}{2}$, 那么相应的极限等于 t, 而对于 $\mathbb{H} \in (0, \frac{1}{2})$, 它是 $+\infty$. 通常称有性质 (18) 的过程为零能 (zero-energy) 过程 (参见第四章 §3a 的第 6 点; 也可参见例如, [166]).

设 $F = F(x)$ 是 C^2-函数, $f(x) = F'(x)$.

对于布朗运动 $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$, 我们有

$$dF(B_t) = F'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} F''(B_t)(dB_t)^2, \tag{19}$$

(约定 $(dB_t)^2 = dt$, 详情参见 §3d,) 它给出写成微分形式的下列 *Itô* 公式:

$$dF(B_t) = F'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} F''(B_t) dt. \tag{20}$$

① 由此到本章末的内容只在英文版中有. —— 译者注

性质 (18) 对于参数满足 $\frac{1}{2} < \mathbb{H} \leqslant 1$ 的分形布朗运动 $B^{\mathbb{H}} = (B_t^{\mathbb{H}})_{t\geqslant 0}$ 也保持, 其中作出下列约定看来是完全自然的:

$$(dB_t^{\mathbb{H}})^2 = 0. \tag{21}$$

(比较 §3d 中的 (12)-(14).)

如果我们在展开式 (19) 中用 $B^{\mathbb{H}}$ 取代 B, 那么考虑到 (21), 我们 (在这一步仅仅是形式上) 达到表示式 (重申 $f = F'$)

$$dF(B_t^{\mathbb{H}}) = f(B_t^{\mathbb{H}})dB_t^{\mathbb{H}}, \tag{22}$$

根据随机分析的标准约定, 它必须解释为积分形式: 对于任何 $s < t$, 我们有

$$F(B_t^{\mathbb{H}}) - F(B_s^{\mathbb{H}}) = \int_s^t f(B_u^{\mathbb{H}})dB_u^{\mathbb{H}} \qquad (\mathsf{P}\text{-a.s.}). \tag{23}$$

我们现在将证明这个公式, 为简单起见, 我们只限于讨论 $F \in C^2$ 的情形, 并顺便说明怎样来解释 (23) 中的 "随机积分".

由带积分形式余项的 Taylor 公式,

$$F(x) = F(y) + f(y)(x-y) + \int_y^x f'(u)(x-u)du.$$

因此, 正如在 [166] 和 [299] 中所处理的那样, 对于每个 $T^{(n)}$-划分, $n \geqslant 1$, 我们得到

$$\begin{aligned} &F(B_t^{\mathbb{H}}) - F(B_0^{\mathbb{H}}) \\ &= \sum_m \left[F\left(B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m+1)}\right) - F\left(B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m)}\right) \right] \\ &= \sum_m f\left(B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m+1)}\right)\left(B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m+1)} - B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m)}\right) + R_t^{(n)}, \end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$R_t^{(n)} = \sum_m \int_{B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m)}}^{B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m+1)}} f'(u)\left(B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m+1)} - u\right)du.$$

很清楚, $\mathsf{P}\left(\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t} |f'(B_t^{\mathbb{H}})| < \infty\right) = 1$, 再考虑到 (18), 有

$$|R_t^{(n)}| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{0\leqslant u\leqslant t}|f'(B_u^{\mathbb{H}})| \cdot \sum_m \left|B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m+1)} - B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m)}\right|^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{25}$$

(24) 的左端独立于 n, 并且 $R_t^{(n)} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, 因而, (按测度收敛意义下) 存在

$$\lim_n \sum_m f\left(B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m)}\right)\left(B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m+1)} - B^{\mathbb{H}}_{t\wedge t^{(n)}(m)}\right), \tag{26}$$

我们把它记为

$$\int_0^t f(B_u^{\mathbb{H}})dB_u^{\mathbb{H}}, \tag{27}$$

并称它为关于分形布朗运动 $B^{\mathbb{H}} = (B_u^{\mathbb{H}})_{t\geqslant 0}$ ($\mathbb{H} \in (\frac{1}{2}, 1]$, $f \in C^1$) 的随机积分.

与此同时, 这些论证也证明了所要求的公式 (23), 它可看作对于分形布朗运动的*Itô* 公式的类似.

例 3. 如果 $F(x) = x^2$, 那么 (23) 指出, 对于参数满足 $\frac{1}{2} < \mathbb{H} \leqslant 1$ 的分形布朗运动 $B^{\mathbb{H}}$, 我们有

$$d(B_t^{\mathbb{H}})^2 = 2B_t^{\mathbb{H}}dB_t^{\mathbb{H}}. \tag{28}$$

我们记得, 对于布朗运动 $B = B^{1/2}$,

$$d(B_t)^2 = 2B_t dB_t + dt. \tag{29}$$

例 4. 如果 $F(x) = e^x$, 那么

$$d(e^{B_t^{\mathbb{H}}}) = e^{B_t^{\mathbb{H}}}dB_t^{\mathbb{H}} + \frac{1}{2}e^{B_t^{\mathbb{H}}}dt. \tag{30}$$

对于布朗运动 $B = B^{1/2}$, 我们有

$$d(e^{B_t}) = e^{B_t}dB_t + \frac{1}{2}e^{B_t}dt. \tag{31}$$

我们的讨论还可推广到几个分形布朗运动的情形. 例如, 假定

$$(X_0, X_1, \cdots, X_d) \equiv (B^{\mathbb{H}_0}, B^{\mathbb{H}_1}, \cdots, B^{\mathbb{H}_d}),$$

其中 $\mathbb{H}_0 = \frac{1}{2}$ (因而 $B^{\mathbb{H}_0}$ 是标准布朗运动), 而 $\frac{1}{2} < \mathbb{H}_1 < \mathbb{H}_2 < \cdots < \mathbb{H}_d \leqslant 1$. 如果 $F = F(t, x_0, x_1, \cdots, x_d) \in C^{1,2,\cdots,2}$, 那么 (比较 §3d 中的 (11))

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \left[\frac{\partial F}{\partial x_0}dX_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2}(dX_0)^2\right] + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial F}{\partial x_i}dX_i. \tag{32}$$

例 5. 我们考虑过程

$$S_t = e^{(\mu - \frac{\sigma_0^2}{2})t + \sigma_0 B_t + \sigma_1 B_t^{\mathbb{H}}}, \tag{33}$$

其中 $B = B^{1/2}$ 是标准布朗运动, 而 $B^{\mathbb{H}}$ 是分形布朗运动, 且 $\frac{1}{2} < \mathbb{H} \leqslant 1$. 于是 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 可看作下列随机微分方程的解:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma_0 dB_t + \sigma_1 dB_t^{\mathbb{H}}), \tag{34}$$

其中 $S_0 = 1$. (比较 §4b 中的 (2) 和 (4).)

第四章　金融数据的统计分析

1. 经验数据. 描述它们的概率统计模型. “标记”的统计

§1a. 金融数据的搜集和分析中的结构变化

1. 回顾时间金融数据经验分析的变迁, 可以发现下述状况.

1970 年代以前, 在基本运作中的数据, 都是固定在大时间区间上的数据: 年, 季, 月, 周. 这里 (对于金融指数的对数增量) 出现的典型概率统计模型, 是随机游走 (参见第一章 §2a), 自回归, 移动平均以及它们的组合等等类型的模型, 甚至至今仍然如此. 强调这样一点是重要的: 所有被考察的模型照例都是*线性模型*.

到了 1980 年代, 为进行*日*数据分析, 出现了*非线性模型*, 其中最著名的是*ARCH*, *GARCH* 模型以及它们的众多改进.

1990 年代起, 有可能进行*一日内*的数据分析, 与此相联系的首先是电子计算机的进步以及信息技术 (与数据记录和处理的 “纸张” 技术相比) 的飞速发展, 大大提高了统计信息的搜集、记录、存储和分析的效率, 可以说, 它们是以*几乎连续的方式*来进行的.

2. 除了已经成为常规的甚至通过日报出版和在电视屏幕上观察 (例如, 关于汇率、各种指数值、“开盘” 和 “收盘” 价等等的信息) 以外, 许多信息代理机构 (这里只提几个: 路透 (Reuters), 德励 (Telerate), 奈特瑞德 (Knight Ridder), 彭博 (Bloomberg) 等等) 持续为客户发送包含各种各样内容的数以百万字节计的信息, 例如, 有关即时的外汇买卖价 (bid and ask prices), 以及出现这些价格的银行名称和所在地的信息.

例如, 路透社发布的外汇 (与美元 (USD) 的比价) 信息, 从 7 点 27 分以后, 立即从显示屏上可看到 (参见 [204]):

0727	DEM	RABO	RABOBANK	UTR	1.6290/00	DEM	1.6365	1.6270
0727	FRF	BUEX	UECIC	PAR	5.5620/30	FRF	5.5835	5.5588
0726	NLG	RABO	RABOBANK	UTR	1.8233/38	NLG	1.8309	1.8220

这里: 0727 和 0726 是银行自己发布的格林威治时间 (GMT, Greenwich Mean Time); DEM, FRF, NLG 是外汇的缩写 (德国马克, 法国法郎, 荷兰盾); RABO 和 BUEX 是分别是在乌得勒支 (Utrechet, UTR) 的荷兰合作银行 (RABOBANK) 和在巴黎 (PAR) 的 UECIC 银行的缩写; 1.6290 是买入价 (bid price); 买入价后面的 “00” 意味着卖出价 (ask price) 是 1.6300; 1.6365 和 1.6270 是过去一天直到 7 点 27 分的最高价和最低价. 第三行中的 “0726” 是指 RABOBANK 在 7 点 26 分关于荷兰盾发布 (或表示意向) 自己的报价为 (1.8233/38), 至少在一分钟中没有一个银行 (包括 RABOBANK) 发布新的报价.

如果取时刻 $t_0 = 7$ 点 27 分为时间起点, 那么用*德国马克购买一美元*的价格 (ask

price) $S^a \equiv (\mathrm{DEM}/\mathrm{USD})^a$,

$$S_t^a = \left(\frac{\mathrm{DEM}}{\mathrm{USD}}\right)_t^a, \qquad t \geqslant t_0,$$

将如同图 28 中所画出的那样 (比较 18 页的图 6).

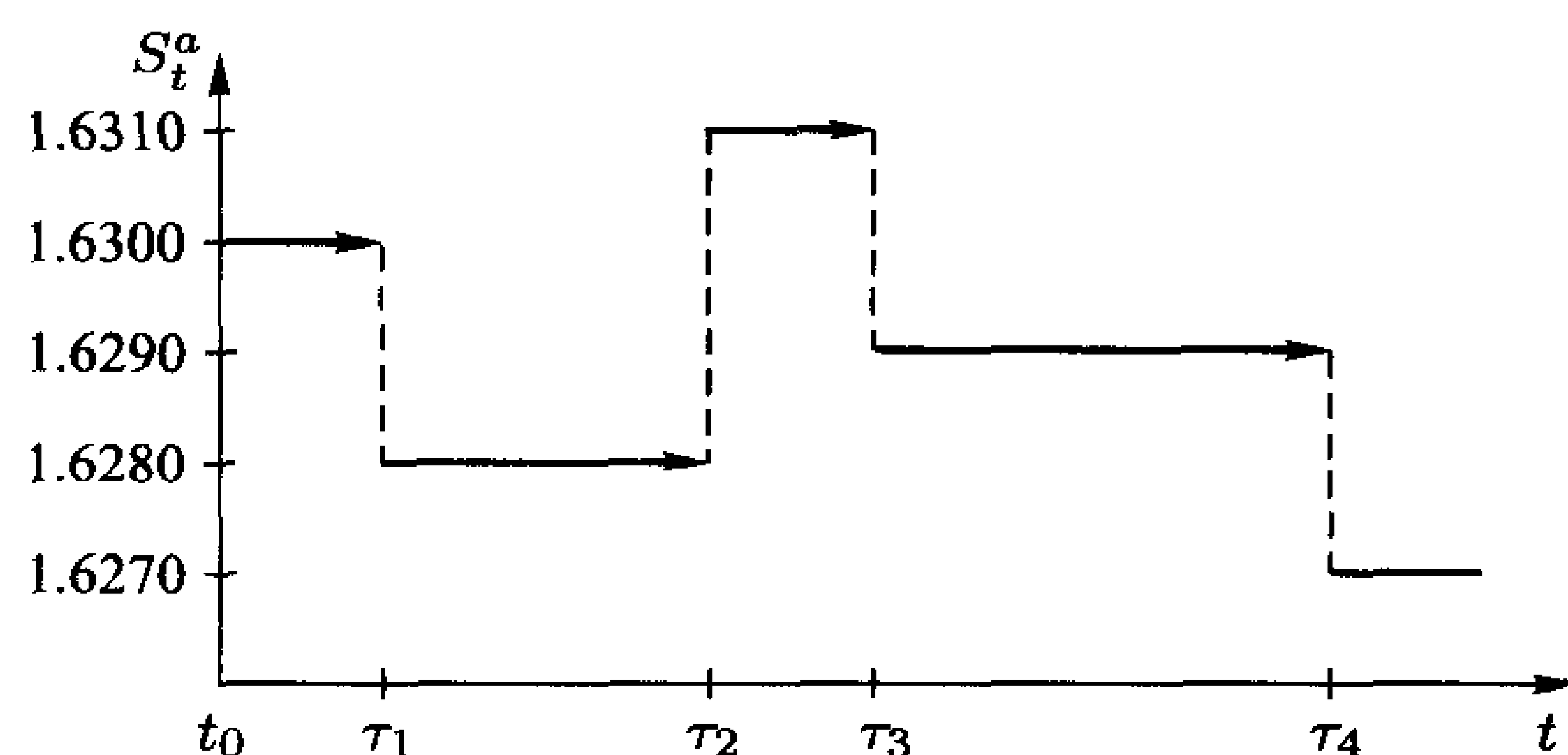


图 28 汇率 $S_t^a = \left(\frac{\mathrm{DEM}}{\mathrm{USD}}\right)_t^a$ $(t \geqslant t_0)$ 的性态

换句话说, (在区间 $[t_0, \tau_1)$ 上的) 某个时间, 价格 S_t^a "停留" 在同一个水平上, 即它不变; 然后在时刻 τ_1 发生变换, 或者如常说的那样, 产生标记 (tick), 它是某个银行在时刻 τ_1 发布的新报价 $S_{\tau_1}^a$, 如此等等.

这里立即产生两个问题:

(I) 标记之间的区间 $(\tau_{k+1} - \tau_k)$ 的长度的统计量是怎样的;

(II) 价格值变化 (绝对量变化 $S_{\tau_{k+1}}^a - S_{\tau_k}^a$ 或相对量变化 $S_{\tau_{k+1}}^a / S_{\tau_k}^a$) 的统计量是怎样的.

由所获得的数据来提取这些信息是汇率和其他金融指数演变统计分析的首要问题, 这些金融指数随时间的动态变化在许多情形, 正是带有如上图所示那样的特征.

当然, 很明显, 这样的统计分析有其构造卖出价过程 (S_t^a), 买入价过程 (S_t^b) 等等的概率统计模型的目的, 以及重要的是, 最终来理解金融指数的演变和价格形成的机制, 以及建立对未来价格运动的预测.

不能不注意到, 统计信息的搜集、记录、储存、处理, 以至制作成便于高速提取的形式, 是非常费事的, 没有高技术是不可能达到的. 但是, 同样明显的是, 享有统计处理的结果并有可能运作运用它们, 这对于在证券市场中的运营: 构建各种项目、证券等等的有效组合, 合理投资, 有着不可估量的好处.

3. 当前的几乎不间断地搜集和获取统计信息的技术可能, 揭示了金融指数性态的极为混乱不堪地随时间展开的高频特征.

这种高频特征在离散化时 (无论是按时间, 还是按相变量) 消失. 这样, 在金融数学中出现 "高频" 争论, 正是由这种几乎不间断获得统计信息的新可能所引起的, 并且也正是这种搜集待处理的信息的现代技术与随时间变化的高频特征一起, 允许揭

示金融指数动态变化中的一系列专有的特点, 其中我们注意到例如有 (这里我们不追究其细节 [1]):

金融指数值形成的非线性特征以及表现为许多指数、价格等等"记住"过去的后效.

4. 为了表达高频性, 也就是, 如同在上图中所描述的演变的外汇汇率中出现标记次数的强度, 同时也为了表达统计数据的海量, 我们引用在本页脚注中提到的"Olsen & Associates" 研究所的数据; 参见 [91] 和 [204], 也参见 [90].

在 1987.1.1—1993.12.31 期间, (根据路透社的数据) DEM/USD 汇率变化 (标记, ticks) 了

8 238 532

次. 其中 1 466 946 次标记发生在 1992.10.1 到 1993.9.30 的一年左右. 同样在这一时期, 对于汇率 JPY/USD 记录了 570 814 次标记. (也参见 §1b 中的表.)

关于这些数据的高频特征可如下判断: 在典型的交易日时间中, 汇率 DEM/USD 平均发生 4.5 千次标记, 而 JPY/USD 的标记发生 2 千来次. 在 1994 年 7 月的某天, DEM/USD 的标记量为 9 千次左右, 每分钟发生 15–20 次标记. (平常一天的每分钟平均发生 3–4 次标记.)

一般来说, 值得注意的是, 在各种货币中, 变化最激烈、频率最高的是汇率 DEM/USD. 有益的是还要考虑到, 各个代理机构所提出的报价 (即买卖价) 不是具体交易时真实的交易价 (transaction prices). 那种数据, 以至交易量的数据, 就我们所知, 很难获得.

5. 其实, 许多其他金融指数也有所介绍的有关外汇汇率的类似特征. 在 [127; 第 284 页] 中的叙述可作为一个例子, 其中引进的是 1992 年 3 月 2 日在法兰克福股票交易所 (Frankfurt Stock Exchange) 中从开盘时刻到 10 点 30 分的 "西门子 (Siemens)" 公司的股票价格的 "一日内" 的性态图像. 性态特征与上面介绍的图像一样, 即价格在某个时刻 "停留" 在一个水平, 然后, (在一个随机时刻) 改变自己的值.

6. 大量涉及股票价格 "标记" 信息的统计资料可在 [217] 中得到.

有关各种证券 (包括股票、债券) 指标各种各样的信息例如可在以下机构获得:

ISSM – Institute for the Study of Securities Markets (证券市场研究所),

NYSE – New York Stock Exchange (纽约股票交易所).

[1] 详情参见 [393]. "第一届高频金融数据国际会议 (The First International Conference – HFDF-I)" 是由 "Olsen & Associates" 应用经济学研究所 (Research Institute for Applied Economics) 所组织的 (1995 年 3 月 29—31 日于瑞士苏黎世). 在这次会议上, C. A. E. Goodhart 和 M. O'Hara 所作的导论性讲演 "金融市场上的高频数据: 成果和应用 (High Frequency Data in Financial Markets: Issues and Applications)" 以其对新效应、特点、结果及其解释以及可能的研究方向的描述, 给出了极为精彩的介绍.

Berkeley Options Data (伯克利期权数据) 提供期权的买卖价数据 (ask and bid prices), 而在 CBOE (Chicago Board of Options Exchange, 芝加哥期权交易所) 则提供即时价; 在 Commodity Futures Trading Commission (CFTC, 商品期货交易委员会) 可获得美国的期货市场数据. 美国的股市瞬时价例如可在 M. I. T. (麻省理工学院) 的 Artificial Intelligence Laboratory (人工智能研究所) 中获得

(http://www.stockmaster.com).

§1b. 关于汇率统计数据的 “地理” 特点

1. 不同于比如进行股票、债券、期货合约交易的仅仅在 “工作日” 开盘的交易所, *外汇市场*, 或者

FX-市场

(Foreign Exchange, 或者 Forex) 有许多专有的特点 (“周期性” 类型), 对此我们将适当进行详尽的讨论.

首先需要注意的是, FX-市场按其实质而言是*国际市场*. 它不是地方化的, 没有专门的地点 (如同 NYSE, CBOE 等等那样), 而是由广阔的遍布于全世界的银行、兑换点的网络分支所组成, 它们都配备有良好的现代通信高技术手段.

FX-市场*在时间上是连续 24 小时工作的*. 在每星期的五天工作日中较为活跃, 而在其余日子以及某些节假日 (例如, Easter Monday (复活节后的周一)) 不太活跃.

2. 通常随昼夜的流逝 (按格林威治时间指示), 考察外汇交易的下列三个*地理活跃带*:

(1) 以东京为中心的东亚带, 21:00–7:00;

(2) 以伦敦为中心的欧洲带, 7:00–13:00;

(3) 以纽约为中心的美洲带, 13:00–20:00.

根据 [90] 中所述, *东亚带*包括: 澳大利亚, 中国香港, 印度, 印度尼西亚, 马来西亚, 新西兰, 新加坡, 韩国, 日本.

*欧洲带*包括: 奥地利, 英国, 巴林, 比利时, 德国, 荷兰, 希腊, 丹麦, 以色列, 约旦, 伊朗, 西班牙, 意大利, 科威特, 卢森堡, 挪威, 阿联酋, 沙特阿拉伯, 土耳其, 芬兰, 法国, 瑞典, 瑞士, 南非共和国.

*美洲带*包括: 阿根廷, 加拿大, 墨西哥, 美国.

有时除了这三个带以外还分出第四个带: *太平洋带*, 它在 “三带” 模式中包括在东亚带中.

除了基本中心: 东京, 伦敦和纽约以外, 需要时, 也把下列城市看作中心: 悉尼, 中国香港, 新加坡 (东亚带), 法兰克福, 苏黎世 (欧洲带), 和多伦多 (美洲带).

如果把美元 (USD) 当作*基本货币*, 那么根据与其关系的密切的程度, 最为活跃的是下列*主要货币*: DEM, JPY, GBP 和 CHF (根据国际标准化组织 (International

Organization for Standardization) 所采用的标准缩写 (ISO, 4217 条): USD 是美元, DEM 是德国马克, JPY 是日元, GBP 是英镑以及 CHF 是瑞士法郎.)

这些主要货币与美元一起处处都交易. 其他货币基本上都只在本地理带交易.

3. 关于汇率的活跃程度, 即在我们已经注意到的作为国际市场的 FX-市场上出现标记的频率, 可根据下列引自 [181] 的汇率 DEM/USD 的图像来判断其活跃性. 图中的横轴, 在图 29 中, 每隔 5 分钟记录一次, 而在图 30 中, 则是每隔 20 分钟. 图中的纵轴, 记录的则是在这个时间区间中所发生的标记变化的平均数.

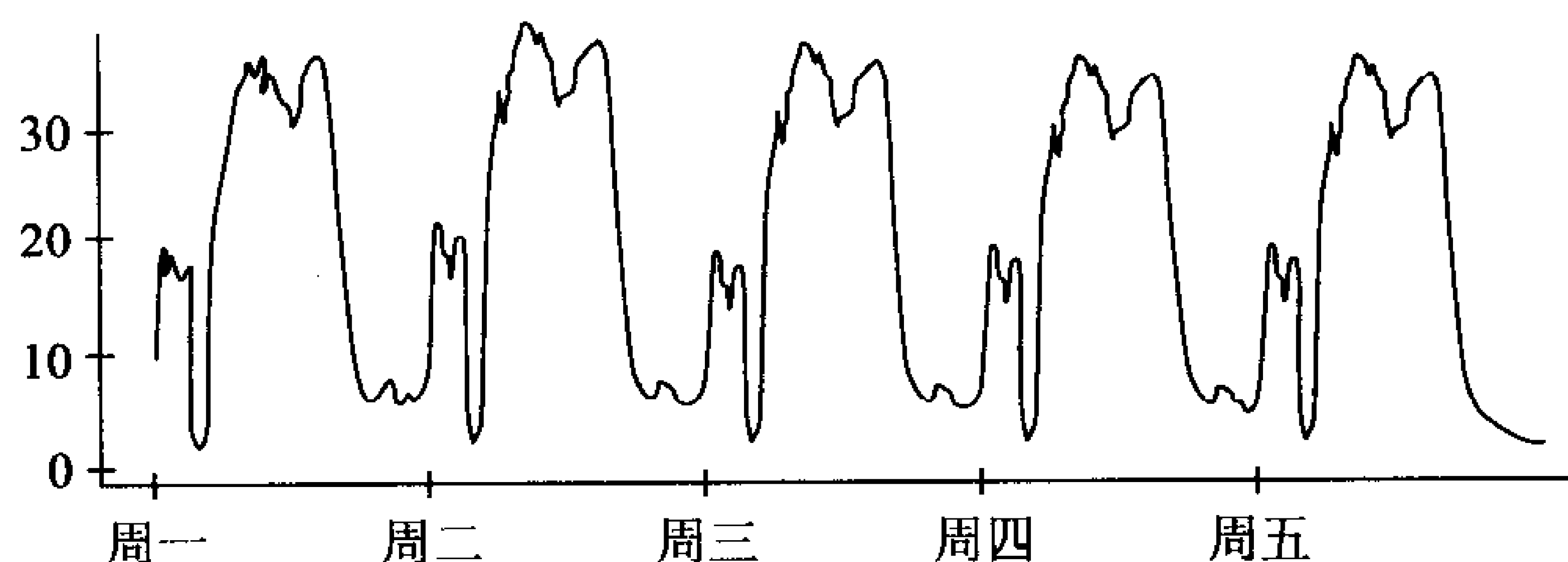


图 29　从周一到周五每隔 5 分钟记录的汇率 DEM/USD 的活跃程度特征的表示

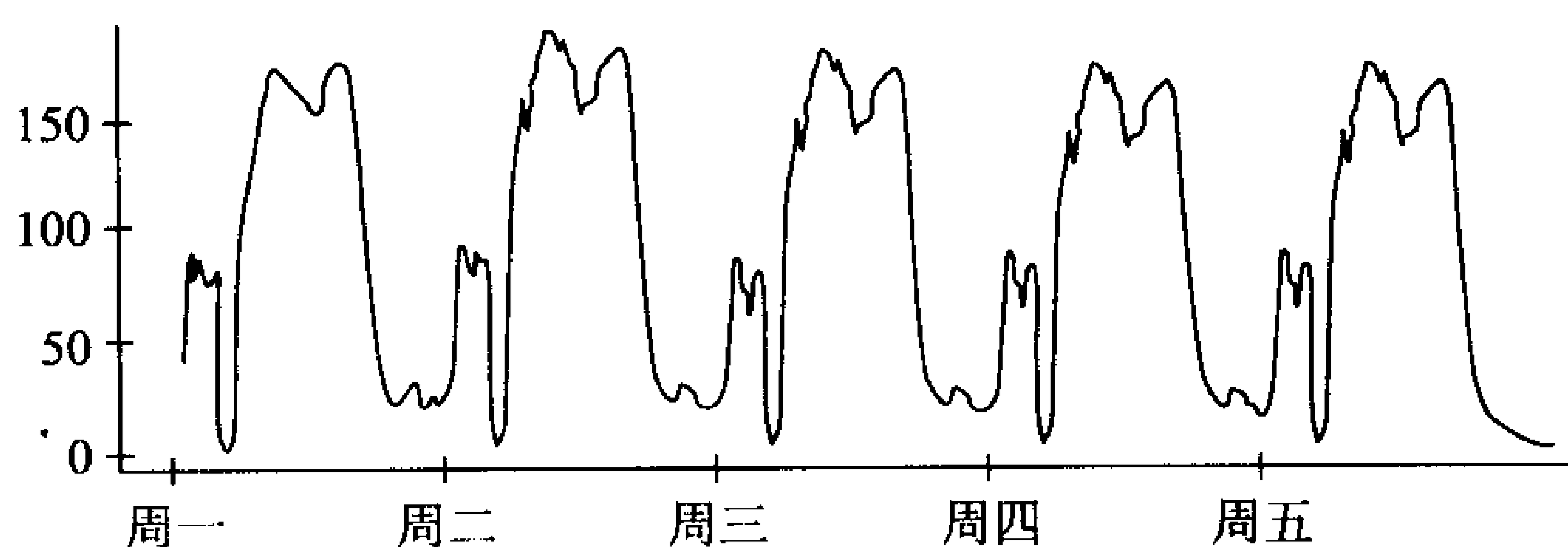


图 30　与图 29 一样, 但每隔 20 分钟记录一次

在这些图中清楚地看到昼夜上的周期性特点, 它当然是取决于地球的自转和变化次数 (标记) 的不均匀性. 其中明显地可分出三个活跃峰, 它们与三个不同的地理带有关.

看来, 在欧洲和美洲的活跃峰大致是一样的. 在欧洲, 活跃峰发生在下半日的前期, 这时在美洲进入早晨, 开始交易日. 最不活跃的恰好发生在东京的早餐时间. 这时在欧美是深夜.

对图 29 和 30 还可加上来自 [427] 的根据路透社在 1992.10.5—1993.9.26 记录的汇率 DEM/USD 的一日内活跃程度画出的图 31.

4. 外汇市场是金融市场中最大的市场. 根据国际结算银行 (Bank for International Settlements, 瑞士, 1993 年) 的数据, 这个市场在 1992 年的日换手率达到 8320 万亿 ($832 \cdot 10^9$) 美元!

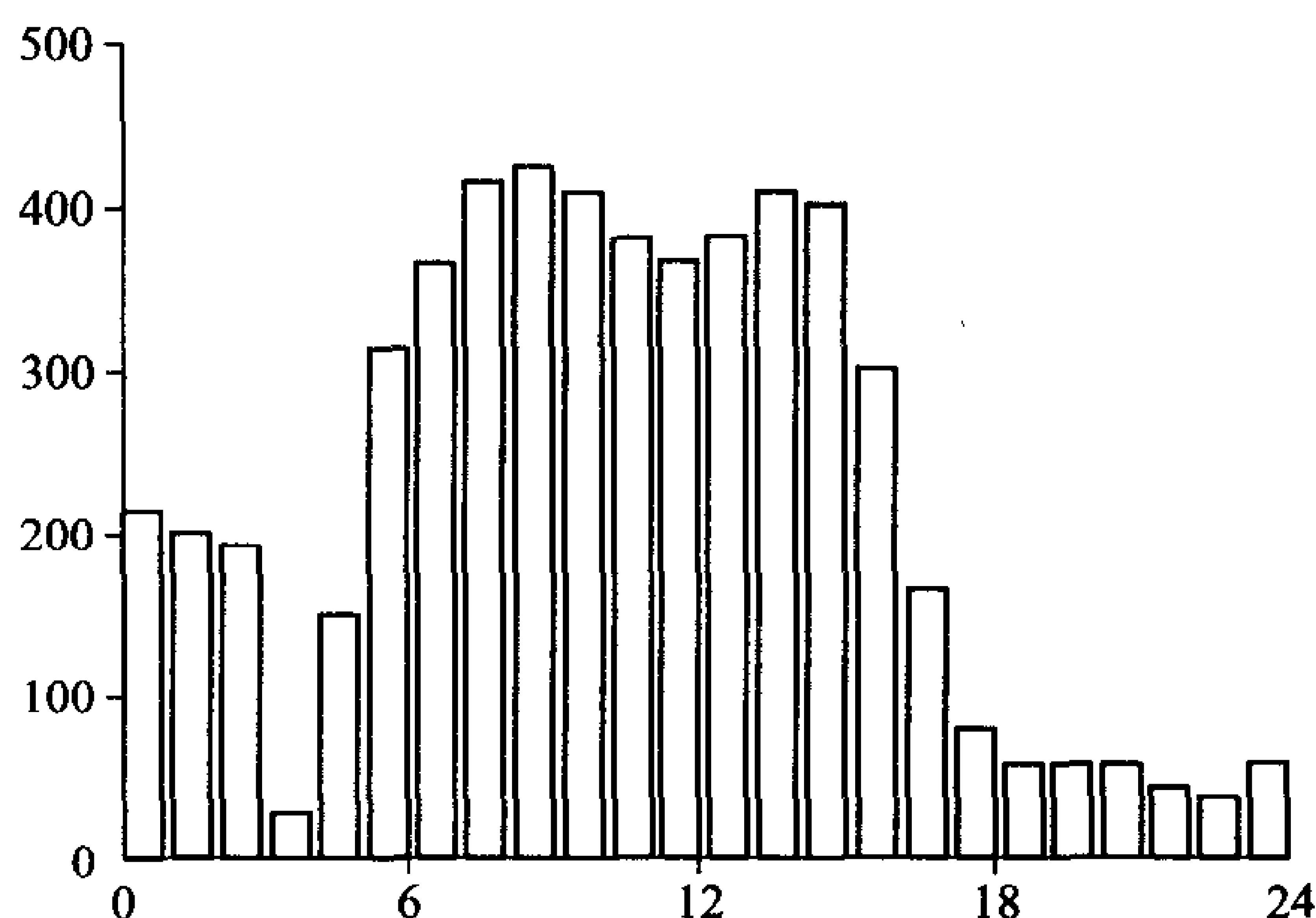


图 31 汇率 DEM/USD 在一个交易日 (24 小时) 内的平均 "标记" 数. 点 "0" 对应格林威治时间 0:00

就我们所知, 最著名的 FX-市场的数据库之一属于 "Olsen & Associates" (参见 §1a 第 4 点的脚注). 根据这个数据库, (1987.1.1—1993.12.31 期间) FX-市场上的活跃程度的表达可由下页表格得到.

汇率	在数据库中的总标记数	一昼夜的平均标记数 (一年 52 周, 一周 5 个交易日)
DEM/USD	8 238 532	4500
JPY/USD	4 230 041	2300
GBP/USD	3 469 421	1900
CHF/USD	3 452 559	1900
FRF/USD	2 098 679	1150
JPY/DEM	190 967	630
FRF/DEM	132 089	440
ITL/DEM	118 114	390
GBP/DEM	96 537	320
NLG/DEM	20 355	70

5. 汇率动态变化的上述描述中只涉及其 "时间" 图景, 即频率, 随时间变化的强度. 根据在 §1a 第 2 点中的分类, 这样的描述有关关于标记间区间的统计量的问题 (I). 然而, 暂时还没有提到在标记瞬间发生的价格值上的变化特征. 关于这个问题 (II), 我们将在 §1d 中讨论. 下一节将针对以自然的方式与图 28 中所表示的价格 (S_t^a) 的轨线性态相联系的概率统计模型.

§1c. 作为有离散干预机会的随机过程的金融指数演化的描述

1. 根据上面给出的比如由路透社发布的有关 FX-市场状况的监视数据的描述,

在每个时刻 t 都已知比如一美元 (USD) 值多少德国马克 (DEM) 的两个报价, 卖出价 (ask price) S_t^a 和买入价 (bid price) S_t^b.

价格的差别 $S_t^a - S_t^b$ 称为*价差*，它是市场状况的重要特征. 如所周知, 价差与价格的*波动率* (这里就理解为通常的标准差) 正相关. 从而, 波动率的增加, 意味着与对价格运动的预测精度减小相联系的风险增加, 它导致交易者增大价差, 以作为补偿大风险的手段.

2. 我们把价格 S_t^a 和 S_t^b 表示为下列形式:

$$S_t^a = S_0^a e^{H_t^a}, \qquad S_t^b = S_0^b e^{H_t^b}, \tag{1}$$

并令

$$H_t = \frac{1}{2}(H_t^a + H_t^b), \tag{2}$$

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \qquad S_0 = \sqrt{S_0^a \cdot S_0^b}. \tag{3}$$

这样一来,

$$H_t = \ln\sqrt{S_t^a \cdot S_t^b} \tag{4}$$

是几何平均的对数, 并且

$$S_t = \sqrt{S_t^a \cdot S_t^b}. \tag{5}$$

在分析汇率的演变, 由实际存在的价格 (S_t^a) 和 (S_t^b) 引入一个价格 (S_t) 时, 通常正是在这样的价格 $S = (S_t)$ 及其对数 $H = (H_t)$ 的定义下进行运作的. 这时, $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 和 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ $\left(H_t = \ln\dfrac{S_t}{S_0}\right)$ 的演变 (参见 §1a 中的图 28) 自然用带*离散干预情形的随机过程*来描述为:

$$S_t = S_0 + \sum_{k\geqslant 1} s_{\tau_k} I(\tau_k \leqslant t) \tag{6}$$

和

$$H_t = \sum_{k\geqslant 1} h_{\tau_k} I(\tau_k \leqslant t), \tag{7}$$

其中 $0 \equiv \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$ 是获得标记的时刻序列, 即价格变化时刻的序列, 而

$$s_{\tau_k} = \Delta S_{\tau_k} \quad 以及 \quad h_{\tau_k} = \Delta H_{\tau_k}$$

是 $\mathscr{F}_{\tau_k}$-可测随机变量 ($\Delta S_{\tau_k} = S_{\tau_k} - S_{\tau_k-} = S_{\tau_k} - S_{\tau_{k-1}}$, 而 ΔH_{τ_k} 类似定义).

很明显,

$$h_{\tau_k} = \Delta H_{\tau_k} = \ln\frac{S_{\tau_k}}{S_{\tau_{k-1}}} = \ln\left(1 + \frac{\Delta S_{\tau_k}}{S_{\tau_{k-1}}}\right) = \ln\left(1 + \frac{s_{\tau_k}}{S_{\tau_{k-1}}}\right).$$

形为 (6) 和 (7) 的过程已经在第二章 §1f 中引入. 现在我们重提与这些过程相联系的某些概念, 它们对后面在考察汇率以及其他金融指数的演变的情形下的应用来说很重要.

为简单起见, 记

$$\xi_k \equiv s_{\tau_k} = \Delta S_{\tau_k}.$$

过程 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 的概率分布记为 $\mathrm{Law}(S)$, $\mathrm{Law}(S_t, t \geqslant 0)$, 它完全由下列序列的联合概率分布 $\mathrm{Law}(\tau, \xi)$ 来确定:

$$(\tau, \xi) = (\tau_k, \xi_k)_{k\geqslant 1},$$

后者由标记时刻 τ_k 和对应它的 "标值" 或 "标度" ξ_k 所构成. 这样的序列常称为*标值点过程*或者*多元点过程*, 参见例如, [250; 第 III 章, §1c].

术语*点过程*本身通常只与序列 $\tau = (\tau_k)$ 有关 (参见第二章 §1f, 详情参见 [250; 第二章 §3c]), 在所考察的情形下, 它是*价格跳跃时刻序列*, $\tau_0 \equiv 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$.

如果令

$$N_t = \sum_{k\geqslant 1} I(\tau_k \leqslant t), \tag{8}$$

那么

$$\tau_k = \inf\{t\colon N_t = k\}. \tag{9}$$

(当 $\inf\{t\colon N_t = k\} = \varnothing$ 时, 照例令 $\tau_k = \infty$.)

过程 $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ 称为*计数过程*, 并且很明显, N 与 τ 之间通过公式 (8) 和 (9) 来定义一一对应, $N \longleftrightarrow \tau$. 通常从分布的视角来看, *分布律* $\mathrm{Law}(\tau, \xi)$ 完全由下列条件分布来确定:

$$\mathrm{Law}\left(\tau_{k+1} \middle| \begin{matrix} \tau_0, \cdots, \tau_k \\ \xi_0, \cdots, \xi_k \end{matrix}\right) \tag{10}$$

和

$$\mathrm{Law}\left(\xi_{k+1} \middle| \begin{matrix} \tau_0, \cdots, \tau_k, \tau_{k+1} \\ \xi_0, \cdots, \xi_k \end{matrix}\right), \tag{11}$$

其中 $\tau_0 = 0$, $\xi_0 = S_0$.

3. 至今, 还没有明确说起 τ_k 和 ξ_k 是定义在哪个概率空间上的*随机变量*. 现在略为详细地讨论这个问题是适宜的.

为了在分析包括多元点过程在内的随机过程时有可能运用成熟的随机分析工具, 也为了考虑陈述价格形成机理的 "信息" 流, 我们假定一开始就给定某个*渗透概率空间* (随机基底)

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathsf{P}).$$

这里 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是由 σ-代数 $\mathscr{F}_t$ 组成的 (渗透) 流, 它是 "在时间区间 $[0,t]$ 上所接受的市场信息的载体".

一旦给定这个渗透概率空间, 时刻 τ_k 自然被被认为是随机变量 $\tau_k=\tau_k(\omega)$, 它是关于 $(\mathscr{F}_t)$ 的Markov 时刻:

$$\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t,\qquad t\geqslant 0 \tag{12}$$

(参见第二章 §1f 中的定义 1). 同样, ξ_k 也将被认为是随机变量 $\xi_k=\xi_k(\omega)$, 它是 $\mathscr{F}_{\tau_k}$-可测的, 其中 $\mathscr{F}_{\tau_k}$ 是在 $[0,\tau_k]$ 中观察到的事件的 σ-代数, 即由所有这样的事件 $A\in\mathscr{F}$ 所组成的 σ-代数: 对于每个 $t\geqslant 0$,

$$A\cap\{\tau_k\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t. \tag{13}$$

§1d. 关于 "标记" 的统计

1. 我们讨论关于无条件概率分布 $\mathrm{Law}(\tau_1,\tau_2,\cdots)$ 什么是已知的问题.

对于 $k\geqslant 1$, 记

$$\Delta_k=\tau_k-\tau_{k-1},$$

并令 $\tau_0=0$. 显然, 求 $\mathrm{Law}(\Delta_1,\Delta_2,\cdots)$ 的值, 等价于求 $\mathrm{Law}(\tau_1,\tau_2,\cdots)$. 因此, 可以只对标记之间的间隔的分布来运作.

如果由假设随机变量 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots$ 独立同分布出发 (这个假定使得人们有可能依靠大数定律, 构成通常的建立参数、分布等等估计量的统计程序), 那么其概率分布特征的直观表示, 可根据由所掌握的统计数据所构造的直方图 (经验密度) $\widehat{p}(\Delta)$ 来获得.

在著作 [145] 中介绍了对于汇率 DEM/USD 的 1 472 241 次标记之间的间隔作这样的分析的下列结果 (根据 "Olsen & Associates" 的数据; [221]).

精确到差一常数, 经验密度

$$\widehat{p}(\Delta)\sim\begin{cases}\Delta^{-(1+\lambda_1)}, & 23\text{ 秒}\leqslant\Delta<3\text{ 分},\\ \Delta^{-(1+\lambda_2)}, & 3\text{ 分}\leqslant\Delta<3\text{ 小时},\end{cases} \tag{1}$$

其中

$$\lambda_1\approx 0.13\quad\text{以及}\quad\lambda_2\approx 0.61. \tag{2}$$

(这个结果基于把 $\ln\widehat{p}(\Delta)$ 作为 $\ln\Delta$ 的函数, 由最小二乘法估计 λ_1 和 λ_2 而得到.)

与关系式 (1) 相联系, 重提下列这点是有益的: 在数理统计中众所周知的是, 密度有幂递减特征的分布就是*Pareto* 分布, 其密度为 $(\alpha>0,\ b>0)$

$$f_{\alpha b}(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, & x\geqslant b,\\ 0, & x<b.\end{cases} \tag{3}$$

(参见第三章 §1a 中的表 6.)

注意, 特别是金融文献中, 人们经常把在无限处以幂函数方式递减的概率分布 (诸如有 $0 < \alpha < 2$ 的 α-稳定分布律; 参见第三章 §1a 中的 (7) 和 (8)) 称为 Pareto 型分布, 甚至干脆就是 *Pareto 分布*. 如果遵照这样的术语, 那么可以说, 关系式 (1) 说明, 在区间 [23 秒, 3 分) 上"*作用*" *的是指数* $\alpha = \lambda_1$ *的Pareto 分布*, *而在区间* [3 分, 3 小时) *上是有另一个参数* $\alpha = \lambda_2$ *的Pareto 分布*.

应该注意到, 在描述某个指数的概率性质时, 很难指望 (正如进行上述类型的统计分析所经常表明的那样) 这样的描述可通过某个由少量未知参数来确定的 "标准" 分布来得到. 而这很可能这样来解释: 在市场上运作的 "活动者" 有不同的目标设置、不同的约束条件以及对 "风险" 大小的不同态度.

2. 一般说来, 没有任何先验基础认为量 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots$ 之间是独立的. 尤其是, 经验分析表明, 下一个标记出现的时刻本质上依赖于过去标记出现的强度和频率. 这就提出了 "准确" 描述条件分布 $\mathrm{Law}(\Delta_k|\Delta_1, \cdots, \Delta_{k-1})$ 的问题.

遵照 [143], 与此相联系, 我们引入一个有趣的模型来进行这样的描述; 这一模型称为*ACD* 模型 (Autoregressive Conditional Duration Model, 自回归条件持续模型)①, 它派生于*ARCH* 型模型.

假设存在 (充分) 统计量 $\psi_k = \psi_k(\Delta_1, \cdots, \Delta_{k-1})$, 使得

$$\mathsf{P}(\Delta_k \leqslant x \,|\, \Delta_1, \cdots, \Delta_{k-1}) = \mathsf{P}(\Delta_k \leqslant x \,|\, \psi_k). \tag{4}$$

Δ_k 在条件 ψ_k 下的最简单的、自然而然的条件分布是指数分布, 其密度为

$$p(\Delta \,|\, \psi_k) = \frac{1}{\psi_k} e^{-\frac{\Delta}{\psi_k}}, \qquad \Delta \geqslant 0, \tag{5}$$

其中的 (随机) 参数 (ψ_k) 用下列递推方式来确定:

$$\psi_k = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta_{k-1} + \beta_1 \psi_{k-1}, \tag{6}$$

而 $\Delta_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geqslant 0$ 以及 $\beta_1 \geqslant 0$.

很明显, (4)–(6) 完全确定了条件分布 $\mathrm{Law}(\Delta_k|\Delta_1, \cdots, \Delta_{k-1})$, 这时, 量 Δ_1, $\Delta_2, \cdots$ 一般来说, 相互间是*不独立的*.

我们察觉, 在所考察的模型中, 条件均值

$$\mathsf{E}(\Delta_k|\Delta_1, \cdots, \Delta_{k-1}) = \psi_k. \tag{7}$$

同样明显的是, *一阶自回归模型* (6) 允许有显然的高阶模型推广 (参见第二章 §1d 和 [143]).

①英文版称为*ARDM*. —— 译者注

2. 一维分布的统计

§2a. 统计数据的离散化

1. 对于标记出现的强度和频率特征有了某种表示以后 (至少例如对于外汇汇率有这种表示), 同时也对间隔 $(\tau_k - \tau_{k-1})$ 的一维分布有了某种表示; 现在自然就转向价格变化性态的统计, 即序列 $(S_{\tau_k} - S_{\tau_{k-1}})_{k\geqslant 1}$ 或者与此相联系的另一个量, 比如, $h_{\tau_k} = \ln \dfrac{S_{\tau_k}}{S_{\tau_{k-1}}}$ 的序列的统计.

由此立即应该注意到, “日数据”、“周数据”、“月数据” 等等与 “日内数据” 之间的差别. 首先考察通过等距有规则的时间间隔 Δ 来获得数据. 比如, Δ 可取为 “一日”, “一周” 等等. 当转向一日内的统计时, 就会发生数据获得的*不规则性*, 它们是在偶然不均匀的时刻 $\tau_1, \tau_2, \cdots$, 以不同的间隔 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots$ 来获得数据的, 其中 $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$.

这种不规则性对于应用已有的数据统计分析方法来说带来一定的困难. 因此, 照例, 统计数据先要经过某种预处理 (离散化, 剔除异常观察值, 平滑化, 分离出倾向成分等等).

我们只详细讨论*离散化*方法.

固定某个 “自然的” (实际物理) 时间间隔 Δ. 这个间隔不应该太 “小”. 就汇率统计问题而言, 必须使得这个间隔在下列意义下*有代表性*: 其中必须落入显著的标记个数, 或者, 换句话说, Δ 显著大于两个标记之间的平均时间. 否则, 所形成的离散化, 统计 “序列” 将包含太多的 “空白” 数据.

在主要货币的汇率情形下, 著作 [204] 推荐取 $\Delta \geqslant 10$ 分钟, 使得 (除了所要求的有代表性以外) 这样做也可避免当 Δ 的小值与价差尺度和买卖价格的变化范围变得可比较时所发生的*不确定性*.

离散化的*最简单的*方法在于, 选取 Δ (比如, 10 分钟, 20 分钟, 24 小时等等) 以后, 取代有连续时间 $t \geqslant 0$ 的按段常数过程 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$, 而考察有离散时间 $t_k = k\Delta$, $k = 0, 1, \cdots$ 的新序列 $S^{\Delta} = (S_{t_k})$.

另一种广泛流传的离散化方法在于先把按段常数的过程

$$S_t = S_0 + \sum_{k\geqslant 1} \xi_k I(\tau_k \leqslant t) \tag{1}$$

改变为它的*连续修正* $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t)$, 后者是通过在值 (S_{τ_k}) 之间进行下列线性插值得到的:

$$\widetilde{S}_t = S_{\tau_k} \frac{\tau_{k+1} - t}{\tau_{k+1} - \tau_k} + S_{\tau_{k+1}} \frac{t - \tau_k}{\tau_{k+1} - \tau_k}, \qquad \tau_k < t \leqslant \tau_{k+1}. \tag{2}$$

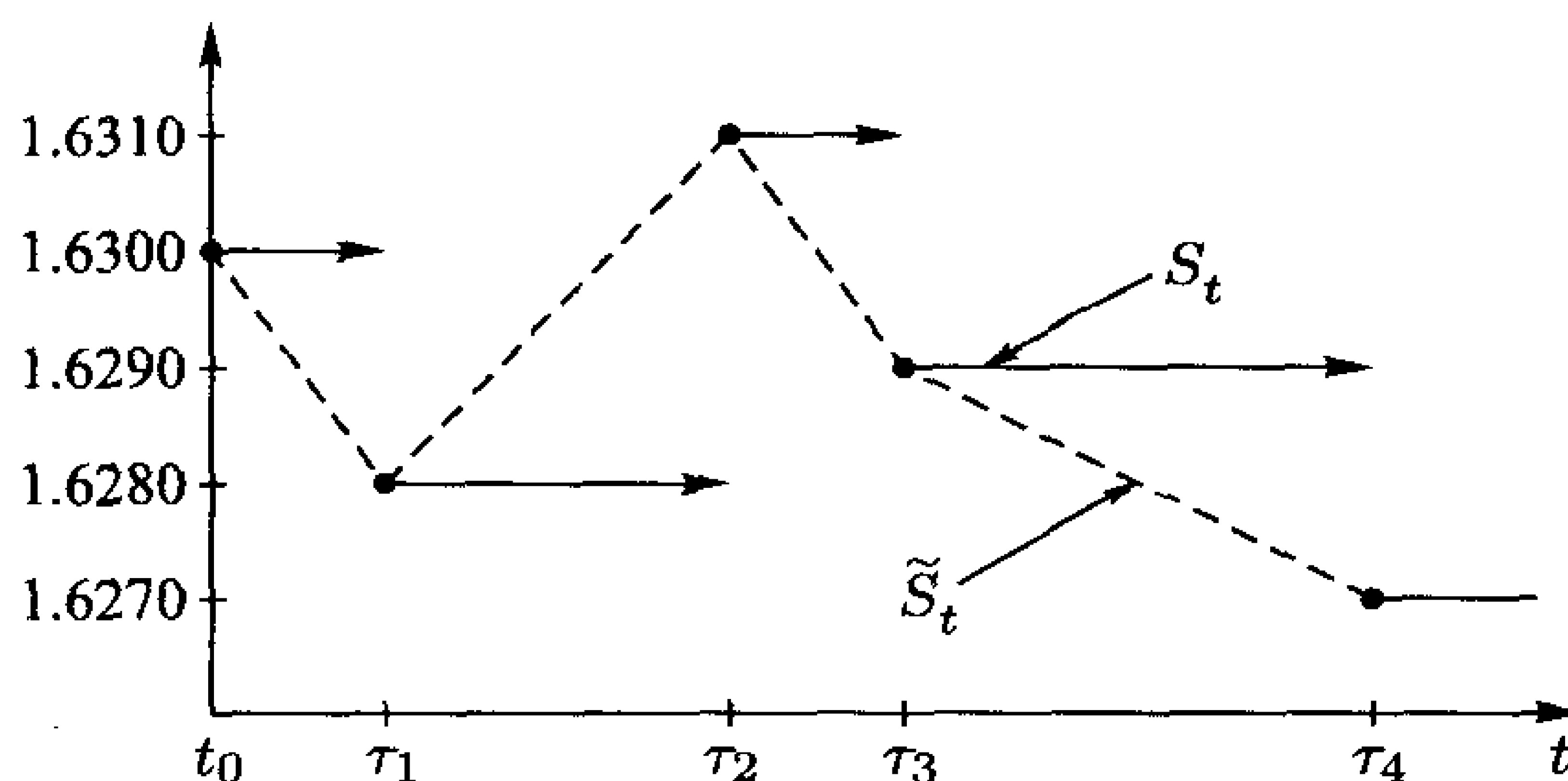


图 32 按段常数过程 (S_t) 及其连续修正 $(\widetilde{S}_t)$

然后, 再把这个修正 $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t)$ 用上述的最简单的方法进行离散化, 即在点 $t_k = k\Delta$ $(k = 0, 1, \cdots)$ 上形成序列 $\widetilde{S}^\Delta = (\widetilde{S}_{t_k})$, 其中参数 Δ 由投资者、交易者等所感兴趣的时间间隔 (月, 周, 日, 20 分, 5 分等等) 来确定.

2. 除了按时间离散化以外, 统计数据也可量子化, 或者说得更明白些, 也可按相变量来取整. 通常如下进行.

选取某个 $\gamma > 0$, 并取代原来的过程 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$, 引入新过程 $S(\gamma) = (S_t(\gamma))_{t\geqslant 0}$, 其值为

$$S_t(\gamma) = \gamma \left[\frac{S_t}{\gamma} \right]. \tag{3}$$

这样, 如果 $\gamma = 1$ 以及 $S_t = 10.54$, 那么 $S_t(1) = 10$; 如果 $\gamma = 3$, 那么 $S_t(3) = 9$; 因此, 很明显, 定义 (3) 对应以取整误差 γ 来取整的程序.

如果先进行 γ-量子化, 然后再 Δ-离散化, 那么由 (S_t) 我们得到新的序列 $S^\Delta(\gamma)$ 或者 $\widetilde{S}^\Delta(\gamma)$.

由于 $\gamma \to 0$ 时 $S_t(\gamma) \to S_t$, 这就发生一个重要问题: 应该用怎样的协调方式来选取 Δ 和 γ, 使得 $(S_{t_k}(\gamma))$ 在时刻 $t_k = k\Delta$ $(k = 0, 1, \cdots)$ 的值包含 "与 (S_t) 几乎同样的信息". 作为回答这一问题的第一种方法 (正如 G. Zhakod 所提出) 自然是要先阐明, 在怎样的 $\Delta \to 0$ 和 $\gamma \to 0$ 的收敛速度条件下, 使得对应的过程 $S^\Delta(\gamma)$, $\widetilde{S}^\Delta(\gamma)$ 的有限维分布收敛于极限过程 S.

§2b. 相对价格变化的对数的一维分布. I. 与高斯性质的偏差. 经验密度的 "峰度"

1. 我们考察某种汇率 (比如, DEM/USD)

$$S = (S_t)_{t\geqslant 0},$$

其中 $S_t = \sqrt{S_t^a \cdot S_t^b}$. 记 $\tilde{S} = (\tilde{S}_t)_{t\geqslant 0}$ 为用线性插值的方法所得到的 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 的连续修正.

又设 $\widetilde{S}^{\Delta}=(\widetilde{S}_{t_k})_{k\geqslant 0}$ 为 $\widetilde{S}=(\widetilde{S}_t)_{t\geqslant 0}$ 对于 $t_k=k\Delta$ 的 Δ-离散化.

正如在上面不止一次地注意到 (参见例如第一章 §2a 中的第 4 点), 在考察价格变化时, 有现实经济价值的并不是价格变化量 $\Delta\widetilde{S}_{t_k}\equiv\widetilde{S}_{t_k}-\widetilde{S}_{t_{k-1}}$ 本身, 而是相对变化 $\dfrac{\Delta\widetilde{S}_{t_k}}{\widetilde{S}_{t_{k-1}}}=\dfrac{\widetilde{S}_{t_k}}{\widetilde{S}_{t_{k-1}}}-1$. 与此相联系的是, 通常有意义的不是量 $(\widetilde{S}_{t_k})$ 的分布, 而是量 $(\widetilde{H}_{t_k})$ 的分布, 其中 $\widetilde{H}_{t_k}=\ln\left(\dfrac{\widetilde{S}_{t_k}}{\widetilde{S}_0}\right)$.

我们将记

$$\widetilde{h}^{(\Delta)}_{t_k}=\Delta\widetilde{H}_{t_k}\quad(=\widetilde{H}_{t_k}-\widetilde{H}_{t_{k-1}}),\tag{1}$$

其中 $t_k=k\Delta$, $k\geqslant 0$, $\widetilde{H}_0=0$.

考虑到由 S 得到 $\widetilde{S}^{\Delta}$ 的方法, 同时引入 §2a 中所用的记号 $(h_t=\Delta H_t, H_t=\ln\dfrac{S_t}{S_0})$, 我们求得

$$\widetilde{h}^{(\Delta)}_{t_k}=\sum_{\{i:\ t_{k-1}<\tau_i\leqslant t_k\}}h_{\tau_i}+\widetilde{r}^{(\Delta)}_{t_k},\tag{2}$$

其中被加项 $\widetilde{r}^{(\Delta)}_{t_k}$ 由 “最终效应” 来确定, 并可称为 “余项”, 因为它与求和式所表示的量相比很小.

其实, 例如, $\Delta=1$ 小时, 那么根据 §1b 第 4 点中给出的表, DEM/USD 的平均标记数将大致等于 187 (= 4500 : 24). 这样一来, 在 (2) 中的求和由 187 个 h_{τ_i} 的值来确定. 同时, 绝对值 $|\widetilde{r}^{(\Delta)}_{t_k}|$ 显然小于或等于四个 h_{τ_i} 的值的绝对值之和, 这四个值是标记时刻 t_{k-1} 和 t_k 以及它们的直接前后两个标记时刻的相应值.

重要的是要强调: 在 (2) 中所组成的和是随机个数个随机变量之和, 其分布可能相当复杂, 即使其分离的构成变量以及项的随机个数都有比较简单的分布. 这一情况可看作 (正如以后将指出的) 量 $\widetilde{h}^{(\Delta)}_{t_k}$ 的分布不可能被认为是高斯分布的某种形式解释. 诚然, 我们将看到, 当 Δ 增加引起 (2) 中的求和的项数增加时, 假设量 $\widetilde{h}^{(\Delta)}_{t_k}$ 正态分布就更为可信: 它开始 “呈现” 大量被加项求和时的中心极限定理成立的现象.

注. 记号 $\widetilde{h}^{(\Delta)}_{t_k}$ 相当累赘, 尽管它还 “说出” 了这些量的形成方式. 以后为了简化记号, 这些量将也记为 $\widetilde{h}_k$ (同时指出它们的形成方式和所选择的值 Δ).

2. 这样, 我们将认为值 $\Delta>0$. 在研究值序列 $\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2,\cdots$ 的联合分布 $\mathrm{Law}(\widetilde{h}_1,\widetilde{h}_2,\cdots)$ 时, 自然先致力于它们的一维分布, 并认为这些量有同样的分布以及它们的分布密度都是单峰的. (在一阶逼近中, 这一均匀性假设被许多金融指数的统计分析很好地证实, 至少对于不太大的时间间隔是那样. 也参见后面的 §3c, 其中联系考虑昼夜循环的 “地理” 效应的另一种值 $\widetilde{h}_i$ 的形成方式.)

正如上面已经注意到, 根据 “Olsen & Associates” 的数据, 在 1987.01.01—1993.12.31 期间共记录了汇率 DEM/USD 的 8 238 532 次标记. 关于根据这些统计数据所估计的量 $\widetilde{h}_i=\widetilde{h}^{(\Delta)}_{t_i}$ 的一维分布的特征值可由下列来自 [204] 的表推断:

Δ	N	均值 $\overline{h}_N$	方差 $\widehat{m}_2$	斜度 $\widehat{S}_N$	峰度 $\widehat{K}_N$
10 分	368 000	$-2.73 \cdot 10^{-7}$	$2.62 \cdot 10^{-7}$	0.17	35.11
1 小时	61 200	$-1.63 \cdot 10^{-6}$	$1.45 \cdot 10^{-6}$	0.26	23.55
6 小时	10 200	$-9.84 \cdot 10^{-6}$	$9.20 \cdot 10^{-6}$	0.24	9.44
24 小时	2100	$-4.00 \cdot 10^{-5}$	$3.81 \cdot 10^{-5}$	0.08	3.33

在这个表中, N 是 (形为 $t_i = i\Delta$ 的) 样本点的个数,

$$\overline{h}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\widetilde{h}_{t_i}, \qquad \widehat{m}_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\widetilde{h}_{t_i} - \overline{h}_N)^k, \qquad \widehat{S}_N = \frac{\widehat{m}_3}{\widehat{m}_2^{3/2}}$$

是斜度 (skewness) 的经验系数, 以及

$$\widehat{K}_N = \frac{\widehat{m}_4}{(\widehat{m}_2)^2} - 3$$

是峰度 (kurtosis) 的经验系数.

对于正态分布来说, 理论斜度系数 S_N 等于零. 经验斜度系数 $\widehat{S}_N$ 的正性意味着经验的、以至也可能是真实的分布密度, 其不对称性体现在左边比右边更陡峭.

由该表还可看出, 均值 (按其绝对值) 显著小于标准差 (方差的平方根), 因而, 实际上可认为它为零.

不利于 "正态性" 假设的最有力的论据当然是过大的峰度系数值, 正如我们所看到, 它随着 Δ 的减小而增大. 由于峰度系数是通过四阶矩来定义的, 故这一状况也带来这样的意义: 量 $\widetilde{h}_k = \widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ 有 "厚" 尾, 它全在于可理解为对应的分布密度 $p^{(\Delta)}(x)$ (与正态密度相比) 当 $|x| \to \infty$ 时, 减小较慢.

3. 量 $\widetilde{h}_k$ 对正态性 (高斯性) 的偏离不仅可在外汇汇率上观察到, 并且也可对于其他金融指数 (例如股价) 观察到; 这点不仅可被经验密度 (直方图) 的形状来证实, 并且也可用披露正态性偏离的标准统计方法来证实. 这样的方法例如有

(1) 分位数法,

(2) χ^2-检验,

(3) 秩检验.

我们回顾一下这些方法的实质.

分位数法最为简单, 它可用 $Q\widehat{Q}$-图像 (参见图 33) 来说明, 其中在横轴上置以对应正态分布 $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ 的分位数, 其中参数 μ 和 σ^2 根据统计数据来估计, 而在纵轴上则置以量 $\widetilde{h}_k$ 的经验分布的分位数. (根据定义, 随机变量 ξ 的分布的 p $(0 < p < 1)$ 阶分位数 Q_p 是使得 $\mathsf{P}(\xi \leqslant x) \geqslant p$ 和 $\mathsf{P}(\xi \geqslant x) \geqslant 1 - p$ 的值 x.)

在经验分布与理论分布“高度”拟合的情形下, 点 $(Q_p, \widehat{Q}_p)$ 的集合必定集中在对角线附近. 然而, (关于汇率, 股价等等的) 统计数据表明并非如同图 33 上所描绘的 $(Q_p, \widehat{Q}_p)$ 图像那样, 而是理论 (正态) 密度与经验密度有图 34 上所表示的形状.

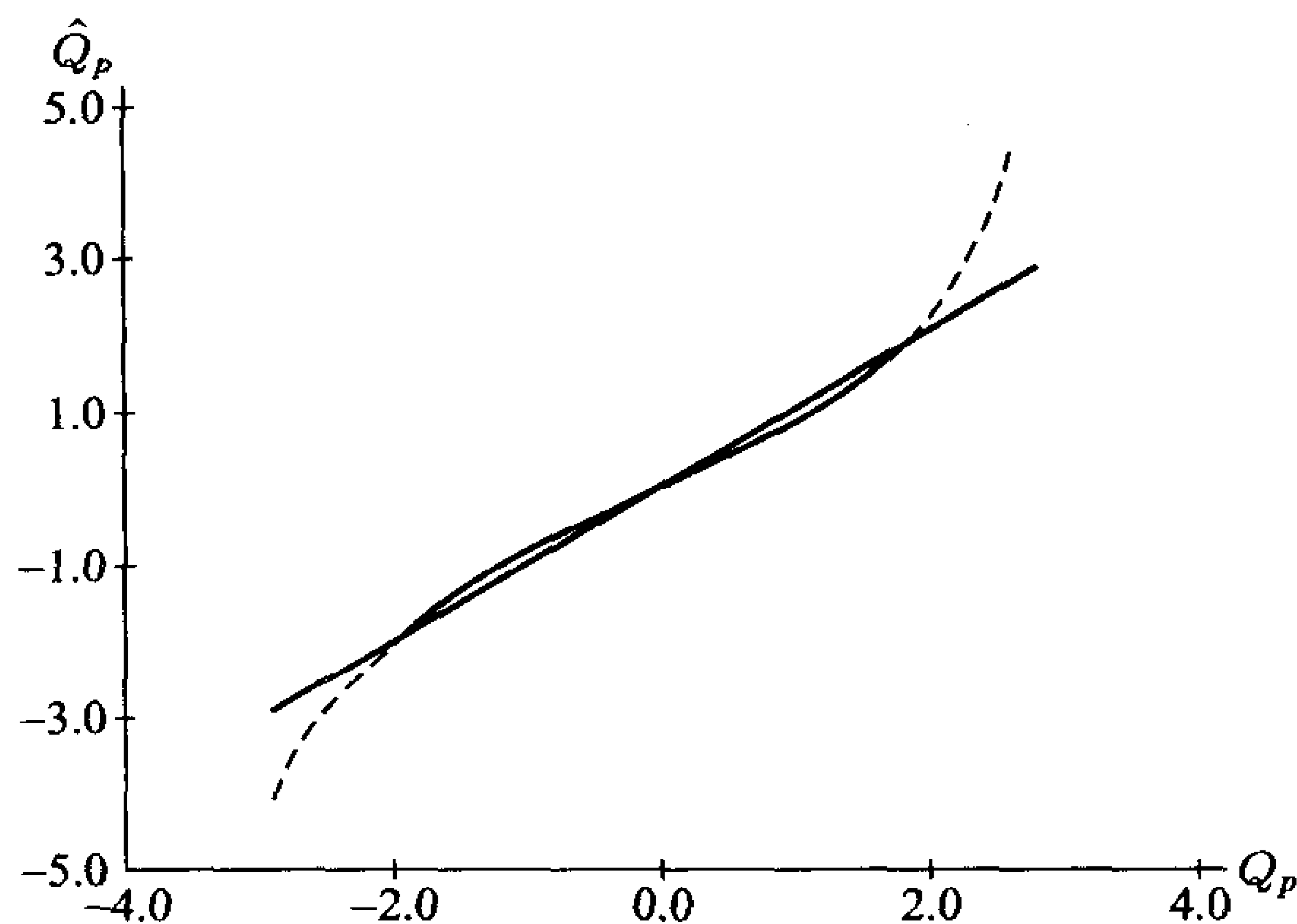


图 33 间隔 $\Delta = 20$ 分钟的汇率 DEM/USD 的 $Q\widehat{Q}$-分位数分析 (根据路透社 1992.10.5—1993.9.26 的数据; [427]). 纵轴上置以 $\widetilde{h}_k = \widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ $(t_k = k\Delta,\ k = 1, 2, \cdots)$ 的经验分布的分位数 $\widehat{Q}_p$; 横轴上置以正态分布的分位数 Q_p

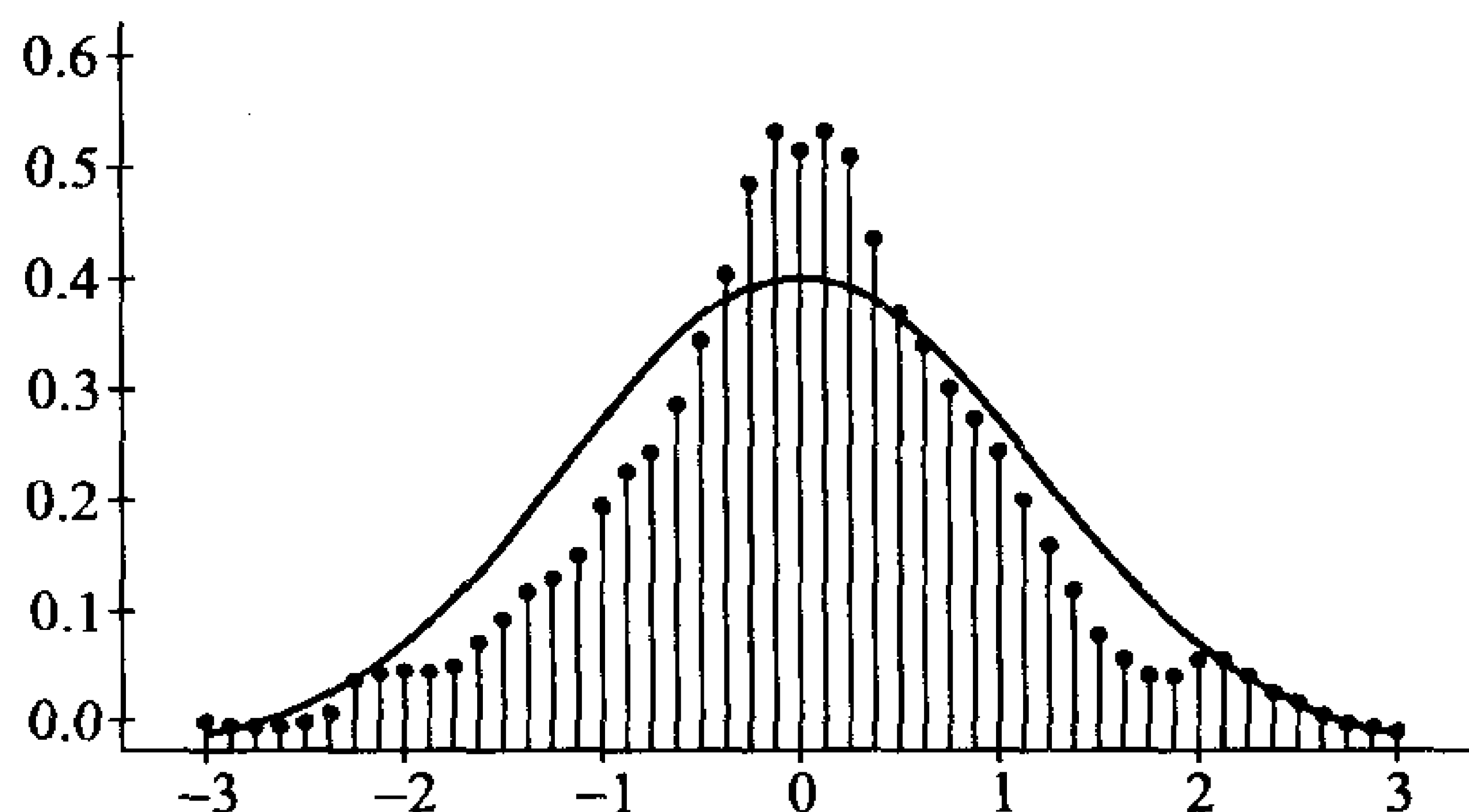


图 34 (量 $\widetilde{h}_k = \widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$, $k = 1, 2, \cdots$ 的) 经验密度和对应的理论 (正态) 密度的典型图像

4. 作为拟合判别准则的 K. Pearson 的 χ^2-检验的应用基于构造统计量

$$\widehat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i},$$

其中 ν_i 是落在 I_i 中的观察值的次数, $\bigcup_{i=1}^{k} I_i = \mathbb{R}$①, 这些区间起着对数据“分组”的作用 $(\nu_1 + \cdots + \nu_k = n)$, 而 p_i 是对应所验证的理论分布的落在这些集合中的概率.

①原文为“$\sum_{i=1}^{k} I_i = \mathbb{R}$”. ——译者注

对应于 K. Pearson 拟合判别准则, 假设

$\mathscr{H}_0$: 经验分布符合理论模型

以置信水平 α 被拒绝, 是指不等式 $\widehat{\chi}^2 > \chi^2_{k-1,1-\alpha}$ 满足, 其中 $\chi^2_{k-1,1-\alpha}$ 是有 $k-1$ 自由度的分布 χ^2 的 $Q_{1-\alpha}$-分位数 ($1-\alpha$ 阶的分位数).

我们记得, 有自由度为 m 的 χ^2-分布就是下列随机变量的分布:

$$\chi^2_m = \xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2,$$

其中 $\xi_1, \cdots, \xi_m$ 是独立标准正态分布 $\mathscr{N}(0,1)$ 随机变量. 这样的分布的密度 $f_m(x)$ 由下列公式给出:

$$f_m(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} x^{m/2-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

在著作 [127] 中引入了对于十家德国大公司和银行 (BASF (巴斯夫公司), BMW (宝马), Daimler Benz (戴姆勒-奔驰), Deutsche Bank (德意志银行), Dresdner Bank (德累斯顿银行), Höchest (赫斯特公司), Preussag (普罗伊萨格公司), Siemens (西门子公司), Thyssen (蒂森公司), VW (大众汽车公司)) 股票的三年数据 (1989.10.2—1992.09.30) 以置信水平 $\alpha = 1\%$ 验证假设 $\mathscr{H}_0$ 的统计处理结果. $\widehat{\chi}^2$ 和 $\chi^2_{k-1,1-\alpha}$ ($k = 22$, 观察数 $m = 745$) 的计算表明, 假设 $\mathscr{H}_0$ 对于这十家公司都无一例外地必须否定. 例如, 对于 BASF 和 Deutsche Bank 所得到的 $\widehat{\chi}^2$ ($p_i = 1/k$, $k = 22$) 值为 104.02 和 88.02, 而对于 $k = 22$ 和 $\alpha = 0.01$ 的临界值 $\chi^2_{k-1,1-\alpha} = 38.93$. 因此, $\widehat{\chi}^2$ 显著大于 $\chi^2_{k-1,1-\alpha}$, 从而根据 χ^2-判别准则, 假设 $\mathscr{H}_0$ 被否定.

§2c. 相对价格变化的对数的一维分布. II. "厚尾" 及其统计

1. 经验密度偏离正态性并具有 "厚尾" 导致一种共同的想法: 对于 "右尾", 即当 $x \to +\infty$ 时,

$$\mathsf{P}(\widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)} > x) \sim x^{-\alpha} L(x), \tag{1}$$

其中 "尾部指数" $\alpha = \alpha(\Delta) > 0$, $L = L(x)$ 是缓减函数: 对于任何 $y > 0$, 当 $x \to +\infty$ 时, $\dfrac{L(xy)}{L(x)} \to 1$. 类似的结论也可对于 "左尾" 作出.

我们注意到, 在金融文献中对厚尾和峰度的各种讨论可在 [46], [361], [419] 中找到, 也可在 1960 年代的研究中找到 (参见例如, [150], [317]).

在这些研究中注意到, 例如, 在$ARCH$, $GARCH$ 模型 (参见第二章 §3c 第 6 点) 中考察正态分布的混合时, 就可产生分布密度的峰度和厚尾. (与此相联系的问题可参见第三章的 §1d, 其中例如说明了双曲分布可通过有不同方差的正态分布的混合来得到.)

在一系列对于量 $\widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ 的分布的研究中 (参见例如, [46] 和 [390]), 使用了 Student t-分布, 其密度为

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \tag{2}$$

其中整数参数 n 称为 "自由度数". 由 (2) 可见, 这个分布属于有厚尾的 Pareto 型分布.

2. 在 B. Mandelbrot 的著作 (参见例如, [318], [319], [321], [322], [324]) 和 E. Fama 的著作 (参见 [150]) 以后, 金融文献中广泛流行获得基于稳定分布的金融指数模型 (详情参见第三章中的 §1a). 这些分布有自己的在区间 $(0, 2]$ 中取值的 "稳定指数" α. 在 $\alpha = 2$ 的情形下, 稳定分布就是正态分布; 当 $0 < \alpha < 2$ 时, 对应的分布是 Pareto 型分布 (1), 其中 "尾部指数" α 恰好就是 "稳定指数".

这样一来, 假设有 $0 < \alpha < 2$ 的稳定分布用来描述 $\widetilde{h}_k = \widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ 是自然的, 因为这些分布也有在统计数据中所观察到的厚尾和峰度. 除此以外, 转向稳定分布还可用这种分布的下列自相似特征性质 (第三章 §2b) 来辩明: 如果随机变量 X 和 Y 相互独立, 并有稳定指数为 α 的稳定分布, 那么其和也是有同样指数的稳定分布, 或者说 X 和 Y 的分布的卷积也是这种类型的分布.

从经济学的视角来看, 要求数据在时间汇总 (time aggregation) 时保持分布特征是完全自然的, 而稳定分布具有这一性质使得它们的应用更加合理.

然而, 在对稳定分布进行运作时, 由于下列原因会引起一系列本质的困难.

如果 X 是指数满足 $0 < \alpha < 2$ 的稳定分布, 那么 $\mathsf{E}|X| < \infty$ 仅当 $\alpha > 1$ 时成立. 一般情况下, $\mathsf{E}|X|^p < \infty$ 当且仅当 $p < \alpha$.

这样, 对于尾部有点 "厚" 的指数满足 $0 < \alpha < 2$ 的稳定分布来说, 其二阶矩无限. 这一状况为理论特征带来相当大的困难 (例如, 在分析各种基于运用方差的估计量和检验的质量时), 并且在另一方面, 它还难以给出经济解释, 而实际的验证照例只能对于有限个数据来进行.

由于后一状况, 我们注意到, "尾部指数" α 真实值的估计一般来说, 是一件相当微妙的事.

与此相联系的是, 一方面, α 的 "良好" 估计需要有足够多的观察值, 以便在其中挑出相当数量的极端值, 而只有根据这些值才能估计 "尾部效应" 和 "尾部指数". 而另一方面, 具有大量 "非极端" 观察值, 将遗憾地为估计真实的 α 值的估计带来混杂.

3. 由稳定分布的性质得到, 如果用它们来描述金融指数的分布, 那么不能立即同时达到三个要求: *卷积时保持分布类型, 具有指数满足 $0<\alpha<2$ 的厚尾以及具有有限二阶矩, 而这就是说, 具有有限方差.*

显然, 方差有限对于 "尾部指数" $\alpha>3$ 的 Pareto 型分布成立. 即使这样的分布不具有关于卷积的封闭性质, 它们仍然具有在作卷积时保持分布密度的*递减特征*这一重要性质: 如果 X 和 Y 有同样的带 "尾部指数" α 的 Pareto 型分布, 并且相互独立, 那么其和 $X+Y$ 也有带同样的 "尾部指数" α 的 Pareto 分布. 从这一视角来看, Pareto 型分布可以认为满足所希望的卷积时保持 "尾部指数 α 的稳定性".

即使仅由上述的情况也已清楚地说明, 为什么决定量 $\widehat{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ 的分布在无限处的性态特征的指数 α 使人那么关注. 这种对指数 α 的兴趣还可给出*经济—金融*解释. 事实在于, "厚尾指数" 特别是表明, 在市场上有投机利益的局中人相当积极. 如果 "尾部指数" α 很大, 那么这就是说, 市场上很少出现价格值的反常, 市场趋向于 "平滑", 价格值上没有大的振荡. 在这样的意义下, 有大 α 值的市场可看作*有效*运营的市场, 以至指数 α 的值是这种有效性的某种度量. (有关这方面的讨论参见例如 [204]).

4. 我们转向对于稳定分布估计 "稳定指数" 的问题, 并且以更一般的方式转向对于 Pareto 型分布的 "尾部指数" 估计问题.

应该立即注意到, 在金融文献中, 对于所有这样那样的汇率、股票和其他金融指标的 "尾部指数" α 的*真实*值应该是怎样的, 并无一致的看法. 正如已经注意到, 这说明了构造参数 α 的有效估计量 $\widehat{\alpha}_N$ (N 是观察值个数) 的困难所在. 提出对这个参数进行估计的问题本身, 就要求对获得统计 "原材料" $\{\widehat{h}_{t_k}^{(\Delta)}\}$、正确选取 Δ 的值等等的所有先决条件, 有精确的陈述.

在金融文献中, 对于 "稳定指数" α 的估计经常运用在著作 [152] 和 [153] 中所提出的由下列形式确定的 (有效) 估计量 $\widehat{\alpha}_N$:

$$\widehat{\alpha}_N=0.827\frac{\widehat{Q}_f-\widehat{Q}_{1-f}}{\widehat{Q}_{0.72}-\widehat{Q}_{0.28}},\qquad 0.95\leqslant f\leqslant 0.97, \tag{3}$$

其中 $\widehat{Q}_f$ 是在观察值服从对称稳定分布的假定下根据总量为 N 的样本所构造的 f 阶分位数.

在分布律 $\mathrm{Law}(\widetilde{h}_k)$ $(\widetilde{h}_k=\widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)})$ 属于 (稳定指数为 α 的) 稳定分布假设合理的情形下, 自然可能随着观察次数 N 的增长, $\widehat{\alpha}_N$ 的计算越来越稳定 (并且 $\widehat{\alpha}_N$ 收敛于某个值 $\alpha<2$).

然而, 正如已经注意到, 这里并没有共识. 有一系列著作断言对于某些金融指数所构造的估计量稳定化 "良好", 参见例如 [88] 和 [474]. 另一方面, 在许多著作中所导出的统计分析结果表明, $\widehat{\alpha}_N$ 不仅有增长倾向, 并且甚至趋向于等于或大于 2 的值, 参见例如, 有关美国股市的 [27] 和 [207] 以及有关德国的大公司和银行的股票的 [127]. 这就不利于认真对待*稳定性*假设, 尽管它自然并不与用 Pareto 型分布所描述

的 “尾部” 相矛盾.

5. 按照 [204], 我们引入在假定 $\widetilde{h}_k = \widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ 遵循 Pareto 型分布 (1) 的假定下, 有关货币汇率的 “尾部指数” α 的值的结果.

根据 [204] 中的数据, 所得到的 “尾部指数” $\alpha = \alpha(\Delta)$ 的值在下面的表中列出.

汇率 \ Δ	10 分钟	30 分钟	1 小时	6 小时
DEM/USD	3.11 ± 0.33	3.35 ± 0.29	3.50 ± 0.57	4.48 ± 1.64
JPY/USD	3.53 ± 0.21	3.55 ± 0.47	3.62 ± 0.46	3.86 ± 1.81
GBP/USD	3.44 ± 0.22	3.52 ± 0.46	4.01 ± 1.09	6.93 ± 10.79
CHF/USD	3.64 ± 0.41	3.74 ± 0.82	3.84 ± 0.77	4.39 ± 4.64
FRF/USD	3.34 ± 0.22	3.29 ± 0.47	3.40 ± 0.69	4.61 ± 1.21
FRF/DEM	3.11 ± 0.41	2.55 ± 0.23	2.43 ± 0.23	3.54 ± 1.42
NLG/DEM	3.05 ± 0.27	2.44 ± 0.08	2.19 ± 0.12	3.37 ± 1.43
ITL/DEM	3.31 ± 0.51	2.93 ± 1.17	2.54 ± 0.49	2.86 ± 0.98
GBP/DEM	3.68 ± 0.35	3.63 ± 0.42	4.18 ± 1.67	3.22 ± 0.79
JPY/DEM	3.69 ± 0.41	4.18 ± 0.90	4.13 ± 1.05	4.71 ± 1.61

对这个表我们作些评论.

在下面的第 6 点中将叙述参数 α 的估计量 $\widehat{\alpha}$ 的构造, 它们是基于 “Olsen & Associates” 的数据 (§1b) 列出的. 在 $\Delta = 6$ 小时的情形下, 估计精度降低, 这点与样本量不够有关.

对这个表 (它是在*大量数据的基础*上形成的, 因而其表示是*可靠的*) 的数值进行分析可以作出的重要结论在于, FX-市场中的主要货币关于美元 (USD) 的汇率 (对于 $\Delta = 10$ 分钟) 有带 “尾部指数” $\alpha \approx 3.5$ 的 Pareto 型分布, 并且指数随着区间 Δ 的增大而增大. 尤其是, 量 $\widetilde{h}_k = \widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ 的方差*有限* (极为期待的性质!) 变得相当真实, 尽管对用来确定分布在中心值附近的峰度的四阶矩并不能说同样的话.

在 “Olsen & Associates” 的另一篇著作 [91] 中, 也引进了比率 XAU/USD 和 XAG/USD 的数据 (XAU 是黄金, XAG 是白银). 对于 $\Delta = 10$ 分钟, 相应的 α 的估计为 4.32 ± 0.56 和 4.04 ± 1.71; 对于 $\Delta = 30$ 分钟, 这些估计值分别为 3.88 ± 1.04 和 3.92 ± 0.73.

6. 在这一点中, 将只叙述构造 “尾部指数” α 的估计量 $\widehat{\alpha}$ 的*思路*, 它来自 [204], 并在提出上述表时被运用, 其中在确定估计量的偏差和标准差时应用了*自助法* (bootstrap) 和*刀切法* (jackknife) 技巧.

我们考察其密度如下的*Pareto 分布*:

$$f_{\alpha b}(x) = \frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \qquad x \geqslant b, \tag{4}$$

其中 $f_{\alpha b} = 0$ 对于 $x < b$ 成立.

当 $x \geqslant b$ 时,

$$\ln f_{\alpha b}(x)=\ln\alpha+\alpha\ln b-(\alpha+1)\ln x. \tag{5}$$

由此求得, 按照 N 个独立观察 $(X_1,\cdots,X_N)$ 的极大似然估计量 $\widehat{\alpha}_N$ 由下述条件来刻画:

$$\max_{\alpha}\prod_{k=1}^{N} f_{\alpha b}(X_k)=\prod_{k=1}^{N} f_{\widehat{\alpha}_N b}(X_k), \tag{6}$$

而估计量 $\widehat{\alpha}_N$ 由下列关系式确定:

$$\frac{1}{\widehat{\alpha}_N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{X_i}{b}\right). \tag{7}$$

由于对于 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$ 有

$$\alpha\int_{\beta}^{\infty}(\ln x)x^{-(\alpha+1)}dx=\beta^{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}+\ln\beta\right),$$

故

$$\mathsf{E}\ln\frac{X_i}{b}=\alpha b^{\alpha}\int_{b}^{\infty}\left(\ln\frac{x}{b}\right)x^{-(\alpha+1)}dx=\frac{1}{\alpha}.$$

这样,

$$\mathsf{E}\left(\frac{1}{\widehat{\alpha}_N}\right)=\frac{1}{\alpha},$$

即, 量 $1/\widehat{\alpha}_N$ 是 $1/\alpha$ 的无偏估计, 以至所求得的参数 α 的估计量 $\widehat{\alpha}_N$ 具有极好的性质, 当然, 这是在假定真实分布 (恰好) 有已知 "起点" b 的情况下得到的, 而不是在假定对于 "起点" b 干脆不确定的 Pareto 型分布的情况下得到的.

尽管如此, 仍然产生了运用公式 (7) 来估计 Pareto 型 分布中的参数 α 的自然想法 (参见 [223]), 其中以某种适当的估计量来取代未知的 "起点" b.

例如可这样处理. 选取某个充分大 (但与 N 比较不太大) 的数 M, 我们把 b 取代为 M 来构造参数 α 的估计量的公式 (7) 的修正, 其中关于 $i\leqslant N$ 的求和替换为对满足 $X_i\geqslant M$ 的 i 求和.

为此, 我们定义

$$\widehat{\gamma}_{N,M}=\frac{\sum_{\{i\leqslant N:\,X_i\geqslant M\}}\ln\frac{X_i}{M}}{\sum_{\{i\leqslant N:\,X_i\geqslant M\}}I_M(X_i)}, \tag{8}$$

其中

$$I_M(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\geqslant M,\\ 0, & \text{当 } x<M.\end{cases}$$

如果记

$$\nu_{N,M}=\sum_{\{i\leqslant N:\,X_i\geqslant M\}}I_M(X_i),$$

那么 $\widehat{\gamma}_{N,M}$ 可改写为下列形式:

$$\widehat{\gamma}_{N,M}=\frac{1}{\nu_{N,M}}\sum_{\{i\leqslant N:\ X_i\geqslant M\}}\ln\frac{X_i}{M},\tag{9}$$

而作为参数 α 的估计量自然取作满足下式的值 $\widehat{\alpha}_{N,M}$:

$$\frac{1}{\widehat{\alpha}_{N,M}}=\widehat{\gamma}_{N,M}.\tag{10}$$

也可用另一种方式来处理. 把样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_N)$ 排序为样本 $(X_1^*,X_2^*,\cdots,X_N^*)$, 使得 $X_1^*\geqslant X_2^*\geqslant\cdots\geqslant X_N^*$. 再固定某个数 $M\ll N$ 作为 "起点" b, 并令

$$\gamma_{N,M}^*=\frac{1}{M}\sum_{1\leqslant i\leqslant M}\ln\frac{X_i^*}{X_M^*}.\tag{11}$$

于是作为参数 α 的估计量可取满足下式的值 $\alpha_{N,M}^*$:

$$\frac{1}{\alpha_{N,M}^*}=\gamma_{N,M}^*.\tag{12}$$

这样得到的估计量 $\alpha_{N,M}^*$ 是 B. M. Hill 在 [223] 中提出的, 通常也称它为*Hill 估计量*.

显然, 这个估计量的 "好" 性质取决于正确选取数 M , 即形成统计量 $\alpha_{N,M}^*$ 的最大统计阶数. 然而, 同样明显的是, 不难对于一大类缓减函数 $L=L(x)$ 来计算某个普适的样本数 M, 其中 $L=L(x)$ 比如是由右 "尾部" 的性态如下确定的:

$$\mathsf{P}(X_i>x)\sim x^{-\alpha}L(x).\tag{13}$$

通常上面所考察的估计量 $\alpha_{N,M}^*$ 和 $\widehat{\alpha}_{N,M}$ 的性质仅限于对函数 $L=L(x)$ 的某个子类来研究. 例如, 可假定, $L=L(x)$ 属于子类

$$L_\gamma=\{L=L(x)\colon L(x)=1+cx^{-\gamma}+o(x^{-\gamma}),\ c>0\},$$

其中 $\gamma>0$. 在这样的假定下, [223] 中指出, 如果当 $N\to\infty$ 时, 量 $M\to\infty$, 但

$$\frac{M}{N^{\frac{2\gamma}{2\gamma+\alpha}}}\to 0,$$

那么

$$\mathrm{Law}\left(\sqrt{M}(\alpha_{N,M}^*-\alpha)\right)\to\mathscr{N}(0,\alpha^2),$$

即估计量 $(\alpha_{N,M}^*)$ 的渐近正态性成立.

§2d. 相对价格变化的对数的一维分布. III. 分布中心部分的结构

1. 说到底, 考虑分布 $\mathrm{Law}(\widetilde{h}_k)$ 的特征, 是要问在中心值附近的密度的峰度和有"尾部指数" $\alpha > 2$ 的厚尾相结合是怎样的 (正如在货币汇率情形下那样)?

看来, 很难指望这点可借助于某个单一标准分布来做到. 考虑到在市场上具有带各种利益、各种时间视野的交易者、投资者以及其他代理, 下列视角更有吸引力: 应该在 $\widetilde{h}_k$ 可取值 x 的各个"自有"区域上引入多种标准分布.

许多作者, 其中首先是 B. Mandelbrot, 坚持不懈地主张运用稳定分布 (以及在其基础上所构建的某些修正) 的思想, 因为它在值 x 的中心部分相当合适. 参见例如专著 [352], 其中有丰富的统计资料、稳定分布理论及其推广, 以及统计分析结果.

下面我们将详细讨论著作 [330] 中的关于运用稳定分布律来描述指数 S&P500 在中心带的性态的结果. (为了描述"尾部", [330] 的作者建议运用正态分布, 特别是由这样的事实出发: 由于统计原材料的局限, 不可能作出所企求的关于"尾部"性态的结论; 也参见 [464].)

至于其他金融指数的讨论则可参考著作 [127], 其中引进了十家德国的大公司和银行的金融指数的详尽的统计分析, 结论是双曲分布在中心部分拟合得出奇地好.

在第三章 §1d 中, 我们给出了这种双曲分布类的详细描述, 它与稳定分布类一起为理论分布提供了一个足够丰富的武库. 由于无论是双曲分布还是稳定分布, 都是用四个参数来描述的, 故可期待这些参数的适当改变能使理论与试验完好地达到一致.

2. 我们转向在著作 [330] 中所介绍的按照 S&P500 指数的数据所进行的统计分析的结果.

考察这一指数在纽约交易所 NYSE (New York Stock Exchange) 的六年 (1984 年 1 月到 1989 年 10 月) 中的演变. 一共记录了 1 447 514 次标记 (芝加哥商品交易所 (Chicago Mercantile Exchange) 的数据). 平均来说, 在 1984—1985 年间, 通常每分钟发生一次标记, 而在 1986—1987 年间, 每 50 秒发生一次.

由于交易所日常只在"开盘"和"收盘"间的时间工作, 故为了获得描述 S&P500 指数的过程, 对"交易时间 (trading time)" t 要注意"昨天的收盘价"与"今天的开盘价"之间的衔接.

设 $S = (S_t)$ 是用所描述的方式得到的过程. 我们将考察这个过程在某个时间间隔 Δ 中的变化:

$$\Delta S_{t_k} = S_{t_k} - S_{t_{k-1}}, \tag{1}$$

其中 $t_k = k\Delta$, 间隔 Δ 取遍从 1 分钟到 10^3 分钟的一系列值. (在著作 [330] 中 Δ 取下列值: $\Delta = 1, 3, 10, 32, 100, 316, 1000$ 分钟; 对应间隔 $\Delta = 1$ 的标记量等于 493 545, 而当 $\Delta = 1000$ 分钟, 这个数等于 562.)

如果运用 §2a 中的记号, 那么可以察觉, 由于 $\widetilde{S}_{t_k} \approx S_{t_k}$, 而增量 $\Delta S_{t_k} \equiv S_{t_k} - S_{t_{k-1}}$ 很小,

$$S_{t_k} \approx S_{t_{k-1}} e^{\widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}} \approx S_{t_{k-1}}(1 + \widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}),$$

由此得到 $\Delta S_{t_k} \approx S_{t_{k-1}} \widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$.

这一 (近似) 关系式表明, 在增量 $(S_{t_k} - S_{t_{k-1}})$ 独立的情形下分布 $\mathsf{P}(\widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)} \leqslant x)$ 和条件分布 $\mathsf{P}(\Delta S_{t_k} \leqslant x \mid S_{t_{k-1}} = y)$ 的特征照例是一样的.

对量 ΔS_{t_k} ($t_k = k\Delta$, 这里假定它们同分布) 的经验密度 $\widehat{p}^{(\Delta)}(x)$ 进行运作, [330] 的作者导出 $\log_{10} \widehat{p}^{(\Delta)}(x)$ 的图像, 其性态大致如同图 35 中所画出.

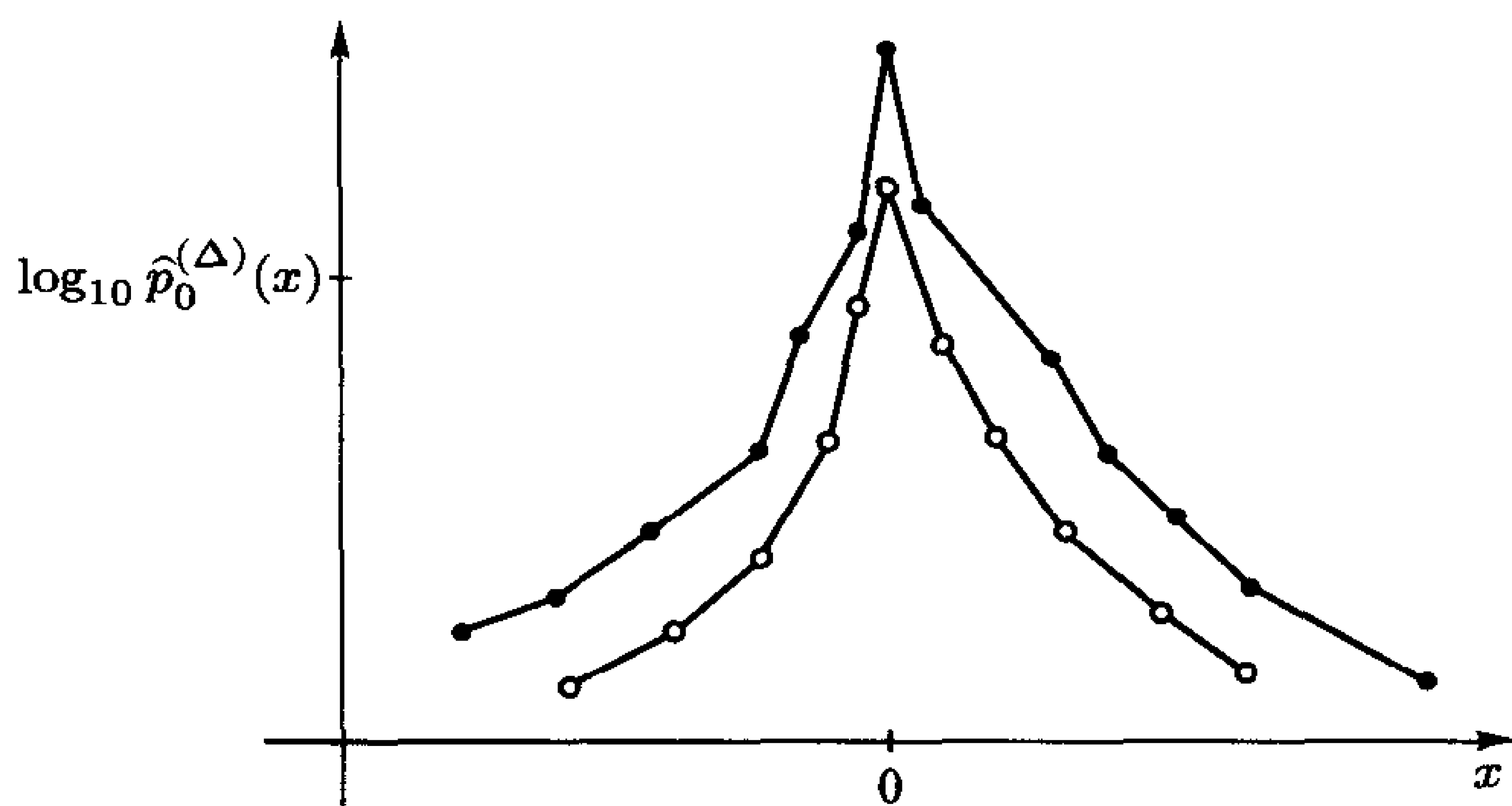


图 35 对两个不同 Δ 值的 $\log_{10} \widehat{p}^{(\Delta)}(x)$ 的性态大致图像

即使对于 [330] 中关于许多 Δ 值所引入的图像 $\log_{10} \widehat{p}_{t_k}^{(\Delta)}(x)$ 进行简单的外观分析, 也能指出, 分布密度足够对称, 并且随着 Δ 的增长而舒展, 随着 $x \to \pm\infty$ 而递减, 但不如高斯分布下降得那么快.

这里可观察到的单峰性、对称性以及经验密度的递减特征使人合理地转向对称稳定分布. 我们记得, 有对称分布的稳定随机变量的特征函数 $\varphi(\theta) = \mathsf{E}e^{i\theta X}$ 有下列形式 (参见第三章 §1a 中的 (14)):

$$\varphi(\theta) = e^{-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha}, \tag{2}$$

其中 $\sigma \geqslant 0$ 以及 $0 < \alpha \leqslant 2$. 这样一来, 如果采用 "稳定性" 假设, 那么首先应该估计参数 α 的值.

稳定分布是 Pareto 型分布. 在对于 $0 < \alpha < 2$ 的对称情形下 (参见第三章 §1a 中的 (7) 和 (8)),

$$\mathsf{P}(|X| > x) \sim \widetilde{c}_\alpha x^{-\alpha}, \qquad x \to \infty,$$

其中 $\widetilde{c}_\alpha$ 是某个常数, 而为了确定 α 的值, 可运用在上面 §2c 中所叙述的估计技巧.

然而, [330] 的作者正确地注意到, 观察数量不够会使得参数 α 的这种估计方法并不完全可靠, 因为它要求大量的极端值. 因此, 取代这一方法, 作者所运用的方法与此相反, 它只对观察值的中心部分进行运作.

这一方法的实质如下.

设特征函数

$$\varphi^{(\Delta)}(\theta) = \mathsf{E}e^{i\theta\Delta S_{t_k}}$$

有下列形式

$$\varphi^{(\Delta)}(\theta) = e^{-\gamma\Delta|\theta|^{\alpha}}. \tag{3}$$

于是分布 $\mathsf{P}(\Delta S_{t_k} \leqslant x)$ 的密度 $p^{(\Delta)}(x)$ 按照逆转公式可表示为下列形式:

$$p^{(\Delta)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\gamma\Delta|\theta|^{\alpha}} \cos\theta x d\theta.$$

当 $x=0$ 时,

$$p^{(\Delta)}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\gamma\Delta|\theta|^{\alpha}} d\theta = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\pi\alpha(\gamma\theta\Delta)^{1/\alpha}}. \tag{4}$$

从而,

$$p^{(n\Delta)}(0) = n^{-1/\alpha}p^{(\Delta)}(0). \tag{5}$$

当然, 这个结果也可不利用逆转公式 (3) 来得到, 而只需利用稳定分布律定义的本身, 根据这一定义,

$$\mathrm{Law}(\Delta S_{t_1} + \Delta S_{t_2} + \cdots + \Delta S_{t_n}) = \mathrm{Law}(C_n(S_{t_1} - S_{t_0})), \qquad t_0 = 0, \tag{6}$$

以及已知下列结果:

$$C_n = n^{1/\alpha}$$

(参见第三章 §1a).

事实上, 由于 $\Delta S_{t_1} + \Delta S_{t_2} + \cdots + \Delta S_{t_n} = S_{t_n} - S_0$, 故

$$\mathrm{Law}(S_{t_n} - S_0) = \mathrm{Law}(n^{1/\alpha}(S_{t_1} - S_0)).$$

因此,

$$p^{(n\Delta)}(x) = n^{-1/\alpha}p^{(\Delta)}(xn^{-1/\alpha}), \tag{7}$$

以至当 $x=0$ 时导出公式 (5).

关系式 (5) 使得有可能根据有 $\Delta = 1$ 分钟和 $n = 1, 3, 10, 32, 100, 316, 1000$ 的经验密度 $\widehat{p}^{(n\Delta)}(0)$, 再转换为对数和应用最小二乘法, 来得到 "稳定指数" α 的估计量 $\widehat{\alpha}$. (上述值 $n = 1, 3, 10, \cdots$ 的选择联系着其对数 $\log_{10} n$ 几乎互相等差: $\log_{10} 3 = 0.477$, $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} 32 = 1.505, \cdots$.)

在 [330] 中用这样的方法得到的 α 的估计量如下:

$$\widehat{\alpha} = 1.40 \pm 0.05. \tag{8}$$

我们立即可注意到, 这个结果并不能看作与在 §2c 的第 5 点中得到的对于 "尾部指数 α" 的估计 $\widehat{\alpha} \approx 3.5$ 相矛盾. 事实在于这些估计的得到是在对于分布特征的不同假设下得到的. 在一种情形下, 这个假设是分布属于 "稳定" 型假设, 而在另一种情形下, 假设分布 (对于 "尾部" 值) 属于 Pareto 型. 此外, 并非无关紧要的是, 在第一种情形下, 研究对象是汇率, 而在第二种情形下则是 S&P500 指数. 而一般来说, 没有任何扎实的基础来认为它们的分布的性态特征是一样的, 因为它们受到不同的经济环境的约束 (在汇率情形下, 它是国际经济状况, 而在 S&P500 指数的情形下, 它是美国的国内经济状况).

我们察觉, 上述关于汇率和 S&P500, Dow 等等的金融指数的不同性态特征的观点被后面在 §4b 中叙述的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析的结果所证实.

还要注意到, 估计量 (8) 是按 "中心" 值计算的, 而值 $\widehat{\alpha} \approx 3.5$ 是按 "尾部" 计算的. 因此, 估计值的不相符只是在上面所说的意义下得到证实: 金融指数在不同区域的值要用不同的标准分布来描述, 而看来很难用同一个普适分布来描述.

3. 经验密度 $\widehat{p}^{(n\Delta)}(x)$ 的中心部分能很好地用对称稳定密度 $p^{(n\Delta)}(x)$ 所逼近这一事实, 也被下列基于自相似性质的讨论所证实.

我们考察样本量为 k 的样本

$$(\Delta S_{t_1^{(n)}}, \cdots, \Delta S_{t_k^{(n)}}), \qquad t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} = n\Delta,$$

其中时间步长为 $n\Delta$, $\Delta = 1$ 分钟. 如果把这些样本转换为样本

$$(n^{-1/\alpha}\Delta S_{t_1^{(n)}}, \cdots, n^{-1/\alpha}\Delta S_{t_k^{(n)}}),$$

那么这些新样本必定有与下列样本有同样的分布:

$$(\Delta S_{t_1}, \cdots, \Delta S_{t_k}), \qquad t_i - t_{i-1} = \Delta.$$

因此, 根据这些样本对量 $n^{-1/\alpha}\Delta S_{t_i^{(n)}}$ 和 ΔS_{t_i} 估计 (同一分布的) 一维密度, 依照 (7), 必定是 "强相似的".

[330] 中引入把参数值 Δ 等于 1, 3, 10, 32, 100, 316, 1000 (分钟) 的经验密度转换 "提升" 得到的图像 (关于这一方法参见第三章 §2c 中的第 6 点); 它们令人充分信服地见证了 (参数 $\alpha \approx 1.40$ 时) 稳定分布假设的益处.

(3) 中的系数 γ 可由 (4) 根据经验密度 $\widehat{p}^{(\Delta)}(0)$ 和估计值 $\widehat{\alpha} = 1.40$ 来估计. 所得到的 γ 的估计值 $\widehat{\gamma}$ 等于 0.00375.

3. 价格中的波动率、相关依赖性和后效的统计

§3a. 波动率. 定义和例子

1. 在金融数学中, 没有一个概念像波动率概念那样引起众说纷纭, 争论不休, 真

令人遗憾. 作为变化率的同义词 [1], *波动率*可用多种不同方式来定义, 而术语本身用来作为各种可变性程度度量的正式名称.

如果 $S_n = S_0 e^{H_n}$, $H_0 = 0$, 并且 $\Delta H_n = \sigma\varepsilon_n$, $n \geqslant 1$, 其中 (ε_n) 是高斯白噪声, $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0,1)$, 那么波动率被理解为这里的不确定性和变化性的度量: *标准差* σ.

我们记得, 如果随机变量 $\xi \sim \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$, 那么

$$\mathsf{P}(|\xi - \mu| \leqslant \sigma) \approx 0.68 \tag{1}$$

以及

$$\mathsf{P}(|\xi - \mu| \leqslant 1.65\sigma) \approx 0.90. \tag{2}$$

这样一来, 照例有 90% 的情形可期待对 ξ 的观察结果与均值 μ 的偏差不超过 1.65σ.

在模式 "$S_n = S_{n-1}e^{h_n}$" 中量 h_n 通常很小, 以至

$$S_n \approx S_{n-1}(1 + h_n).$$

因此, 如果 $h_n = \sigma\varepsilon_n$, 那么可以断定, 当 "今天" 的价格值为 S_{n-1} 时, 它 "明天" 的值 S_n 在 90% 的情形下将落在区间 $[S_{n-1}(1 - 1.65\sigma), S_{n-1}(1 + 1.65\sigma)]$ 中, 而这就是说, 照例只有在 5% 的情形下 S_n 将超过 $S_{n-1}(1 + 1.65\sigma)$ 以及在 5% 的情形下将低于 $S_{n-1}(1 - 1.65\sigma)$.

注 1. 上面的叙述说明, 为什么在某些金融业主管那里 (参见例如, [404]) 以量 $\nu = 1.65\sigma$ 取代标准差 σ 来作为波动率的度量.

2. 所考察的高斯模型 "$h_n = \sigma\varepsilon_n$, $n \geqslant 1$", 正如我们以前所看到, 它离现实很远. 更为现实的是型为 "$h_n = \sigma_n\varepsilon_n$, $n \geqslant 1$" 的条件高斯模型, 其中序列 $\sigma = (\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ 是随机序列, 并且 σ_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 而 ε_n 为 $\mathscr{F}_n$-可测, 其中 $(\mathscr{F}_n)$ 是 "信息" 流 (例如, 关于价格值的信息流; 详情参见第一章中的 §2a).

遵循已有的传统, 序列 $\sigma = (\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ 照例也称为 (所考察的模型中的) *波动率序列*, 其随机特征可表达为 "波动率自身在波动".

我们察觉,

$$\mathsf{E}(h_n^2 | \mathscr{F}_{n-1}) = \sigma_n^2, \tag{3}$$

而取值为 $H_n = h_1 + \cdots + h_n$ $(\mathsf{E}|h_n|^2 < \infty,\ n \geqslant 1)$ 的序列 $H = (H_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ 是平方可积鞅, 其平方特征为

$$\langle H \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(h_k^2 | \mathscr{F}_{k-1}), \qquad n \geqslant 1. \tag{4}$$

[1] "蓝顿韦伯斯特简明辞典 (Random House Webster's concise dictionary)" 对术语*volatile* 作出这样的注解: "1. 快速挥发的 (evaporating rapidly). 2. 易爆发或有爆发危险的; 爆炸性的 (tending or threatening to erupt in violence; explosive). 3. 可变的; 不稳定的 (*changeable*; unstable)."

根据 (3),

$$\langle H\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2; \tag{5}$$

因而平方特征

$$\langle H\rangle = (\langle H\rangle_n, \mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$$

自然称为序列 H 的波动率.

很明显,

$$\mathsf{E}H_n^2 = \mathsf{E}\langle H\rangle_n. \tag{6}$$

3. 在$ARCH(p)$ 模型的情形下,

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_{n-i}^2 \tag{7}$$

(参见第二章中的 §3a).

因此, 对于这样的模型来说, 波动率 σ_n 的估计问题归结为系数 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 的参数估计问题.

还存在另一些波动率估计方法, 例如非参数方法. 这样, 如果 $h_n = \mu_n + \sigma_n \varepsilon_n$, $n \geqslant 1$, 其中 $\mu = (\mu_n)$ 和 $\sigma = (\sigma_n)$ 是平稳序列, 那么对于 σ_n 的自然估计是标准估计量

$$\widehat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (h_k - \overline{h}_n)^2}, \tag{8}$$

其中 $\overline{h}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} h_k$.

值得注意的是, 经验波动率 $\widehat{\sigma} = (\widehat{\sigma}_n)_{n\geqslant 1}$ 也可看作某个金融统计指数, 因而对它进行分析, 也可应用与研究价格 $S = (S_n)_{n\geqslant 1}$ 本身时一样的方法论和技巧.

出于这一目的, 我们引入量

$$\widehat{r}_n = \ln \frac{\widehat{\sigma}_n}{\widehat{\sigma}_{n-1}}, \qquad n \geqslant 2. \tag{9}$$

多项观察和出版物 (例如, [386; 第 10 章]) 指出, 对数收益量 $\widehat{r} = (\widehat{r}_n)_{n\geqslant 2}$ 快速变化自己的值, 表明值 $\widehat{r}_n$ 和 $\widehat{r}_{n+1}$ $(n \geqslant 2)$ 之间呈负相关. 如果取 S&P500 指数为例, 并对相应的量 $\widehat{r} = (\widehat{r}_n)_{n\geqslant 2}$ 应用 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析 (参见第三章 §2a 以及本章的第 4 节), 那么负相关效应将被完全证实. 这里量 $\widehat{r} = (\widehat{r}_n)$ 的一阶逼近可认为是高斯的, 因而其负相关性 (与所观察到的自相似性一起) 可看作有利于这样的论点: 这一序列是 Hurst 参数 $\mathbb{H} < 1/2$ 的分形噪声. (根据 [386], 对于指数 S&P500, 参数 $\mathbb{H} \approx 0.31$.)

4. 认清波动率概念的重要性在很大程度上归功于 F. Black 和 M. Scholes 1973 年的著名论文 [44], 其中给出了标准买入期权的公平 (合理) 价格 $\mathbb{C}_T$ 的公式 (参见

第一章中的 §1b). 根据这一公式, 量 $\mathbb{C}_T$ 不依赖于 μ (一眼看来令人惊讶的事实!), 但依赖于波动率 σ 的值, 它们都在确定股票价格 $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ 演变的公式中:

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \qquad H_t = \sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t, \tag{10}$$

其中 $W=(W_t)_{t\geqslant 0}$ 是标准维纳过程.

当然, 在模型 (10) 中的波动率 σ 首先假定为常数, 其次假定为已知常数, 这都不太现实. 因此, 越来越清楚的是, 在实际中应用 Black 和 Scholes 的公式时, 至少要求波动率可能值的某种近似表示, 而这不仅对于确定期权的公平价格, 并且对于确定对价格决定采用第一章 §1b 中的公式 (9) 和 (10) 的模型所带来的风险程度, 都是必要的.

在这一联系中, 应该讨论的还有一个通向波动率概念的 (经验) 通道, 其定义运用了 *Black-Scholes* 公式, 以及在证券市场上的期权的现实价格.

为了给出对应的定义, 记 $\mathbb{C}_t=\mathbb{C}_t(\sigma;T)$ 为在时刻 $t<T$ 购买在到期时刻 T 有 $f_T=(S_T-K)^+$ 的标准欧式买入期权的价格的 (理论) 值.

价格 $\mathbb{C}_t$ 是理论价格. 在实践中, 它也是时刻 t 的价格 $\widetilde{\mathbb{C}}_t$ 的实际解释, 它可以用来求下列方程的根:

$$\widetilde{C}_t = \mathbb{C}_t(\sigma;T). \tag{11}$$

这样求得的值 σ 记作 $\widetilde{\sigma}_t$, 称为隐含 (implied) 波动率, 并认为它是真实波动率的好估计量.

应该注意到, 就其自身的性态特征而言, 隐含波动率类似于用 (在连续时间情形下) 类型 (8) 的公式来确定的经验波动率. 这时其负相关性和分形结构极为清晰可见 (参见例如, [386; 第 10 章]).

5. 我们讨论另一个通向波动率定义的途径, 它基于考察过程 $H=(H_t)_{t\geqslant 0}$ 的变差特征, 后者是由价格 $S=(S_t)_{t\geqslant 0}$ 来确定的, $S_t=S_0e^{H_t}$. 许多统计观察以及经济论证都有利于说, 过程 $H=(H_t)_{t\geqslant 0}$ 具有自相似性, 它特别是意味着, 量 $H_{t+\Delta}-H_t$ 的分布律对于不同的 $\Delta>0$ 来说具有某种相似性 (参见第三章中的第二节).

我们记得, 如果 $H\equiv B_{\mathbb{H}}$ 是分形布朗运动, 那么对于每个 $\Delta>0$ 和 $t\geqslant 0$, 有

$$\mathsf{E}|H_{t+\Delta}-H_t| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Delta^{\mathbb{H}} \tag{12}$$

以及

$$\mathsf{E}|H_{t+\Delta}-H_t|^2 = \Delta^{2\mathbb{H}}. \tag{13}$$

对于参数满足 $0<\alpha\leqslant 2$ 的严格 α-稳定 Lévy 运动来说,

$$\mathsf{E}|H_{t+\Delta}-H_t| = \mathsf{E}|H_\Delta| = \Delta^{1/\alpha}\mathsf{E}|H_1|. \tag{14}$$

因此, 记 $\mathbb{H} = 1/\alpha$, 我们求得

$$\mathsf{E}|H_{t+\Delta} - H_t| = \Delta^{\mathbb{H}}\mathsf{E}|H_1|, \tag{15}$$

它类似于对于分形布朗运动的公式 (12).

所引入的公式和基于大数定律的考虑表明引入变差特征很自然, 并且还表明, 在此基础上可自然地进行下列问题的统计检验: 参与价格 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 形成的过程 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 是否是分形布朗运动类型或 α-稳定 Lévy 运动类型的自相似过程.

这时, 应该强调, 从统计分析的视角来看, 不同的投资者群可能对不同的时间间隔和时间视野感兴趣.

这样, 对于短期投资者来说, 有价值的是对于短时间间隔 $\Delta > 0$ (几分钟甚至几秒钟) 在时刻 $t_k = k\Delta$ $(k \geqslant 0)$ 的价格值 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 的数据. 对于长期投资者来说, 他们对类似的信息不感兴趣, 而对于他们来说, 有价值的是有关价格在长时间间隔 (月, 甚至年) 中的变化数据, 具有 (无论是周期性的, 还是非周期性的) 循环及其持续的信息, 以及关于倾向现象的信息等等.

考虑到这一点, 我们将在以后明确指出可选择的时间间隔 Δ 以及区间 $(a, b]$; 前者的选取是用来作为刻画投资者时间尺度的度量单位, 后者的选取则是因为我们对所考察的金融指数在这一区间上的演变和变化特征有兴趣.

6. 关于在时间区间 $(a, b]$ 上有良好表示的过程 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 的变化可通过下列 Δ-变差来刻画:

$$\mathrm{Var}_{(a,b]}(H;\Delta) = \sum |H_{t_k} - H_{t_{k-1}}|, \tag{16}$$

其中求和对于所有这样的 k 来进行: 对于它们来说, $a \leqslant t_{k-1} < t_k \leqslant b$, 并且所有 t_k 形为 $k\Delta$.

显然, 对 $H = (H_t)_{a\leqslant t\leqslant b}$ "足够正则" 的函数 (实现) 和小 $\Delta > 0$, 量 $\mathrm{Var}_{(a,b]}(H;\Delta)$ 迫近于

$$\mathrm{Var}_{(a,b]}(H) \equiv \int_a^b |dH_s|, \tag{17}$$

它按定义为

$$\sup \sum |H_{t_k} - H_{t_{k-1}}|, \tag{18}$$

其中 sup 对区间 $(a, b]$ 的所有使得 $a = t_0 < t_1 < t_1 < \cdots < t_n \leqslant b$ 的有限分划 $(t_0, \cdots, t_n)$ 来取.

在对过程 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 进行统计分析时, 假定有均匀的增量, 有价值的不是对 Δ-变差进行运作, 而是对下列规范量进行运作:

$$\nu_{(a,b]}(H;\Delta) = \frac{\mathrm{Var}_{(a,b]}(H;\Delta)}{\left[\frac{b-a}{\Delta}\right]}, \tag{19}$$

它将被称为是在 $(a, b]$ 上的 (经验) Δ-波动率.

同时考察下列阶为 $\delta > 0$ 的 Δ-波动率经常是有益的:

$$\nu_{(a,b]}^{(\delta)}(H;\Delta) = \frac{\operatorname{Var}_{(a,b]}^{(\delta)}(H;\Delta)}{\left[\frac{b-a}{\Delta}\right]}, \tag{20}$$

其中

$$\operatorname{Var}_{(a,b]}^{(\delta)}(H;\Delta) = \sum |H_{t_k} - H_{t_{k-1}}|^{\delta}, \tag{21}$$

而求和与 (16) 中所进行的一样.

注意, 对于分形布朗运动 $H = B_{\mathbb{H}}$ 来说, 当 $\Delta \to 0$ 时,

$$\operatorname{Var}_{(a,b]}^{(2)}(H;\Delta) \xrightarrow{\mathsf{P}} \begin{cases} \infty, & 0 < \mathbb{H} < \frac{1}{2}, \\ (b-a), & \mathbb{H} = \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < \mathbb{H} \leqslant 1, \end{cases} \tag{22}$$

其中 "$\xrightarrow{\mathsf{P}}$" 意味着按概率收敛.

如果 H 是严格 α-稳定 Lévy 运动, $0 < \alpha < 2$, 那么当 $\Delta \to 0$ 时,

$$\operatorname{Var}_{(a,b]}^{(2)}(H;\Delta) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{23}$$

注 2. 具有性质 (23) 的随机过程 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 自然称为零能量过程 (参见例如, [166]). 从而, 由 (22) 和 (23) 导出, 满足 $1/2 < \mathbb{H} \leqslant 1$ 的分形布朗运动和有 $\mathbb{H} = 1/\alpha > 1/2$ 的严格 α-稳定 Lévy 过程都是零能量过程.

7. 借助于后面叙述的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析 (参见第 4 节) 对波动率进行统计研究, 可用来解释一系列引人注目和出人意料的性质, 使得人们有可能检验关于 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ (在连续时间情形下) 和 $H = (H_n)_{n\geqslant 0}$ (在离散时间情形下) 的时空结构的这样那样的假设. 例如, 对于许多金融指数来说, 相当肯定的是应该验证形成序列 $H = (H_n)_{n\geqslant 0}$ 的量 h_n $(n \geqslant 1)$ 的独立性假设. (在连续时间情形下, 这对应假设 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 是否是独立增量过程.)

同时, Δ-波动率分析和 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-统计分析都有利于说, 量 h_n $(n \geqslant 1)$ 其实有足够的强后效性质, 它为期待对未来价格运动作出 "非平凡" 预测提供了基础.

对于许多金融指数 (股票, 债券, Dow 型指数, S&P500 指数等等) 来说都显露出波动率的分形结构. 这时, 最为突出的是货币汇率, 对此我们将在下一节中提及.

§3b. 汇率波动率的预测和分形结构

1. 在 §1b 中曾经引进在一昼夜中和在一周中获得的标记数的数据 (参见图 29 和 30). 这些数据清楚地表明具有

一昼夜内的不均匀性

和

昼夜循环 (周期性).

如果把过程 $H=(H_t)_{t\geqslant 0}$ 表示为下列形式 (比较 §1c 中的公式 (7)):

$$H_t=\sum h_{\tau_k}I(\tau_k\leqslant t), \tag{1}$$

其中 $H_t=\ln\dfrac{S_t}{S_0}$, 那么可以说, 图 29 和 30 描述的仅仅是由什么来确定过程 H 的 "时间" 成分, 即出现标记 (τ_k) 的时刻, 而不是要给出 "相" 成分序列 (h_{τ_k}) 或 $(\widetilde{h}_k)$ $(\widetilde{h}_k=\widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)})$ 的性态的表示 (参见 §2b 中的记号).

上面所引入的基于转化为 Δ-变差 $\mathrm{Var}_{(a,b]}(H;\Delta)$ 的 Δ-波动率概念可用来获得过程 H 和 $\widetilde{H}$ 既按时间、又按相变量的变化 "活跃程度" 的直观表示.

为了这一目的, 我们考察 Δ-波动率 $\nu_{(a,b]}(H;\Delta)$.

我们立即注意到, 如果 $a=(k-1)\Delta$, $b=k\Delta$, 那么

$$\nu_{((k-1)\Delta,k\Delta]}(H;\Delta)=|\widetilde{H}_{k\Delta}-\widetilde{H}_{(k-1)\Delta}|=|\widetilde{h}_k| \tag{2}$$

(参见 §2b 中的记号).

我们选取汇率 DEM/USD 作为研究对象, 使得 $S_t=(\mathrm{DEM/USD})_t$, $H_t=\ln\dfrac{S_t}{S_0}$.

我们将令 $\Delta=1$ 小时, 并在进行 "昼夜" 分析 (按每周的格林威治时间的 0:00 开始计算时间) 时取

$$t=1,2,\cdots,24\quad(\text{小时})$$

以及在进行 "周" 分析时取

$$t=1,2,\cdots,168\quad(\text{小时}).$$

我们察觉, $168=24\times 7$; 从而, 值 $t=168$ 是指一周末.

"Olsen & Associates" 的内容丰富的数据库使得有可能对星期的每一天获得对于量 $\nu_{((k-1)\Delta,k\Delta]}(H;\Delta)=|\widetilde{h}_k|$ 完全可靠的估计.

出于这一目的, 我们将对数据库中的第一个周一的格林威治时间 0:00 开始考虑时间. 如果 $\Delta=1$ 小时, 那么令 $k=1,2,\cdots,24$, 我们得到区间 $(0,1]$, $(1,2]$, $\cdots$, $(23,24]$, 它对应时间区间 (按格林威治时间)

$$(0{:}00,1{:}00],\ (1{:}00,2{:}00],\cdots,(23{:}00,24{:}00].$$

对整个周一按编号指数 j 对 $|\widetilde{H}_{k\Delta}^{(j)}-\widetilde{H}_{(k-1)\Delta}^{(j)}|$ 取算术平均值作为

$$\widehat{\nu}_{((k-1)\Delta,k\Delta]}(H;\Delta).$$

用类似的方式我们获得对周二 $(k=25,\cdots,48)$, $\cdots$, 直至对周日 $(k=145,\cdots,168)$ 的估计量 $\widehat{\nu}_{((k-1)\Delta,k\Delta]}(H;\Delta)$.

来自 [427] 的下面的图像 (图 36 和 37) 直观地图示了在一周内 Δ-波动率

$$\nu_{((k-1)\Delta,k\Delta]}(H;\Delta] = |\widetilde{h}_k|$$

在时间区间 $((k-1)\Delta, k\Delta]$ $(k=1,2,\cdots)$ 上的昼夜内的不均匀性 和昼夜周期性 (循环性).

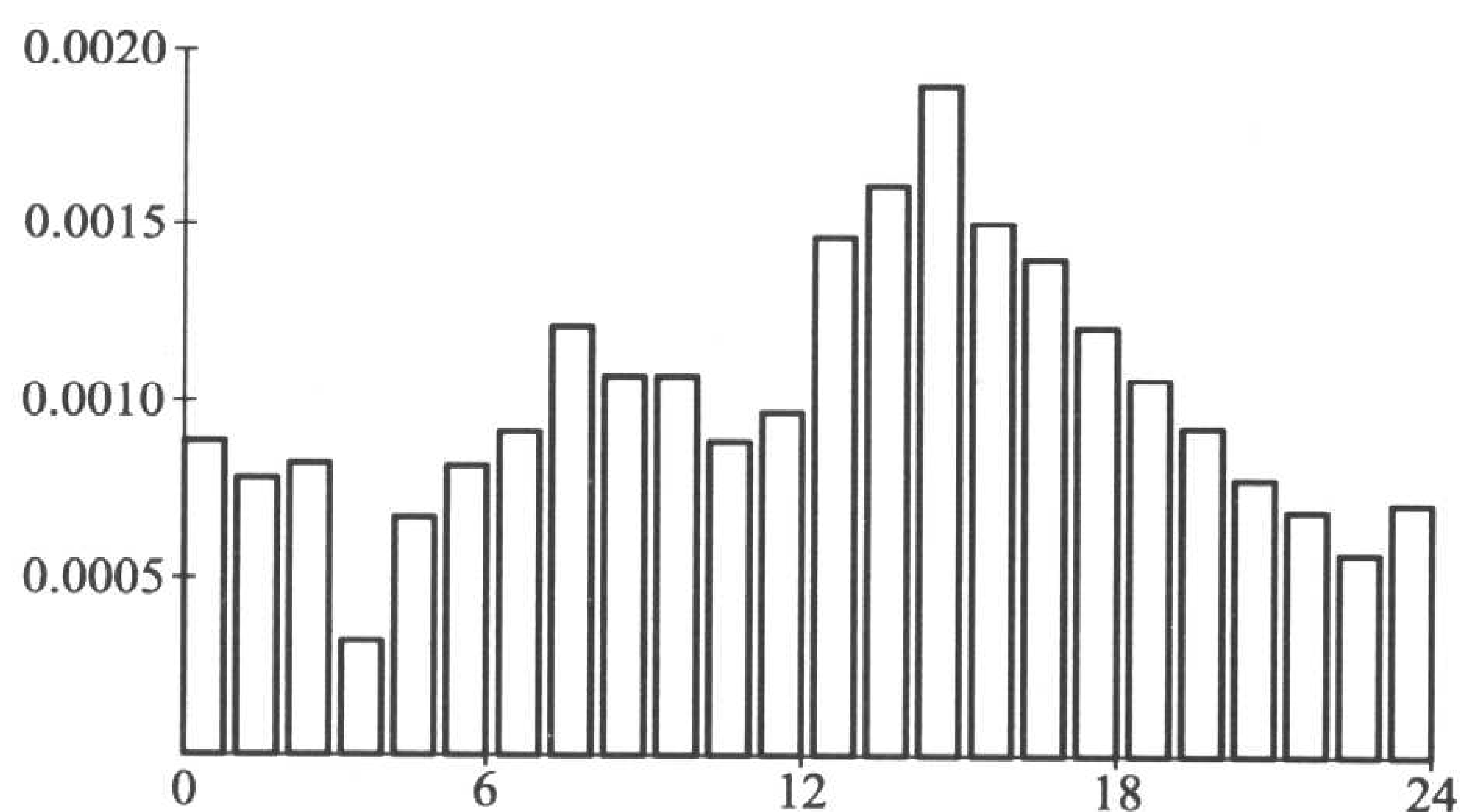


图 36 根据路透社数据获得的汇率 DEM/USD 的 Δ-波动率的一昼夜内的图像 (1992.10.05—1993.09.26)

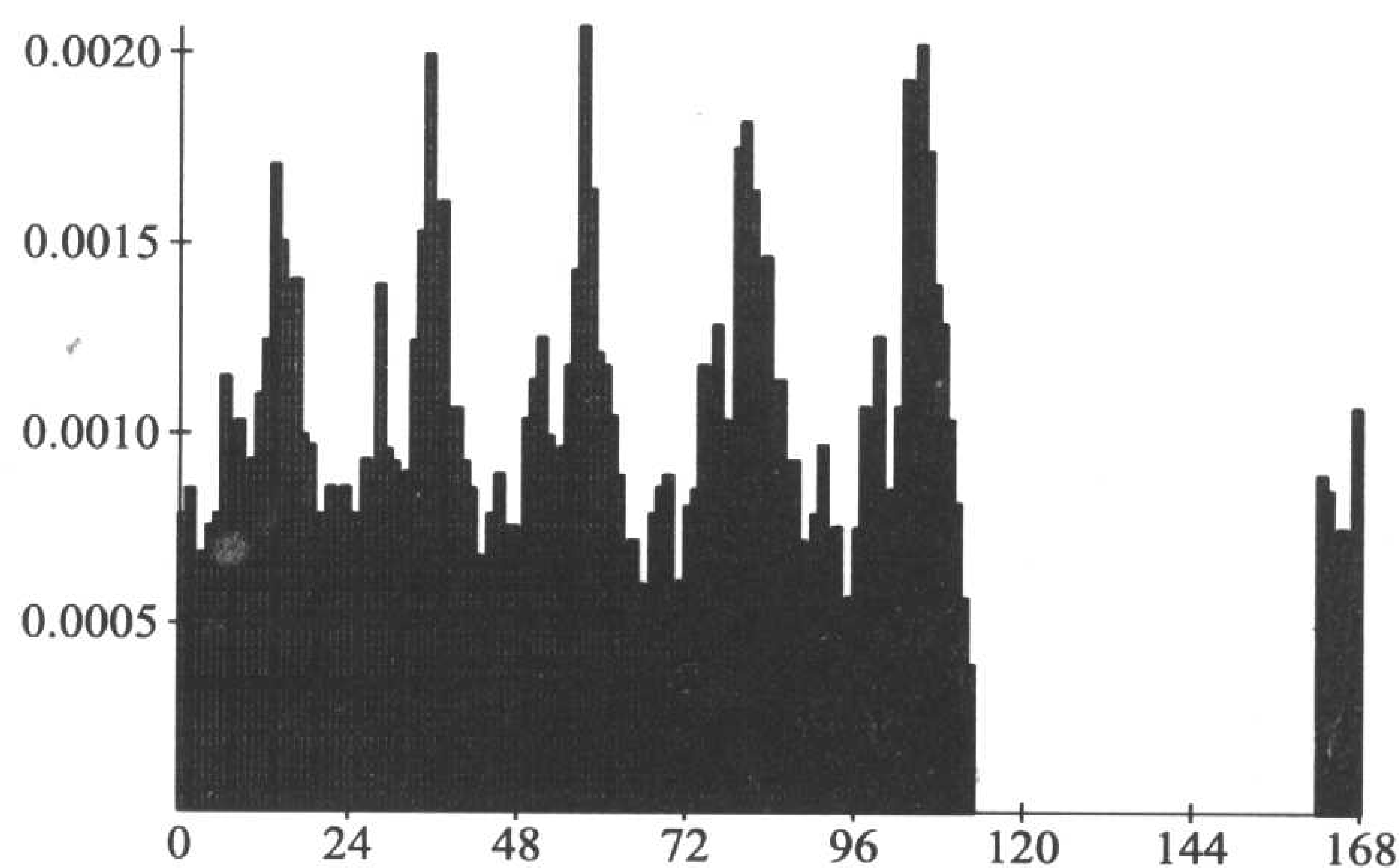


图 37 汇率 DEM/USD 的 Δ-波动率的一周内的图像 ($\Delta = 1$ 小时). 区间 $(0,1], \cdots, (167,168]$ 对应按格林威治时间的时间区间 (0:00,1:00], ⋯ , (23:00,24:00]. 数据来自路透社 (1992.10.05—1993.09.26)

在考察相关性质时, 所注意到的 Δ-波动率性态上的昼夜周期性 (循环性) 效应也能观察到. 下一节正是讨论这个问题, 同时也要讨论由 Δ-波动率的统计分析所得到的实际推荐结果.

2. 我们转向 Δ-波动率 $\nu_t(\Delta) \equiv \nu_{(0,t]}(H;\Delta)$ 在固定 t 时作为 Δ 的函数的性质, 其中以 $\widehat{\nu}_t(\Delta)$ 表示它的估计量 $\widehat{\nu}_{(0,t]}(H;\Delta)$.

我们取充分大的 t, 比如 $t=T$, 其中 $T=1$ 年, 并且对于不同的 Δ 值求出 $\widehat{\nu}_T(\Delta)$. 不久以前 (参见例如, [204], [362], [386], [427]), 揭示了 FX-市场以至某些其他市场所

固有的相当独特的性质, 即 Δ-波动率在下列意义下是高度正则的:

$$\widehat{\nu}_T(\Delta) \approx C_T \Delta^{\mathbb{H}}, \tag{3}$$

其中 C_T 为依赖于所考察的汇率的常数, 而对于主要货币 $\mathbb{H} \approx 0.585$.

为了使关系式 (3) 有更确定的意义, 我们考察 $\ln \widehat{\nu}_T(\Delta)$ 作为 $\ln \Delta$ 的函数的统计数据, 其中 Δ 的值在一个很广的区间中取: 从 10 分钟 =600 秒一直到 2 个月 $= 2 \times 30 \times 24 \times 60 \times 60$ 秒 $= 5\,184\,000$ 秒.

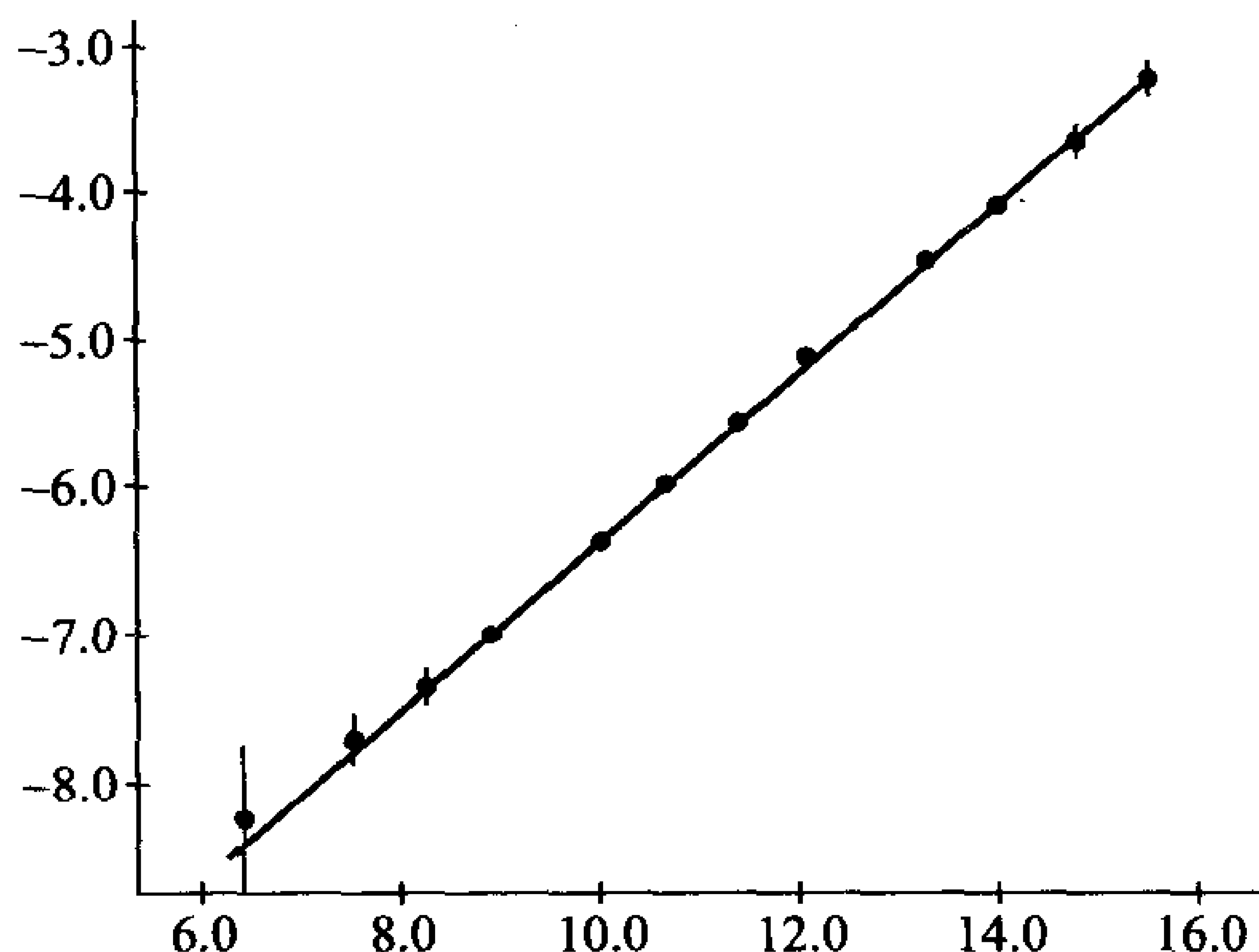


图 38 Δ-波动率 $\widehat{\nu}_T(\Delta)$ 的分形结构的解释. 纵轴上置以 $\ln \widehat{\nu}_T(\Delta)$ 的作为 $\ln \Delta$ 的函数的值

图 38 上的直线是由最小二乘法引入的, 它表明, 经验数据很好地聚集在斜率为 $\mathbb{H} \cong 0.585$ 的直线上. 尤其是, 由 (3) 可断定, 对于大 t, 波动率 $\nu_t(\Delta)$ 作为 Δ 的函数有 Hurst 指数 $\mathbb{H} \cong 0.585$ 的分形结构.

正如我们在上面的 §3a 中看到, 对于布朗运动, $\mathsf{E}|H_\Delta| = \sqrt{2/\pi}\Delta^{1/2}$, 对于有指数为 $\mathbb{H}$ 的分形布朗运动, $\mathsf{E}|H_\Delta| = \sqrt{2/\pi}\Delta^{\mathbb{H}}$, 而对于 $\alpha > 1$ 的严格 α-稳定 Lévy 过程, $\mathsf{E}|H_\Delta| = \mathsf{E}|H_1|\Delta^{\mathbb{H}}$, 其中 $\mathbb{H} = 1/\alpha < 1$.

这样一来, 用试验途径求得的值 $\mathbb{H} = 0.585 > 1/2$ 有利于假设过程 $H = (H_t)$ 可令人十分满意地或者用分形布朗运动, 或者用参数 $\alpha = \dfrac{1}{\mathbb{H}} \approx \dfrac{1}{0.585} \approx 1.7$ 的 α-稳定 Lévy 过程来描述.

注. 关于分形布朗运动的参数 $\mathbb{H}$ 的估计参见第三章 §2c 的第 6 点.

3. 我们回到图 36. 在这一图上, 极为清晰可见活动程度的最小值和最大值的位置. 格林威治时间 4:00 (活动程度的最小值) 对应东京、悉尼、新加坡、香港的午餐时间, 这时 FX-市场中的 "生活" 完全停滞. (在欧洲和美洲这时是深夜.) 上面也已经注意到, 活动程度的最大值 (≈ 15:00) 对应欧洲的早下半日和美洲的交易日的开始.

在一周的五个工作日中 (周一到周五) (按日的) 活动程度相当类似. 这一活动程度本质上在周末降到最低: 在周六和周日的大部分时间, 活动程度实际上可认为

是零. 到了周日的最后, 当东亚市场的交易日开始时, 活动程度开始提升.

§3c. 相关性质

1. 我们再来考察汇率 DEM/USD, 正如上面所注意到 (§1a, 第 4 点), 它以非常活跃地出现标记为特征 (平时每分钟平均 3–4 个标记, 而在高活跃日, 每分钟 15–20 个标记, 正如 1994 年 7 月曾经出现过的那样).

上面描述的对出现标记和对 Δ-波动率的周期性 (循环性) 效应也在对绝对变化 $|\Delta H|$ 进行*相关分析*时明确. 相应的结果将在下面的第 3 点中引入. 我们从量 ΔH 本身的相关分析的叙述开始.

2. 设 $S_t = (\mathrm{DEM/USD})_t$ 和 $H_t = \ln \dfrac{S_t}{S_0}$. 我们以 $\widetilde{S}_t$ 和 $\widetilde{H}_t = \ln \dfrac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_0}$ (与 §2b 中相对应) 表示所得到的线性插值.

选取某个时间区间 Δ, 并记

$$\widetilde{h}_k = \widetilde{H}_{t_k} - \widetilde{H}_{t_{k-1}},$$

其中 $t_k = k\Delta$. (在 §2b 中这个量也记为 $h_{t_k}^{(\Delta)}$; 根据 §3b, 绝对值 $|\widetilde{h}_k| = \nu_{(t_{k-1},t_k]}(H;\Delta)$.)

令 $\Delta = 1$ 分钟以及 $k = 1, 2, \cdots, 60$. 于是增量序列 $\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2, \cdots, \widetilde{h}_{60}$ 对应一小时内的量 H (按每分钟) 的增量序列. 在这一 (小时) 区间中, 可以认为序列 $\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2, \cdots, \widetilde{h}_{60}$ 是平稳 (均匀) 的.

平稳序列 $\widetilde{h} = (\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2, \cdots)$ 的相关依赖性的传统度量为它们的相关函数

$$\rho(k) = \frac{\mathsf{E}\widetilde{h}_n\widetilde{h}_{n+k} - \mathsf{E}\widetilde{h}_n \cdot \mathsf{E}\widetilde{h}_{n+k}}{\sqrt{\mathsf{D}\widetilde{h}_n \cdot \mathsf{D}\widetilde{h}_{n+k}}}, \tag{1}$$

它在随机过程理论中通常称为*自相关函数*.

由 "Olsen & Associates" 所进行的相应的统计分析 (参见 [204]) 给出下列 (经验) 自相关函数 $\widehat{\rho}(k)$ 图像, 它是根据 (很有代表性的) 1987.01.05—1993.01.05 期间的数据来求得的.

在图 39 中清楚地可看到在 4 分钟等级的区间中的*负相关性* ($\widehat{\rho}(1) < 0$, $\widehat{\rho}(2) < 0$, $\widehat{\rho}(3) < 0$, $\widehat{\rho}(4) \leqslant 0$). 这时, 当 $4 < k < 60$ 时, $\widehat{\rho}(k)$ 的值的大多数小于零.

在这一意义下, 可以认为, 值 $\widetilde{h}_n$ 和 $\widetilde{h}_m$ 当 $|n-m| > 4$ 分钟时, 实际上是不相关的.

我们注意到, 在小区间 ($|n-m| \leqslant 4$ 分钟) 中的*负相关效应* 在 [189], [191] 中预言, 并且许多金融指数也有这样的表现 (参见例如, [145] 和 [192]).

在文献中可找到对增量 $\Delta\widetilde{H}$ 在小时间区间上的负相关效应的各种解释. 例如, 在 [204] 中所引进的这个效应的解释归结为, 在 FX-市场中的交易者远不是同质的, 他们的兴趣可能 "往各个方向走", 他们可能对获得的信息作不同的解释. 当交易者

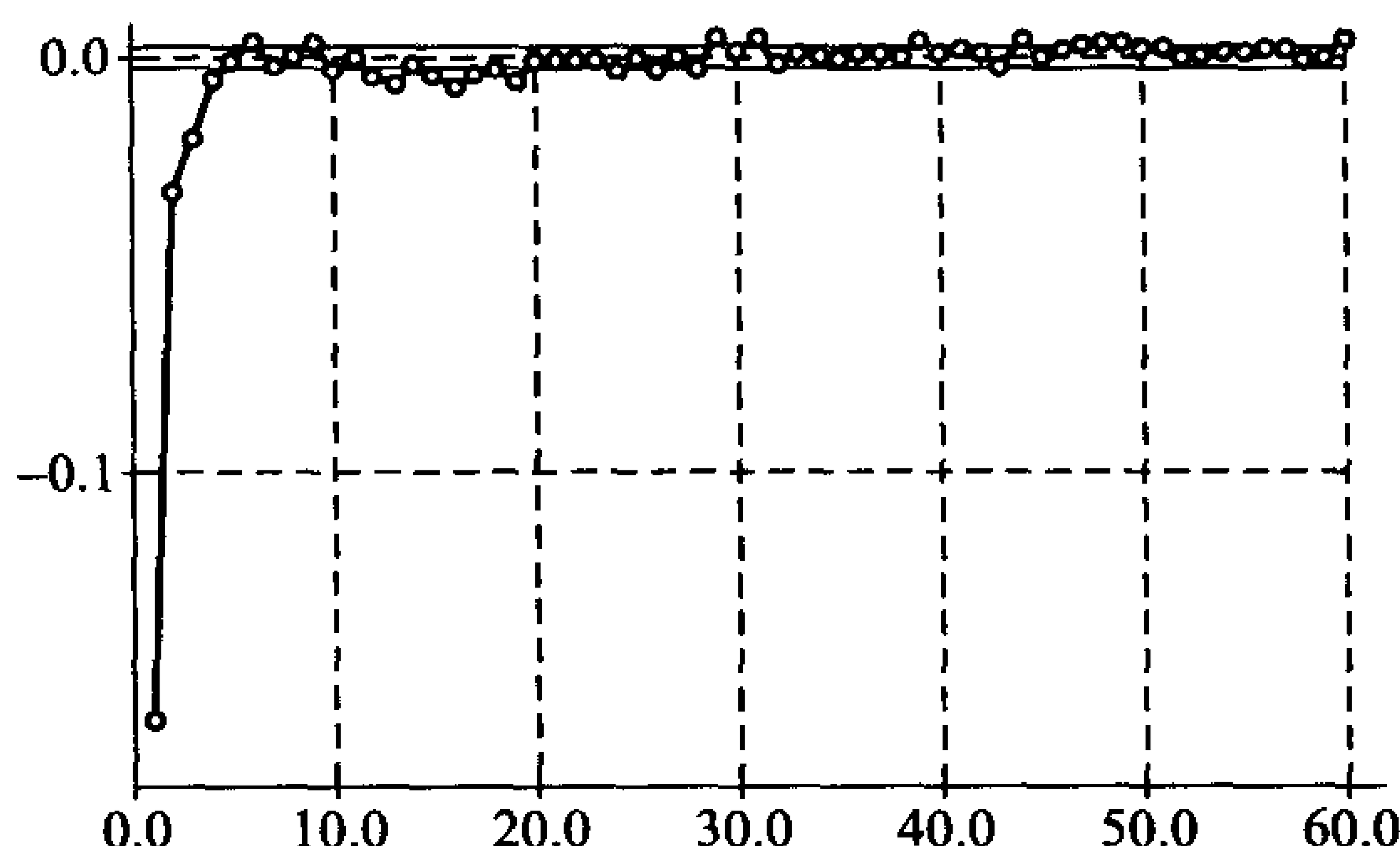


图 39　汇率 DEM/USD 的增量序列 $\widetilde{h}_n = \widetilde{H}_{t_n} - \widetilde{H}_{t_{n-1}}$ ($t_n = n\Delta$, $\Delta = 1$ 分钟) 的经验自相关函数 $\widehat{\rho}(k)$

得到指令说市场 "失衡" 时, 他们经常在某个 "方向" 上避免价差变化. 此外, 许多银行系统颁布有过大价差的买卖价格; 与此相联系可参见著作 [192].

$\operatorname{Cov}(\widetilde{h}_n, \widetilde{h}_{n+k}) = \mathsf{E}\widetilde{h}_n\widetilde{h}_{n+k} - \mathsf{E}\widetilde{h}_n\mathsf{E}\widetilde{h}_{n+k}$ 对于不大的值 k 的负性效应的可能的 "数学" 解释例如可如下作出 (比较 [481]).

设 $\widetilde{H}_n = \widetilde{h}_1 + \cdots + \widetilde{h}_n$, 其中 $\widetilde{h}_n = \mu_n + \sigma_n\varepsilon_n$, σ_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测, 而序列 (ε_n) 为独立正态分布随机变量序列. 量 μ_n 也可被认为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测. 根据许多统计数据, 均值 μ_n 显著小于 σ_n (参见例如 §2b 的第 2 点中的表), 而实际上可认为它等于零.

量 $\widetilde{H}_n$ 就是 $\ln\dfrac{\widetilde{S}_n}{S_0}$, 其实并非总是确切已知; 更现实的假定是, 开始已知的不是 $\widetilde{H}_n$, 而是 $\widetilde{\widetilde{H}}_n = \widetilde{H}_n + \delta_n$, 其中 (δ_n) 是某个白噪声, 它刻画了由于所获得的价格值不是价格的真实状况、而带有不精确性所决定的噪声成分.

我们将假定, (δ_n) 是有 $\mathsf{E}\delta_n = 0$, $\mathsf{E}\delta_n^2 = C > 0$ 的独立随机变量序列.

于是对于取值为 $\widetilde{\widetilde{h}}_n = \Delta\widetilde{\widetilde{H}}_n = \widetilde{h}_n + (\delta_n - \delta_{n-1})$ 的序列 $\widetilde{\widetilde{h}} = (\widetilde{\widetilde{h}}_n)$, 我们求得

$$\mathsf{E}\widetilde{\widetilde{h}}_n = 0, \qquad \mathsf{E}\widetilde{\widetilde{h}}{}_n^2 = \mathsf{E}\sigma_n^2 + 2C$$

以及

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\widetilde{\widetilde{h}}_n\widetilde{\widetilde{h}}_{n+1} &= \mathsf{E}(\delta_n - \delta_{n-1})(\delta_{n+1} - \delta_n) = -C,\\ \mathsf{E}\widetilde{\widetilde{h}}_n\widetilde{\widetilde{h}}_{n+k} &= 0, \qquad k > 1.\end{aligned}$$

这样一来, 协方差函数

$$\operatorname{Cov}(\widetilde{\widetilde{h}}_n, \widetilde{\widetilde{h}}_{n+k}) = \mathsf{E}\widetilde{\widetilde{h}}_n\widetilde{\widetilde{h}}_{n+k} - \mathsf{E}\widetilde{\widetilde{h}}_n \cdot \mathsf{E}\widetilde{\widetilde{h}}_{n+k}$$

(假定 $\mathsf{E}\sigma_n^2 = \mathsf{E}\sigma_1^2$, $n \geqslant 1$) 由下列公式给出

$$\operatorname{Cov}(\widetilde{\widetilde{h}}_n, \widetilde{\widetilde{h}}_{n+k}) = \begin{cases} \mathsf{E}\sigma_1^2 + 2C, & k = 0,\\ -C, & k = 1,\\ 0, & k > 1.\end{cases}$$

3. 为了借助于相关分析方法来说明波动率的周期性 (循环性) 效应, 我们采用下列方式.

固定区间 $\Delta = 20$ 分钟. 设 $t_0 = 0$ 对应周日的格林威治时间 0:00, $t_1 = \Delta = 20$ 分钟, $t_2 = 2\Delta = 40$ 分钟, $t_3 = 3\Delta = 1$ 小时, $\cdots, t_{504} = 504\Delta = 1$ 星期, $\cdots, t_{2016} = 2016\Delta = 4$ 星期 ($= 1$ 月).

记 $\widetilde{h}_n = \widetilde{H}_{t_n} - \widetilde{H}_{t_{n-1}}$, 并设

$$R(k) = \frac{\mathsf{E}|\widetilde{h}_n||\widetilde{h}_{n+k}| - \mathsf{E}|\widetilde{h}_n| \cdot \mathsf{E}|\widetilde{h}_{n+k}|}{\sqrt{\mathsf{D}|\widetilde{h}_n| \cdot \mathsf{D}|\widetilde{h}_{n+k}|}} \tag{2}$$

是序列 $|\widetilde{h}| = (|\widetilde{h}_1|, |\widetilde{h}_2|, \cdots)$ 的自相关函数.

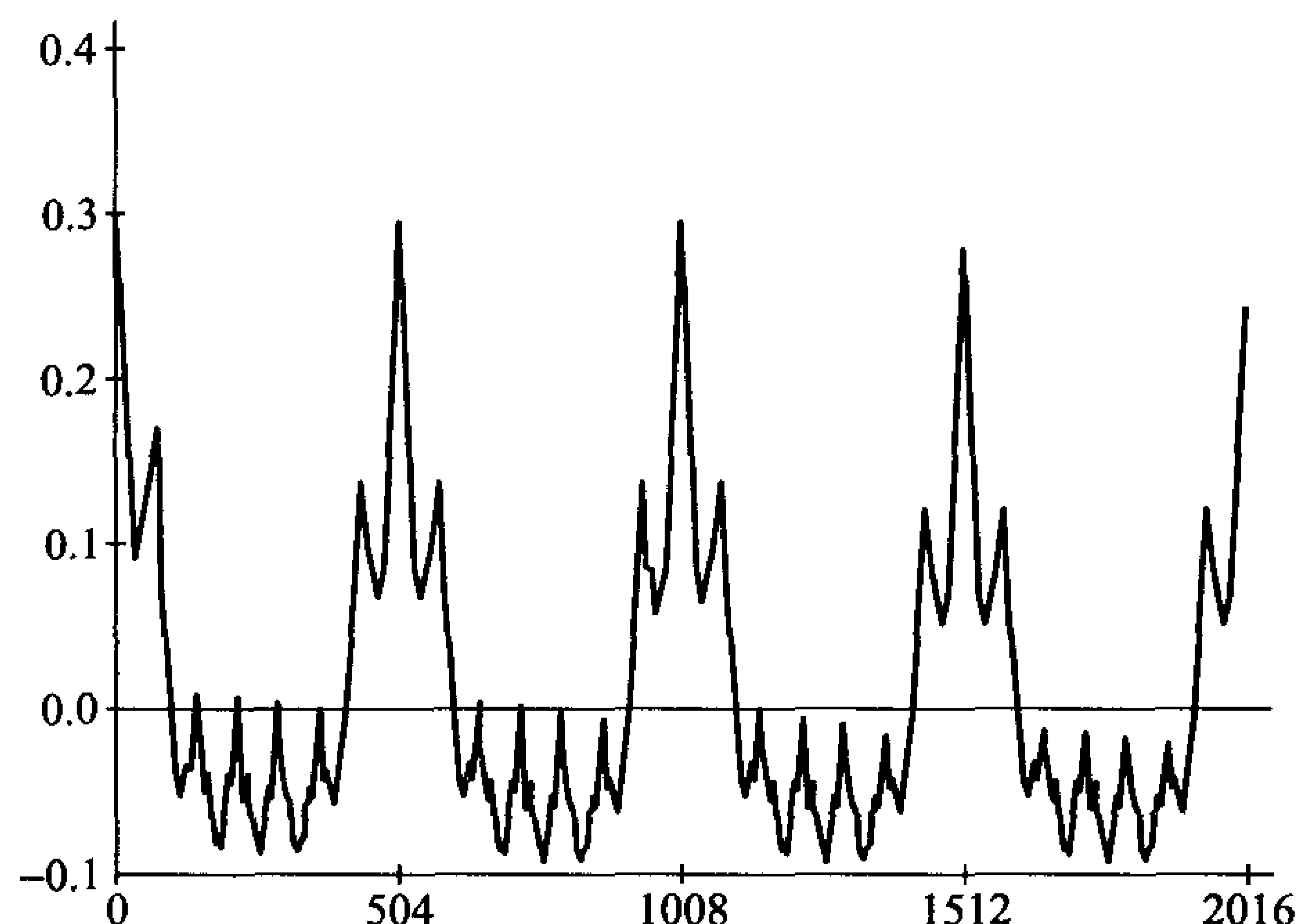


图 40 对于汇率 DEM/USD 的序列 $|\widetilde{h}_n| = |\widetilde{H}_{t_n} - \widetilde{H}_{t_{n-1}}|$ 的经验自相关函数 $\widehat{R}(k)$ (根据路透社 1992.10.5—1993.9.26 的数据; [90], [204]). 值 $k = 504$ 对应 1 星期, $k = 2016$ 对应 4 星期

在图 40 中所描出的图像对应对于 $k = 0, 1, \cdots, 2016$ (即四周) 的经验自相关函数 $\widehat{R}(k)$. 这一图形清楚地表明, 在有 $|\widetilde{h}_n| = |\widetilde{H}_{t_n} - \widetilde{H}_{t_{n-1}}|$ $(\Delta = t_n - t_{n-1})$ 的 Δ-波动率 $|\widetilde{h}| = (|\widetilde{h}_n|)_{n \geqslant 1}$ 的自相关函数有周期成分.

已知, 相关方法的威力完全在于当所考察的序列是平稳序列的时候. 然而, 正如我们所看到的, Δ-波动率不具有这种性质, 以至自然就产生这样的问题: 怎样去 "揉平" 它, 即, 把它转换为平稳均匀序列.

波动性的 "揉平" 程序称为*去波动化*. 在下一节中我们将基于随机过程理论中所熟知的时间替换的概念以及 "Olsen & Associates" 在分析 FX-市场数据时系统运用的 "θ-时间" 观念来讨论这一问题 (参见 [90], [204], [362]).

§3d. "去波动化". 运作时间

1. 我们从下列充分说明*去波动化* (即揉平波动性) 程序的基本步骤的例子开始.

设 $H_t = \int_0^t \sigma(u)dB_u$, 其中 $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ 为标准布朗运动, 而 $\sigma = (\sigma(t))_{t\geqslant 0}$ 是某个刻画在值 H_t 的陈述中附加在 dB_u $(u \leqslant t)$ 上的 "强度"、"活跃程度" 的确定性函数. 我们察觉, 对于每个 $n \geqslant 1$,

$$h_n \equiv H_n - H_{n-1} = \int_{n-1}^{n} \sigma(u)dB_u \overset{\mathrm{d}}{=} \sigma_n\varepsilon_n, \tag{1}$$

其中 $\varepsilon_n \sim \mathscr{N}(0,1)$, $\sigma_n^2 = \int_{n-1}^n \sigma^2(u)du$, 而 $\overset{\mathrm{d}}{=}$ 表示分布相重合的随机变量.

这样一来, 当过程 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ 的值只可能在离散时间时刻 $n = 1, 2, \cdots$ 记录时, 值 $h_n \equiv H_n - H_{n-1}$ 的观察序列具有带零均值、但一般来说有不均匀的方差 (波动率) σ_n^2 的独立高斯随机变量序列 $(\sigma_n\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 的十分简单的结构.

下面的讨论给出一种把这些 "不均匀" 的 σ_n^2 $(n \geqslant 1)$ 揉平的数据变换方法.

记

$$\tau(t) = \int_0^t \sigma^2(u)du \tag{2}$$

以及

$$\tau^*(\theta) = \inf\left\{t\colon \int_0^t \sigma^2(u)du = \theta\right\} \quad (= \inf\{t\colon \tau(t) = \theta\}), \tag{3}$$

其中 $\theta \geqslant 0$.

我们将假定, $\sigma(t) > 0$ 对于每个 $t > 0$ 成立, $\int_0^t \sigma^2(u)du < \infty$ (在这一假定下, 关于布朗运动 $B = (B_u)_{u\geqslant 0}$ 的随机积分 $\int_0^t \sigma(u)dB_u$ 有定义; 参见第三章中的 §3c), 并设当 $t \to \infty$ 时, $\int_0^t \sigma^2(u)du \uparrow \infty$.

除了*物理*时间 $t \geqslant 0$ 以外, 我们还考察新的*运作* "θ-时间", 它由下列公式 (按 t) 来定义:

$$\theta = \tau(t). \tag{4}$$

运作 "θ-时间" 向物理时间的转换由下列逆变换来定义:

$$t = \tau^*(\theta). \tag{5}$$

我们察觉, 由 (3),

$$\int_0^{\tau^*(\theta)} \sigma^2(u)du = \theta, \tag{6}$$

即 $\tau(\tau^*(\theta)) = \theta$, 而这就是说, $\tau^*(\theta) = \tau^{-1}(\theta)$, $\tau^*(\tau(t)) = t$.

我们考察实现物理时间向运作时间变换的函数 $\theta = \tau(t)$.

由于

$$\theta_2 - \theta_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sigma^2(u)du, \tag{7}$$

故我们看到, 活跃程度 $\sigma^2(u)$ 越低, 物理时间所变换的运作时间就越短, 越被压缩 (如图 41).

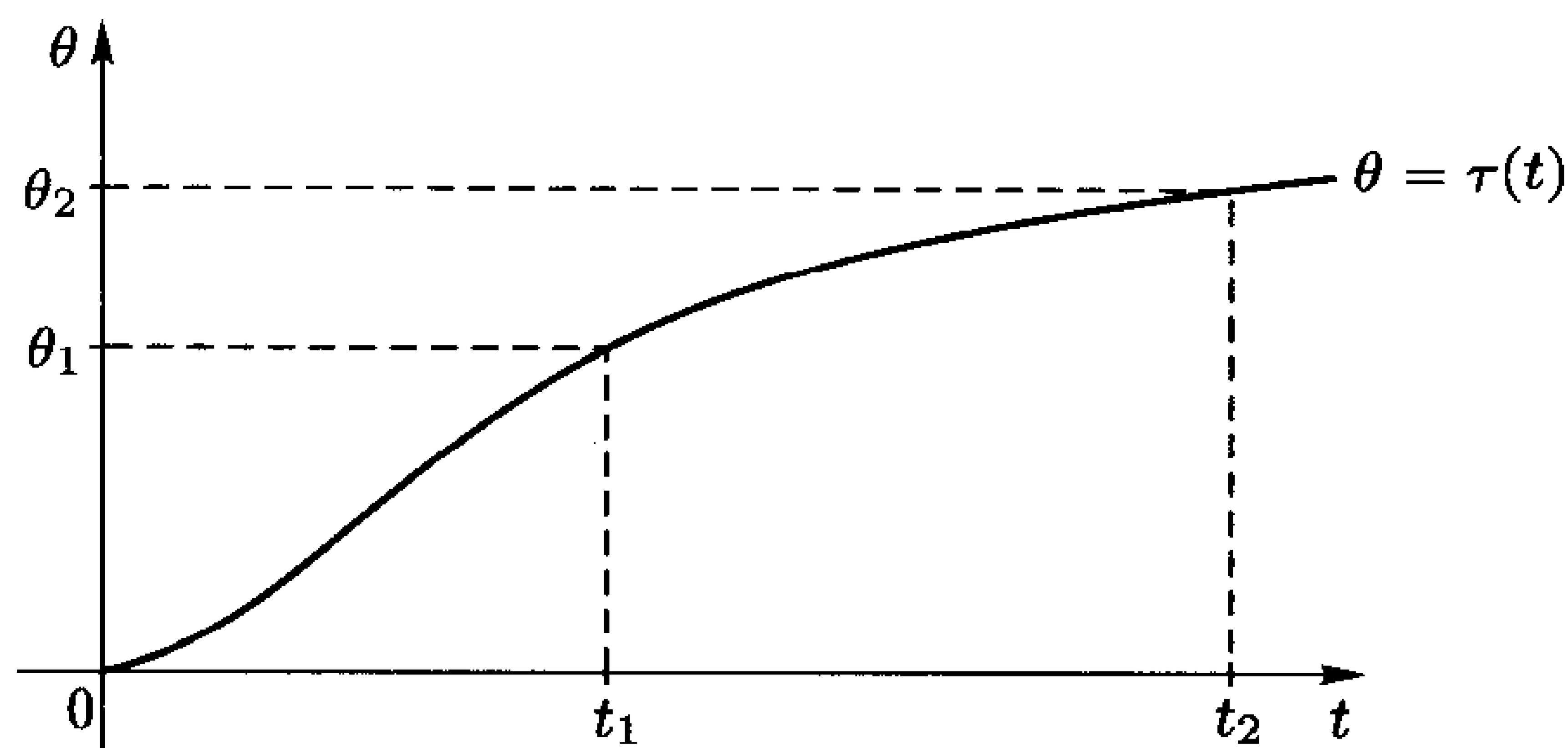


图 41 (长) 时期 $[t_1, t_2]$ 对于 "低" 活跃程度 "压缩" 为 θ-时间的 (短) 区间 $[\theta_1, \theta_2]$ 的图示

但是如果活跃程度 $\sigma^2(u)$ 很高, 那么所发生的就相反: 物理时间的短区间 (t_1, t_2) (参见图 42) 对应运作时间的长区间 (θ_1, θ_2), 使得时间 "延长".

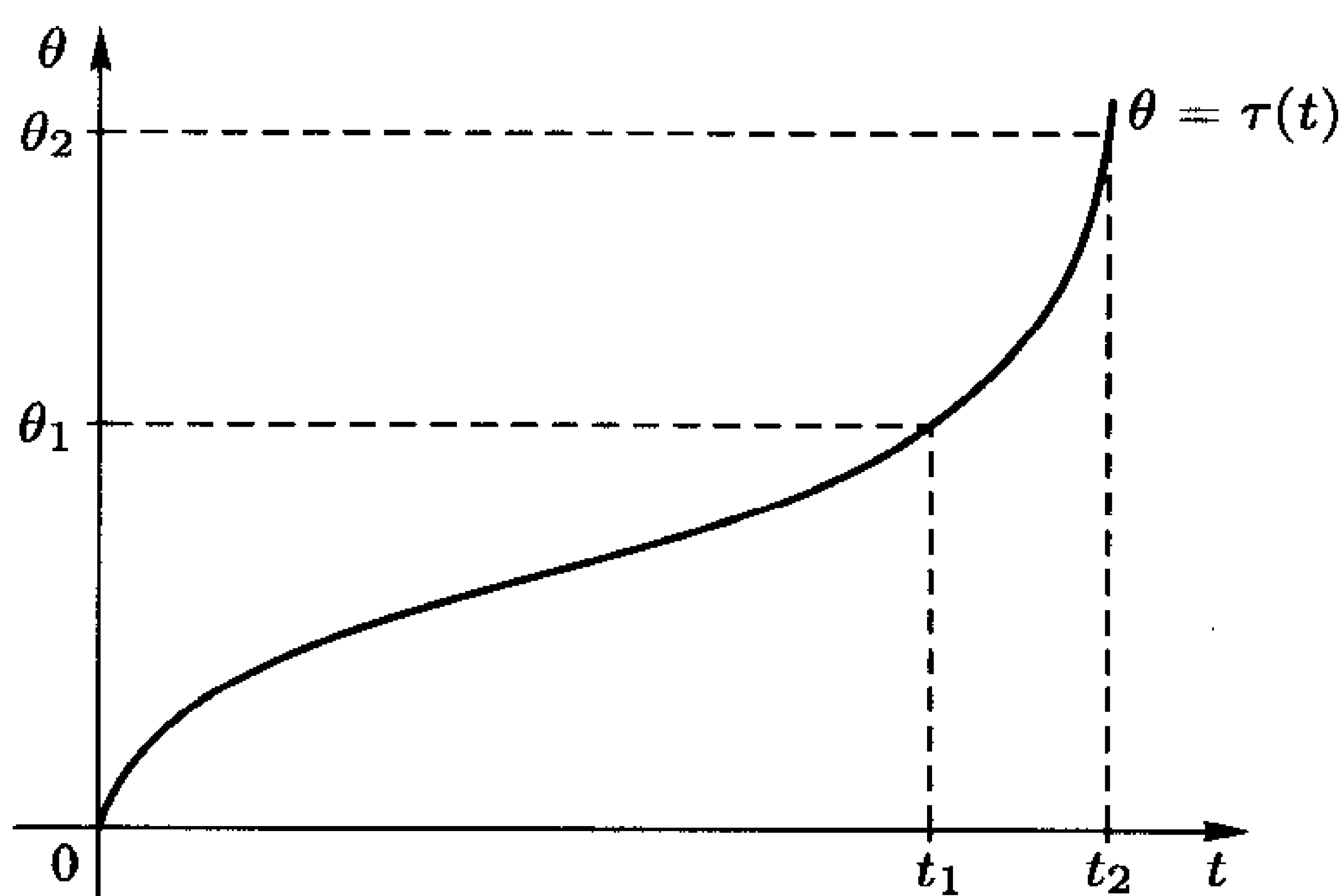


图 42 (短) 时期 $[t_1, t_2]$ 对于 "高" 活跃程度 "延长" 为 θ-时间的 (长) 区间 $[\theta_1, \theta_2]$ 的图示

现在我们构成新过程

$$H_\theta^* = H_{\tau^*(\theta)}, \tag{8}$$

它是在新的运作时间下进行的. 这时很明显, 从新过程 H^* 回归老过程是由下列公式来实现的:

$$H_t = H_{\tau(t)}^*, \tag{9}$$

因为 $\tau^*(\tau(t)) = t$.

我们察觉, 对于 $\theta_1 < \theta_2$,

$$\begin{aligned} H_{\theta_2}^* - H_{\theta_1}^* &= H_{\tau^*(\theta_2)} - H_{\tau^*(\theta_1)} = \int_{\tau^*(\theta_1)}^{\tau^*(\theta_2)} \sigma(u) dB_u \\ &= \int_0^\infty I\left(\tau^*(\theta_1) < u \leqslant \tau^*(\theta_2)\right) \sigma(u) dB_u. \end{aligned}$$

由此看出, H^* 是有独立增量的过程, 且 $H^*_0=0$, $\mathsf{E}H^*_\theta=0$; 同时, 根据随机积分的性质 (参见第三章中的 §3c),

$$\begin{aligned}\mathsf{E}|H^*_{\theta_2}-H^*_{\theta_1}|^2&=\int_0^\infty I(\tau^*(\theta_1)<u\leqslant\tau^*(\theta_2))\sigma^2(u)du\\&=\int_{\tau^*(\theta_1)}^{\tau^*(\theta_2)}\sigma^2(u)du=\theta_2-\theta_1\end{aligned}\tag{10}$$

(后一等式由 (6) 得到).

由于过程 H^* 也是高斯过程, 故作为有独立增量、零均值、性质 (10) 和连续轨线的过程, 这无非就是标准布朗运动, 以至

$$H^*_\theta=\int_0^\theta\sigma^*(u)dH^*_u,\tag{11}$$

其中 $\sigma^*(u)\equiv1$.

与表示式 $H_t=\int_0^t\sigma(u)dB_u$ 相比较, 其中一般来说, $\sigma(u)\not\equiv1$, 这表明, 向运作时间的转换 "揉平" 了活跃程度的特征 $\sigma\equiv\sigma(u)$, 使得在新的 "θ-时间" 下变得均匀 ($\sigma^*(u)\equiv1$).

我们在上面假定, $\sigma(u)$ 是非随机的. 其实, 过程 $H^*_\theta=H_{\tau^*(\theta)}$ 也将是维纳过程, 而在以 $\sigma(u)=\sigma(u;\omega)$ 的公式 (3) 所定义的随机时间替换下, 仅仅有以概率 1 当 $t\to\infty$ 时, 有 $\int_0^t\sigma^2(u;\omega)du<\infty$ 和 $\int_0^t\sigma^2(u;\omega)du\uparrow\infty$. 然而, 在确定性函数 $\sigma=\sigma(u)$ 和随机的 $\sigma=\sigma(u;\omega)$ 之间有本质区别: 在第一种情形下, 所导入的时间替换 $t\rightsquigarrow\theta=\tau(t)$ 可事先计算, 其中也包括对于 "未来的" 时刻; 而在第二种情形下, 这点做不到, 因为 "随机" 时间替换对于不同的实现 $\sigma=\sigma(u;\omega)$ $(u\geqslant0)$ 是不同的.

2. 现在转向某个序列 $h=(h_n)_{n\geqslant1}$, $h_n=\sigma_n\varepsilon_n$, 其中带不均匀活跃程度 σ_n, $n\geqslant1$. 这时我们将把 n 看作物理 ("老") 时间.

我们定义时刻序列

$$\tau^*(\theta)=\min\left\{m\geqslant1\colon\sum_{k=1}^m\sigma_k^2\geqslant\theta\right\},$$

其中 θ 取值为 $1,2,\cdots$, 并且将被看作运作 ("新") 时间.

又设对于 $\theta=1,2,\cdots$,

$$h^*_\theta=\sum_{\tau^*(\theta-1)<k\leqslant\tau^*(\theta)}h_k,$$

其中 $\tau^*(0)=0$.

我们察觉, $\mathsf{E}h^*_0=0$ 以及方差

$$\mathsf{D}h^*_\theta=\mathsf{D}\left[\sum_{\tau^*(\theta-1)<k\leqslant\tau^*(\theta)}h_k\right]=\sum_{\tau^*(\theta-1)<k\leqslant\tau^*(\theta)}\sigma_k^2\approx1,$$

因为通常量 σ_k^2 足够小 (参见 §2b 第 2 点的表).

这样, 就可以说, 对新 "θ-时间" 的转换使不均匀的序列 $h=(h_n)_{n\geqslant 1}$ 转变为 (几乎) 均匀的序列 $h^*=(h_\theta^*)_{\theta\geqslant 1}$.

在 σ_n 是随机的 ($\sigma_n=\sigma_n(\omega)$) 情形下, 也要追求对于所有时刻 (也包括对于未来) 先验计算时间替换这一目标; 这时可以运用上述 "去波动化" 的思路, 把 $\sigma_n^2(\omega)$ 取代为它的均值 $\mathsf{E}\sigma_n^2(\omega)$, 或者在具体的统计实践中, 取代为这一均值的估计量.

由表示式 $h_n=\sigma_n\varepsilon_n$ 可见, 在 σ_n 为 $\mathscr{F}_{n-1}$-可测的假定下, 数学期望 $\mathsf{E}h_n^2=\mathsf{E}\sigma_n^2$, 而这就是说, 作为 $\mathsf{E}\sigma_n^2$ 的估计值, 其中时刻 n 对应比如周一的格林威治时间的时间区间 $((n-1)\Delta, n\Delta]$, 可取为根据数据库中可找到的对所有在这一时间段的周一统计数据来计算的 h^2 的算术平均值.

在所引入的时间替换 (2) 中, 所运用的是量 $\sigma(u)$ 的平方, 当然, 这不是获得时间替换 $t\rightsquigarrow\theta=\tau(t)$ 的唯一方式. 例如, 也可运用 $|\sigma(u)|$ 来代替 $\sigma^2(u)$.

3. 在 "Olsen & Associates" 的著作 [90], [360]–[362] 中, 正是运用了这样的时间替换, 并且断言, 这种 "去波动化" 方法允许更好地 "把握" 周期性质, 以及给出对于汇率 DEM/USD 的序列 $|\widetilde{h}^*|$ 的 "去波动化" 的值的自相关函数的性态的更 "光滑" 的图景.

在著作 [90] 中可找到细节, 我们现在只介绍他们关于序列 $|\widetilde{h}^*|$ 的值的自相关函数的性质的统计研究结果.

正如在 §3c 的第 3 点上, 我们将假定, $\Delta=20$ 分钟, $\widetilde{h}_n=\widetilde{H}_{t_n}-\widetilde{H}_{t_n-1}$, $t_n=n\Delta$.

在 §3c 的图 40 中, 给出了如下定义的自相关函数的经验估计量 $\widehat{R}(k)$ 的性态图像:

$$R(k)=\frac{\mathsf{E}|\widetilde{h}_n||\widetilde{h}_{n+k}|-\mathsf{E}|\widetilde{h}_n|\cdot\mathsf{E}|\widetilde{h}_{n+k}|}{\sqrt{\mathsf{D}|\widetilde{h}_n|\cdot\mathsf{D}|\widetilde{h}_{n+k}|}},\tag{12}$$

由此可清楚地看出这一函数的周期结构.

在著作 [90] 中, 经过去波动化程序和转换为新的运作 "θ-时间" 以后, 就能得到对于分析来说非常有意思的序列 $|h^*|=(|h_\theta^*|)_{\theta\geqslant 1}$ 的经验相关函数 $\widehat{R}^*(\theta)$ ($\theta\geqslant 0$) 的图像 (参见图 43). 同时也给出实现把运作时间 θ 转换为物理时间 t 的函数 $\tau^*(\theta)$: $\theta\rightsquigarrow t$ 的图像 (在所考察的汇率 DEM/USD 的情形下, 参见图 44; 这时新时间被这样规范化: 物理时间的一周对应运作时间的一周).

由图 44 可见, 在每周的五个交易日里, $t=\tau^*(\theta)$ 的依赖关系照例是线性的. 到了周末, FX-市场的运营活跃程度停滞, (周末) 物理时间的大区间对应运作时间的小区间, 它尤其是对于交易业务有其意义.

4. 应该注意到, 在 FX-市场分析中, 为了 "降低" 周期成分, 上面所运用的去波动化方法远不是唯一可应用的. 例如, 我们指出, 在著作 [7], [13], [306] 中应用了各种各样的技巧: 线性与非线性回归分析, 基于 Fourier 变换的方法, 运用计算机程

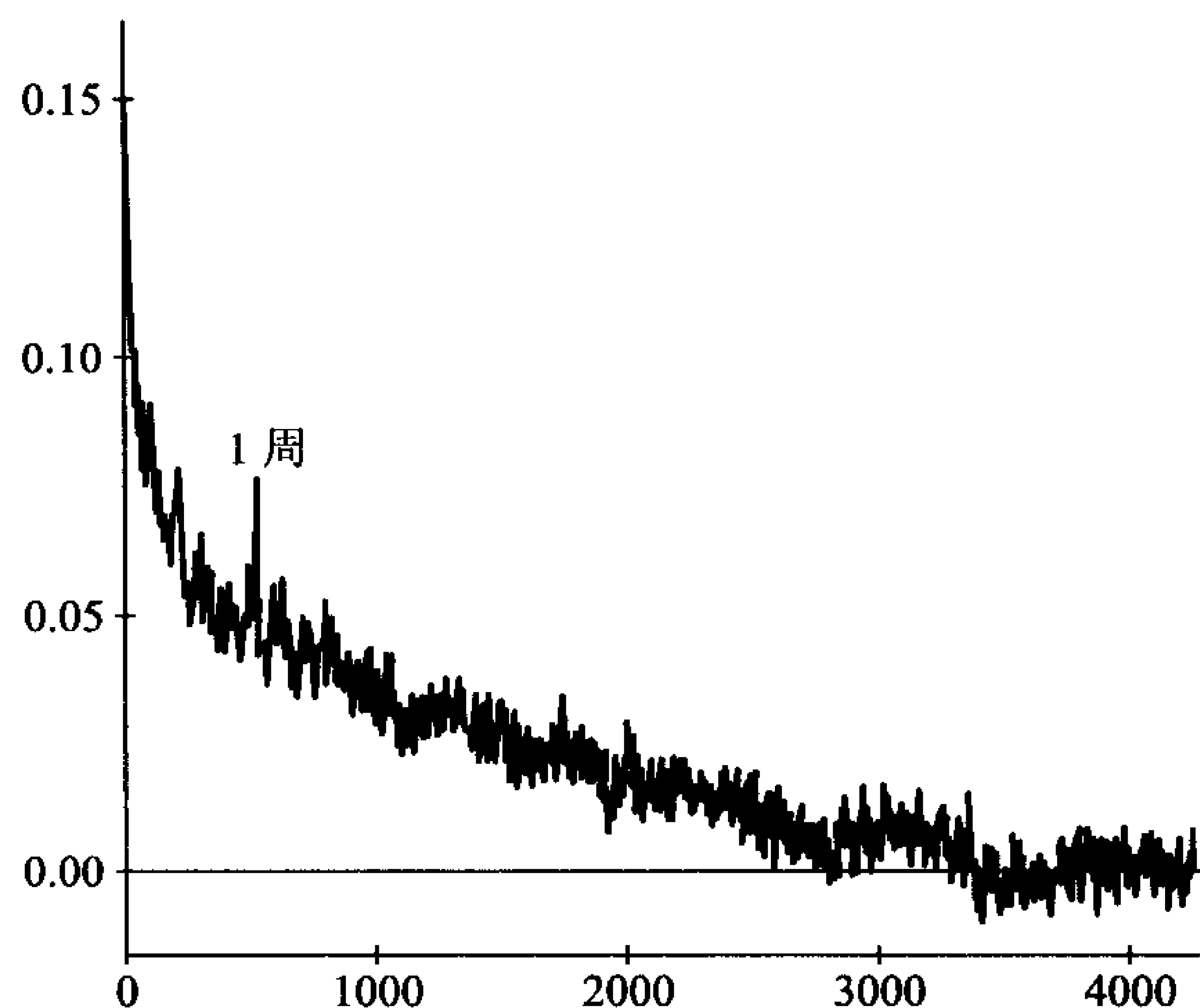


图 43 对于汇率 DEM/USD 的以运作 "θ-时间" 来刻画的去波动化值的序列 $|\widetilde{h}^*| = (|\widetilde{h}^*_\theta|)_{\theta\geqslant 1}$ 的经验自相关函数 $\widehat{R}^*(\theta)$, 区间 $\Delta\theta = 20$ 分钟; [90]

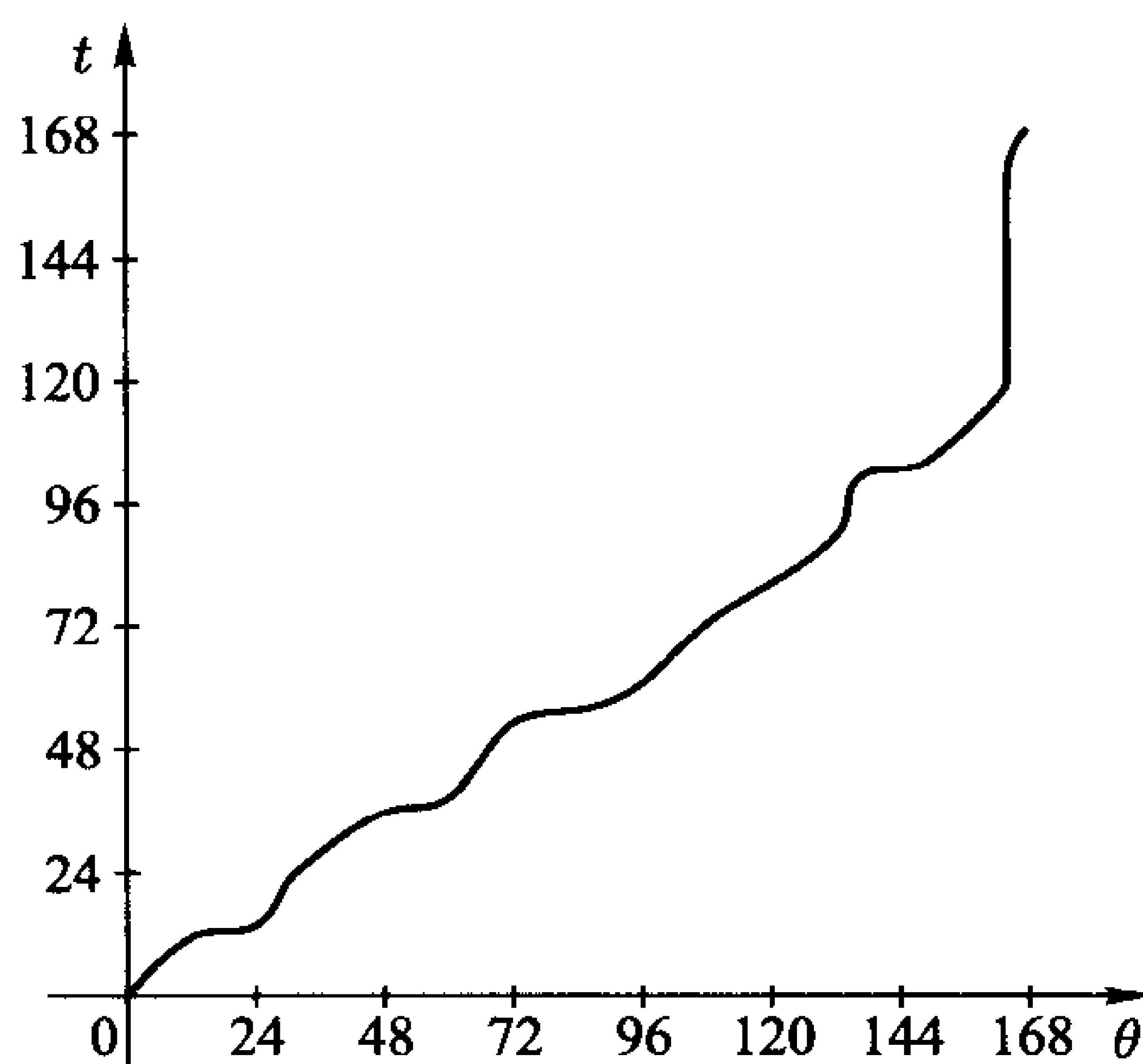


图 44 运作时间变为物理时间的变换 $t = \tau^*(\theta)$ 的图像. 横轴是运作 θ-时间 (单位是小时; 168 小时对应 1 周). 纵轴是物理时间; [90]

序 (神经网络; neural networking) 在金融数据的时间序列中求出过去的类似的片断. I. L. Legostaev 与本作者的著作 [297] 也与这类问题有关; 这一研究起因于 A. N. Kolmogorov, 其中 (与描述太阳活动的 Wolf 数的研究相联系) 为分析包含在带附加 "白噪声" η_t 的过程 ξ_t ($\xi_t(\omega) = f(t) + \eta_t(\omega)$) 中的 "趋向" 成分 $f(t)$, 应用了极小极大方法, 使得它与通常的回归分析相比, 可大大扩充所考察的趋向 $f(t)$ 的种类. 这种方法的进一步研究参见 [45], [338], [416], 以及这些著作的作者的其他研究.

5. 作为结束, 我们介绍用去波动化方法分离出来的汇率 CHF/USD 中的 "活跃程度" 的周期成分 (参见 §3b) 的图像 (参见 [90]; 也比较 §3b 中的图 37).

由所画出的图 45 中, 可清楚地看出 (一周中的昼夜) 周期成分的 "地理" 结构, 它刻画了三个不同的 FX-市场 (东亚市场, 欧洲市场和美洲市场) 的活跃程度的不同交易时间. 在 [90] 中, 又给出了这一成分的有意义的对应这三个市场的三个周期分量的分解, 它可用来在预测汇率的未来运动时更准确地考虑所具有的周期性因素.

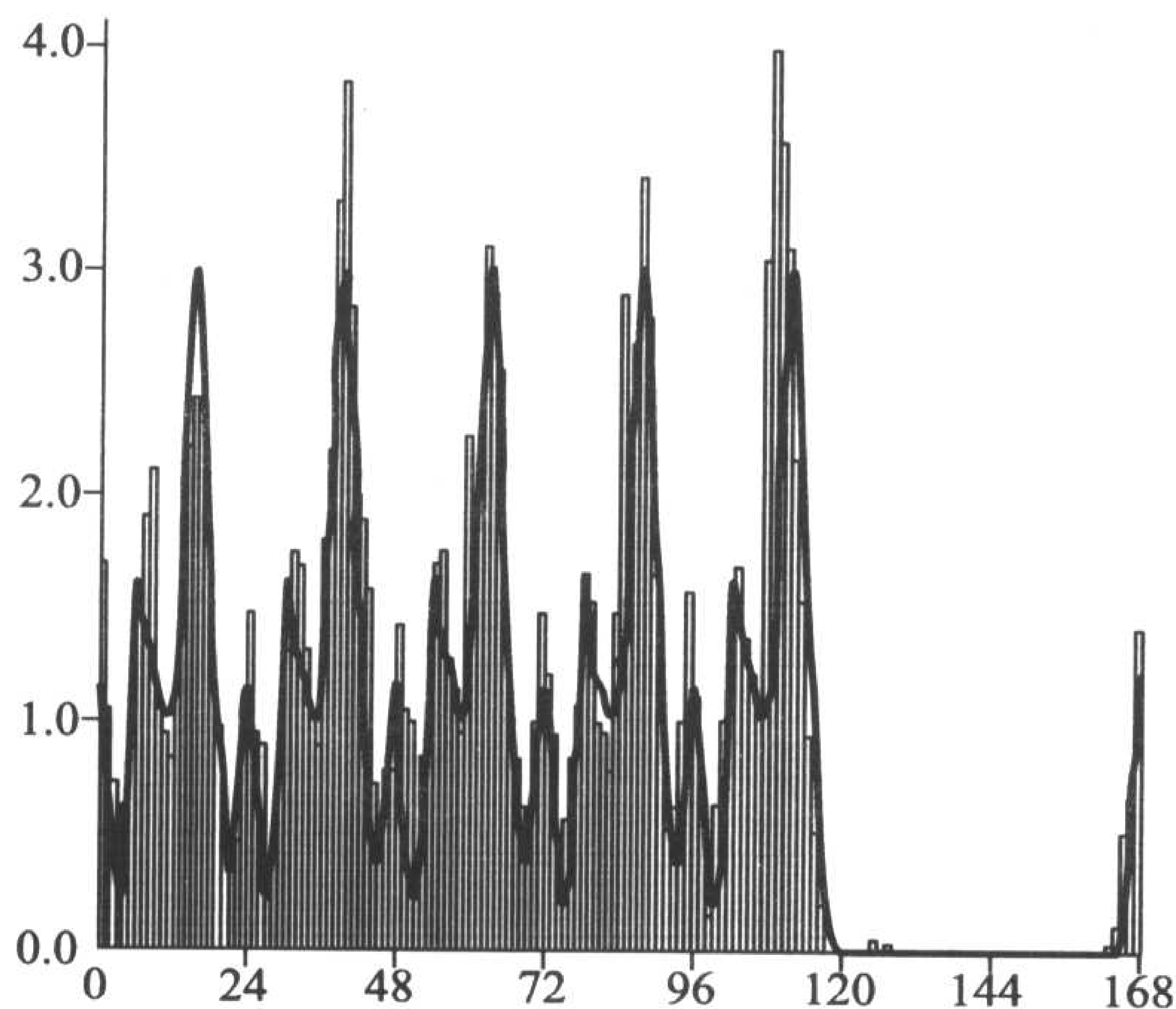


图 45 标出的曲线是汇率 CHF/USD 中的 "活跃程度" 的周期成分 (168 小时对应 1 周)

§3e. 价格中的 "聚集" 现象和后效

1. 在我们出发的模式中, 假定汇率、价格 $S = (S_t)_{t\geqslant 0}$ 及其对数 $H = (H_t)_{t\geqslant 0}$ $\left(H_t = \ln\dfrac{S_t}{S_0}\right)$ 用带离散干涉机会的随机过程来描述:

$$S_t = S_0 + \sum_{n\geqslant 1} s_{\tau_n} I(\tau_n \leqslant t) \tag{1}$$

以及

$$H_t = \sum_{n\geqslant 1} h_{\tau_n} I(\tau_n \leqslant t). \tag{2}$$

然后我们把它转换为它的连续修正 $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t)_{t\geqslant 0}$, $\widetilde{H} = (\widetilde{H}_t)_{t\geqslant 0}$, 而最后取值 $\widetilde{h}_n = \widetilde{H}_{t_n} - \widetilde{H}_{t_{n-1}}$, 其中 $t_n - t_{n-1} = \Delta$. 正是对于这些有间隔 $\Delta = 1$ 分钟的量 $\widetilde{h}_n$, 我们曾经讨论过对于不大的值 $k = 1, 2, 3, 4$ (分钟) 的自相关 $\widetilde{\rho}(k) = \mathsf{E}\widetilde{h}_n\widetilde{h}_{n+k} - \mathsf{E}\widetilde{h}_n\mathsf{E}\widetilde{h}_{n+k}$ 的负性. 对于大 k 值, 自相关接近于零, 因而, 对于这样的 k, 量 $\widetilde{h}_n$ 和 $\widetilde{h}_{n+k}$ 可认为 (实际上) 是不相关的.

当然, 这远不是意味着它们相互独立, 而不相互独立被 §3c 中的对经验自相关函数 $\widehat{R}(k)$ 的分析所证实 (全都是为考察汇率 DEM/USD 的性态而引入的).

下一步 (去波动化程序) 借助于转换为新的运作时间, 使得 "活跃程度" 被揉平, 而这种转换是通过考虑过程 $\widetilde{H} = (\widetilde{H}_t)_{t\geqslant 0}$ 的值的变化 "活跃程度" 的各个时期来形成的.

正如由序列 $(|\widetilde{h}_n|)_{n\geqslant 1}$ 的统计分析所看到, 所考察的对于新的运作 "θ-时间" 的自相关函数 $\widehat{R}^*(\theta)$,

1) 对 θ 的小值充分大;

2) 随着 θ 的增长充分慢地递减.

在著作 [90] 中断定, 在以月计的时间区间上, $\widehat{R}^*(\theta)$ 能足够好地用幂关系来 "把握":

$$\widehat{R}^*(\theta) \sim k\theta^{-\alpha}, \qquad \theta \to \infty, \tag{3}$$

而不是可能期待的指数关系:

$$\widehat{R}^*(\theta) \sim k\exp(-\theta^{\beta}), \qquad \theta \to \infty, \tag{4}$$

后者在金融数学中对于许多模型 (例如, *ARCH, GARCH*; 详情参见 [193] 和 [202]) 成立.

经验自相关函数 $\widehat{R}^*(\theta)$ 足够缓慢地递减的事实有重要的实际推论. 它意味着, 在价格中实际上是有强后效的, 或者再次形象地说, "价格记得过去". 尤其是, 它对于预测价格的未来运动的可能性带来一定的希望; 为此, 当然需要建立序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 的模型, 其中至少相关性质是与实际中所观察到的相似. 参见与此有关的 [89], [360] 和第二章 §3b.

2. "自相关对小 θ 值充分大" 这一状况, 可作为所观察到的用波动率 $|\widetilde{h}_n|$ 来度量的 "活跃程度" 的聚集 (结队) 效应的一种令人信服的解释.

早在 1963 年发表的 B. Mandelbrot 著作 [322] 中已知的这种效应的实质在于, 照例, 等待在波动率大值后面的还是大值, 而小值后面的还是小值.

换句话说, 如果变化值 $|\widetilde{h}_n| = |\widetilde{H}_{t_n} - \widetilde{H}_{t_{n-1}}|$ 较大, 那么 (以充分大的概率) 跟随的值 $|\widetilde{h}_{n+1}|$ 也将较大. 如果 $|\widetilde{h}_n|$ 较小, 那么 (以充分大的概率) 跟随的值也将较小. 直观上这一性质在图 46 上和对于许多金融指数的实际观察清晰可见.

我们注意到, 聚集性现象也被在下一节所考察的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析很好 "把握".

4. 统计 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析

§4a. $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析的来源和方法论

1. 在前一章的 §2a 中已描述过 G. Hurst ([236]; 1951 年) 发现的尼罗河逐年流量的统计数据中的长记忆和自相似现象, 而因此促使 Hurst 创建了所谓 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析.

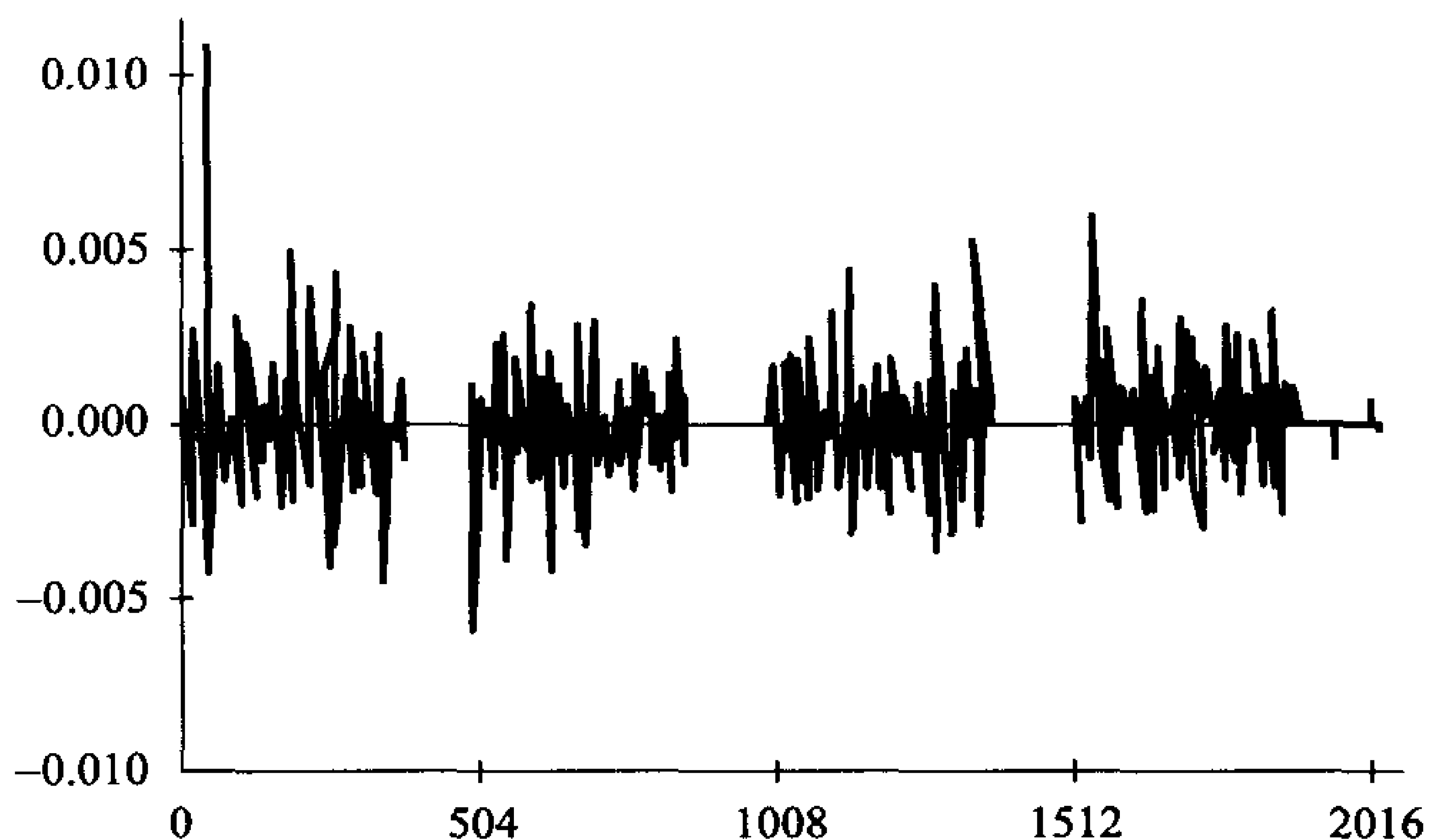


图 46 汇率 DEM/USD 的量 $\widetilde{h}_k = \widetilde{h}_{t_k}^{(\Delta)}$ 中的聚集现象 (根据路透社 1992.10.5—1992.11.2 的数据; [427]). 时间区间 $\Delta = 20$ 分钟; 值 504 对应一周; 2016 对应四周. 量 $|\widetilde{h}_k|$ 的 "大小" 值的 "聚集" 呈现清晰

这种研究方法在统计实践中并不广为人知, 尽管它无疑令人瞩目. 这是因为相当稳健的 Hurst 方法可用来揭示统计数据中诸如序列值的聚集性, 追随趋向方向的趋向 (倾向持续性, persistence), 强后效性, 强记忆性, 快速交替性 (反持续性, antipersistence), 分形性, 具有周期和非周期的循环, 噪声的 "随机本性" 和 "混沌本性" 的区分特征等等性质.

除了 G. Hurst 的奠基著作 [236] 以外, 在 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析理论发展上, B. Mandelbrot 及其合作者的著作 ([314], [316]–[319], [321]–[325], [327]–[329]) 以及 E. Peters 的著作及其两本专著 [385], [386], 都对其方法论及其应用起着卓著的作用, 其中包含大量 (照例是描述性的) 有关 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析对金融市场的应用的资料.

2. 设 $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ 是某个金融指数, $h_n = \ln \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$, $n \geqslant 1$.

$\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析应用于序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 性质研究的实质在于如下.

我们形成量 $H_n = h_1 + \cdots + h_n$, $n \geqslant 1$, 并假定 (比较第三章 §2a)

$$\mathcal{R}_n = \max_{k\leqslant n}\left(H_k - \frac{k}{n}H_n\right) - \min_{k\leqslant n}\left(H_k - \frac{k}{n}H_n\right). \tag{1}$$

量 $\overline{h}_n \equiv \dfrac{H_n}{n}$ 是由样本 $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ 所构造的经验均值, 因而, $H_k - \dfrac{k}{n}H_n = \sum\limits_{i=1}^{k}(h_i - \overline{h}_n)$ 是 H_k 与经验均值 $\dfrac{k}{n}H_n$ 的偏差量. 量 $\mathcal{R}_n$ 本身刻画的是这些偏差 $H_k - \dfrac{k}{n}H_n$ $(k \leqslant n)$ 的 "幅度".

又设

$$\mathcal{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h_k\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(h_k - \overline{h}_n)^2 \tag{2}$$

是经验方差以及

$$\mathcal{Q}_n \equiv \frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \tag{3}$$

是积聚和 $H_k(k \leqslant n)$ 的规范幅度, 或者调整幅度 (根据 [157] 中的术语; 其英文版本是 "积聚和 H_k $(k \leqslant n)$ 的调整范围 (the adjusted range of the cumulative sums H_k, $k \leqslant n$)").

由公式 (1)–(3) 我们看到, 量 $\mathcal{Q}_n$ 具有关于变换 $h_k \to c(h_k + m)$ $(k \geqslant 1)$ 不变的重要性质; 这种很有价值的品质使它的统计量成为非参数的 (至少从与量 h_k $(k \geqslant 1)$ 的分布的前两阶矩的值无关的视角来看是这样).

3. 在 $h_1, h_2, \cdots$ 是有 $\mathsf{E}h_n = 0$, $\mathsf{D}h_n = 1$ 的独立同分布的随机变量序列的情形下, V. Feller [157] 对于大 n 建立了

$$\mathsf{E}\mathcal{R}_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{1/2} \quad (= 1.2533 \cdots \times n^{1/2}) \tag{4}$$

以及

$$\mathsf{D}\mathcal{R}_n \sim \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\right) n \quad (= 0.07414 \cdots \times n). \tag{5}$$

这个结果首先可理解为, 如果运用 Donsker-Prohorov 不变性原理 (参见例如, [39], [250]), 从而根据它可得渐近分布 $\mathcal{R}_n/\sqrt{n}$ 重合于布朗桥 $B^0 = (B_t^0)_{t \leqslant 1}$ 的幅度

$$R^* = \sup_{t \leqslant 1} B_t^0 - \inf_{t \leqslant 1} B_t^0 \tag{6}$$

的分布, 这里布朗桥 $B^0 = (B_t^0)_{t \leqslant 1}$ 可定义为

$$B_t^0 \equiv B_t - tB_1, \tag{7}$$

其中 $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ 是标准布朗运动 (参见第三章中的 §3a).

其实, 我们考察量

$$\frac{\mathcal{R}_n}{\sqrt{n}} = \max_{k \leqslant n} \left[\frac{H_k}{\sqrt{n}} - \frac{k}{n} \frac{H_n}{\sqrt{n}}\right] - \min_{k \leqslant n} \left[\frac{H_k}{\sqrt{n}} - \frac{k}{n} \frac{H_n}{\sqrt{n}}\right]. \tag{8}$$

对应不变性 (换句话说, 与量 h_k 的具体分布形式的无关性) 观念本身, 在求 $n \to \infty$ 时的 $\mathcal{R}_n/\sqrt{n}$ 的极限分布时, 可假定 h_k 有标准正态分布 $\mathscr{N}(0,1)$. 于是, 如果 $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ 是标准布朗运动, 那么样本 $\{H_k/\sqrt{n},\ k = 1, \cdots, n\}$ 的概率分布和 $\{B_{k/n}, k = 1, \cdots, n\}$ 的概率分布相重合, 也就是说,

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{R}_n}{\sqrt{n}} &\overset{\mathrm{d}}{=} \max_{\{t:\ t = \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}} [B_t - tB_1] - \min_{\{t:\ t = \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}} [B_t - tB_1] \\ &\overset{\mathrm{d}}{=} \max_{\{t:\ t = \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}} B_t^0 - \min_{\{t:\ t = \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\}} B_t^0,\end{aligned} \tag{9}$$

其中 "$\overset{d}{=}$" 表示随机变量按分布相等.

由此变得很明显, 当 $n \to \infty$ 时, $\mathcal{R}_n/\sqrt{n}$ 的概率分布 (弱) 收敛于统计量 R^* 的分布. (我们注意到, 函数 $(\max - \min)(\cdot)$ 在右连续和有左极限的函数空间上连续. 关于这点和关于在这样的函数空间上的测度的弱收敛, 参见例如, [39], [250; 第 VI 章], [304; 第 6 章].)

对于分布函数 $F^*(x) = \mathsf{P}(R^* \leqslant x)$, 已知其密度 $f^*(x)$ 有如下显式 (参见 [157] 中的 (4.3)):

$$f^*(x) = xe''(x) + \sum_{k=2}^{\infty}\Big\{2k(k-1)[e'((k-1)x) - e'(kx)] + (k-1)^2xe''((k-1)x) + k^2xe''(kx)\Big\}, \tag{10}$$

其中 $e(x) = e^{-2x^2}$. (也可比较第三章 §2c 第 4 点中对于 $\widetilde{R}_1$ 的分布.)

运用这个公式, 不难求得

$$\mathsf{E}R^* = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \mathsf{D}R^* = \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\right). \tag{11}$$

顺便我们察觉, $\mathsf{E}\sup\limits_{t\leqslant 1}|B_t| = \sqrt{\pi/2}$; 参见第三章中的 §3b. 尤其是, 两个统计量 R^* 和 $\sup\limits_{t\leqslant 1}|B_t|$ 的均值重合.

4. 如果假定量 $h_1, h_2, \cdots$ 独立同分布, 且 $\mathsf{E}h_i = 0$, $\mathsf{D}h_i = 1$, 那么当 $n \to \infty$ 时, 以概率 1 有 $\mathcal{S}_n^2 \to 1$ (强大数定律). 因此, 当 $n \to \infty$ 时, 极限分布 $\mathcal{Q}_n/\sqrt{n}$ 也将与 R^* 的分布重合.

$\mathcal{Q}_n$ 的分布与量 h_k $(k \leqslant n)$ 的均值和方差无关. 这一 "非参数" 性质导致下列允许 (以某种置信度) 回答下列假设 ($\mathscr{H}_0$) 的判别准则: 所考察的价格服从随机游走模式, 它是有效运作市场经典概念的基础 (参见第一章中的 §§2a, 2e).

这一基于 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-统计的判别准则在思路上的实质在于如下 (G. Hurst, [236]; [329], [386]).

如果假设 $\mathscr{H}_0$ 成立, 那么对于充分大的 n, $\mathcal{R}_n/\mathcal{S}_n$ 必定 "接近" 于 $\mathsf{E}_0\dfrac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2}n}$, 由此求得

$$\ln\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \approx \ln\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\ln n. \tag{12}$$

(当然, 这个表达式正如下面引入的关系式 (13) 和 (14) 那样, 必须和可能赋以运用极限定理陈述的精确的概率含义. 我们不将在这里阐述这点, 而只停留在经常在统计实践中采用的 "自然" 理解的层次.)

这样, 在值 (按其自己的轴) 的对数尺度下 $\ln\dfrac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ 必定 (在假设 $\mathscr{H}_0$ 成立的情形下) 沿着直线 $a + \frac{1}{2}\ln n$ "分组", 其中 $a = \ln\sqrt{\pi/2}$ (参见图 47).

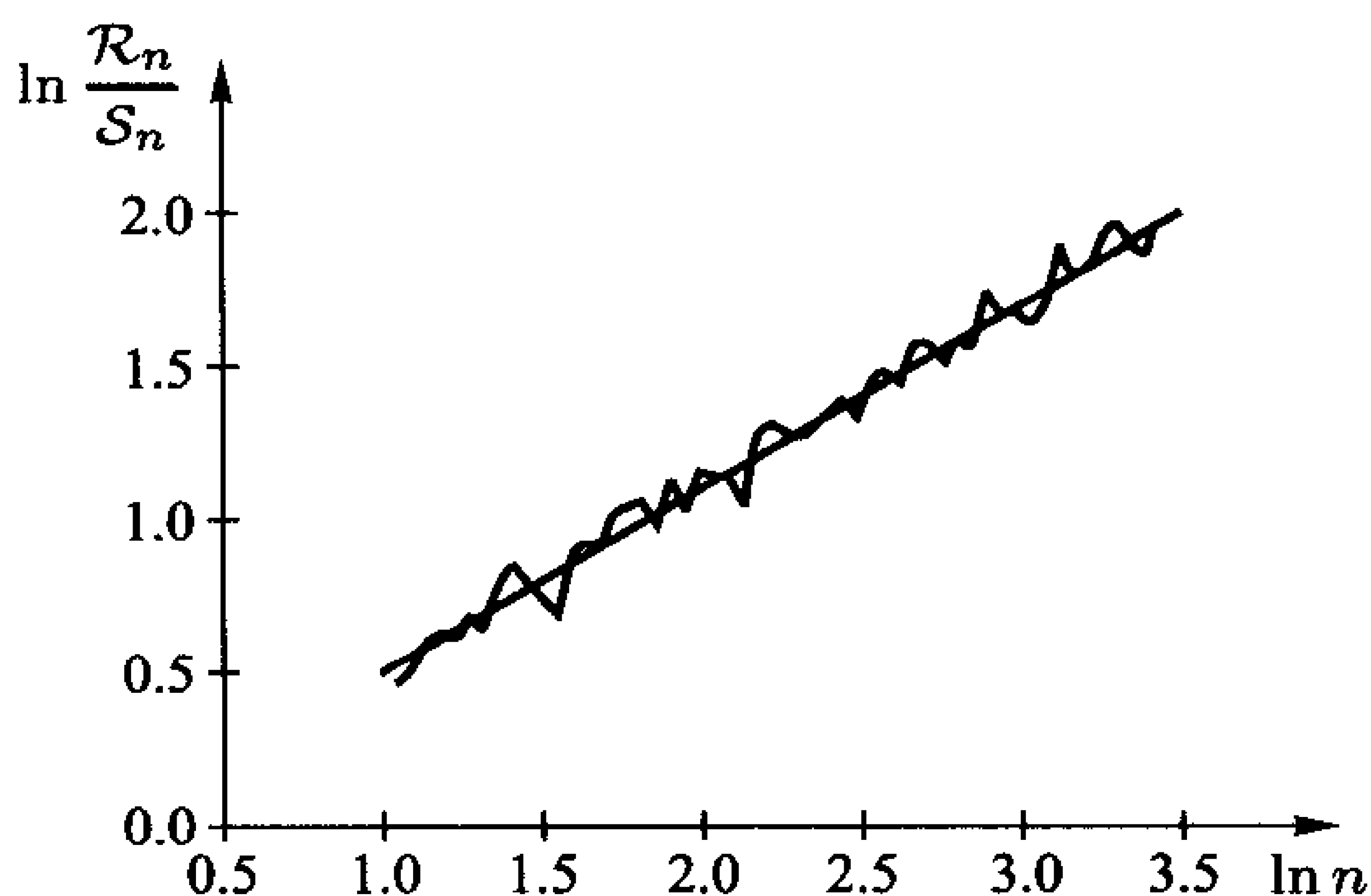


图 47 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析图解 (假设 $\mathscr{H}_0$ 成立的情形)

这一图解清楚地阐明了 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析方法: 根据统计数据 (按对数尺度) 列出点 $\left(\ln n, \ln \dfrac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}\right)$, 再按最小二乘法导出直线 $\widehat{a}_n + \widehat{b}_n \ln n$. 如果发现值 $\widehat{b}_n$ 以 "显著方式" 不同于 1/2, 那么假设 $\mathscr{H}_0$ 应该被拒绝. (对应日常的统计分析方法, 自然必须在假设 $\mathscr{H}_0$ 正确的情形下, 能够计算在多大程度上 $\widehat{b}_n$ 显著偏离 1/2. 应该注意到, 这不是一个简单的问题, 因为很难对于有限的 n 求出统计量 $\mathcal{R}_n/\mathcal{S}_n$ 的分布; 关于这一点的某些情况将在下面的第 6 点说到.)

G. Hurst 的研究的主要价值在于, 他 (用 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析方法) 发现, 取代 (对于尼罗河和其他河流) 所期待的性质

$$\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \sim cn^{1/2}, \tag{13}$$

其实它是

$$\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n} \sim cn^{\mathbb{H}}, \tag{14}$$

其中 $\mathbb{H}$ 显著大于 1/2.

5. 如果试验研究导致性质 (14) (有点出人意料地) 满足, 那么就会提出这样的问题: 对于序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 的怎样的模型才有可能使这样的性质成立.

与此同时, 必定也要对这样的事实给出相应的解释: 在许多情形下, 参数值 $\mathbb{H} > 1/2$. (下面我们看到, 解释之一在于 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 是有长记忆和正相关的系统.)

关于这方面, 我们将基于著作 [316], [319], 介绍一系列基本观察, 同时也介绍计算机的数值计算以及一系列有关 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析的结果.

照例, 对于有 "弱依赖性" (Markov 型, 自回归型等等) 的序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 来说, Hurst 参数 $\mathbb{H}$ 接近于 1/2. 在这一情形下, 通常说, 系统 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 有 "有限 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-记忆".

如果 $h_n = B_{\mathbb{H}}(n) - B_{\mathbb{H}}(n-1)$, $n \geqslant 1$, 其中 $B_{\mathbb{H}} = (B_{\mathbb{H}}(t))_{t\geqslant 0}$ 是分形布朗运动 (第三章 §2b), 那么 $\dfrac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n n^{\mathbb{H}}}$ 原来渐近地有非平凡 $(n \to \infty)$ 极限分布, 它在某种含糊的

解释下, 记作关系式 (14) 的形式. 尤其是, 如果统计研究给出 $0 < \mathbb{H} < 1$ 和 $\mathbb{H} \neq 1/2$, 那么可用来作为解释类似现象的备选对象之一是*分形高斯噪声*.

我们记得 (参见第三章中的 §2c), 对于这样的噪声, 当 $\mathbb{H} > 1/2$ 时, 相关是正的, 而当 $\mathbb{H} < 1/2$ 时, 相关是负的. 这一情况说明, 为什么在前一种情形下, 可说具有*保持运动趋向* ("持续性 (persistence)"; 如果在系统中产生增长, 那么有很大的机会使得这一增长继续), "强记忆", "强后效".

在著作 [386] 中强调, 在文献中流传在金融时间序列中只能观察到 $\mathbb{H} > 1/2$ 的情形的见解并不符合实际. 情形 $\mathbb{H} < 1/2$ 也成立, 并且它可在波动率的增益量的性态中观察到 (参见第三章 §2d 中的第 5 点和 §4b 中的第 3 点), 它由序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 的值中的强交替性 ("反持续性 (antipersistence)") 来刻画.

6. 正如上面已经注意到, 在运用 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析时, 为了在假设关系式 (14) 中确定参数 $\mathbb{H}$, 当然必定要确定, 在多大程度上关于值 $\mathbb{H}$ 所作的结论与模型相拟合.

换句话说, 这里产生通常的统计推断的可靠性问题, 与此相联系的是它也转向数理统计中的 "拟合检验", "显著性检验" 等等.

与此相联系的是应该注意到, 统计量 $\dfrac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ 的复杂性使得甚至在 "零" 假设 $\mathscr{H}_0$ 假定成立时, 都不可能对于各种不同的 n 值求得其概率分布的令人满意的公式. (然而, 在著作 [8] 中考察了均值 $\mathsf{E}_0\dfrac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ 的性态问题, 其中求均值 E_0 是符合假设 $\mathscr{H}_0$ 成立的假定的.)

在 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析中广泛运用 Monte-Carlo 方法 (参见例如, [317], [329], [385], [386]), 特别是为了确定这种分析在多大程度上能给出未知值 $\mathbb{H}$ 的令人满意的估计时更是如此, 它们都说明了所注意到的复杂性.

7. 在用理论模型预测实际统计数据时, 自然要从容易进行分析研究的简单模式开始. 在这方面, 当描述序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 的概率结构时会非常自然地假定, 这是有参数满足 $0 < \mathbb{H} < 1$ 的分形高斯噪声. 在 $\mathbb{H} = 1/2$ 的情形下, 我们就得到通常的布朗运动; 它是构造许多模型的基础, 无论模型是线性的 (AR, MA, $ARMA$), 还是非线性的 ($ARCH$, $GARCH$).

$\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析在序列 $h = (h_n)_{n\geqslant 1}$ 是分形高斯噪声序列的模型中给出了很好的结果 (参见 [317], [329], [385], [386]). 在把这一方法用到其他模型时, 有价值的是除了考察统计量 $\mathcal{Q}_n \equiv \dfrac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ 以外, 还要引入统计量

$$\mathcal{V}_n = \frac{\mathcal{Q}_n}{\sqrt{n}}, \tag{15}$$

对它作简单的直观分析就经常导得很有内容的统计推断.

基于在这种思想的分析, 在白噪声的情形下 ($\mathbb{H} = 1/2$), 当 n 很大时, 统计量必定越来越稳定 ($\mathcal{V}_n \to c$, 其中 c 是某个常数, 而收敛性是在某个适当的概率意义下).

如果 $h=(h_n)_{n\geqslant 1}$ 是有 $\mathbb{H}>1/2$ 的分形高斯噪声, 那么值 $\mathcal{V}_n$ 必定 (随着 n 的增长而) 增长; 而相反, 当 $\mathbb{H}<1/2$ 时, $\mathcal{V}_n$ 必定减小.

为此, 我们转向最简单的模型: 一阶自回归模型 $(AR(1))$

$$h_n=\alpha_0+\alpha_1 h_{n-1}+\varepsilon_n, \qquad n\geqslant 1, \tag{16}$$

其性态完全由 "噪声" 量 ε_n 和初值 h_0 来确定.

如果对于这个模型 (根据值 $h=(h_n)_{n\geqslant 1}$) 形成量 $\mathcal{V}=(\mathcal{V}_n)_{n\geqslant 1}$, 那么可以察觉, 它们随 n 的增长而增长. 但是这完全不是说我们有一个有 $\mathbb{H}>1/2$ 的分形高斯噪声型的模型; 简单的理由在于, 这种增长在原理上可能并非因为序列 $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ 具有分形性, 而是因为在 (16) 中具有线性依赖关系.

因此, 在阐释序列 $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 的 "随机" 本性时, 自然不对量 $h=(h_n)_{n\geqslant 1}$ 来运作, 而是对线性化的量 $h^0=(h_n^0)_{n\geqslant 1}$ 来运作, 其中 $h_n^0=h_n-(a_0+a_1h_{n-1})$, 而 a_0 和 a_1 一般来说是未知的参数 α_0 和 α_1 的某种估计量.

如果比方说, 对量 $h=(h_n)_{n\geqslant 1}$ 根据 (16) 以高斯白噪声 $\varepsilon=(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ 来建模, 那么我们求得按 $h^\circ=(h_n^\circ)_{n\geqslant 1}$ 构造的新量 $\mathcal{V}_n^\circ=\mathcal{V}_n(h^\circ)$, 其性态正如有 $\mathbb{H}=1/2$ 的分形高斯噪声所应该呈现的那样. 下列图形定性地说明所描述的现象:

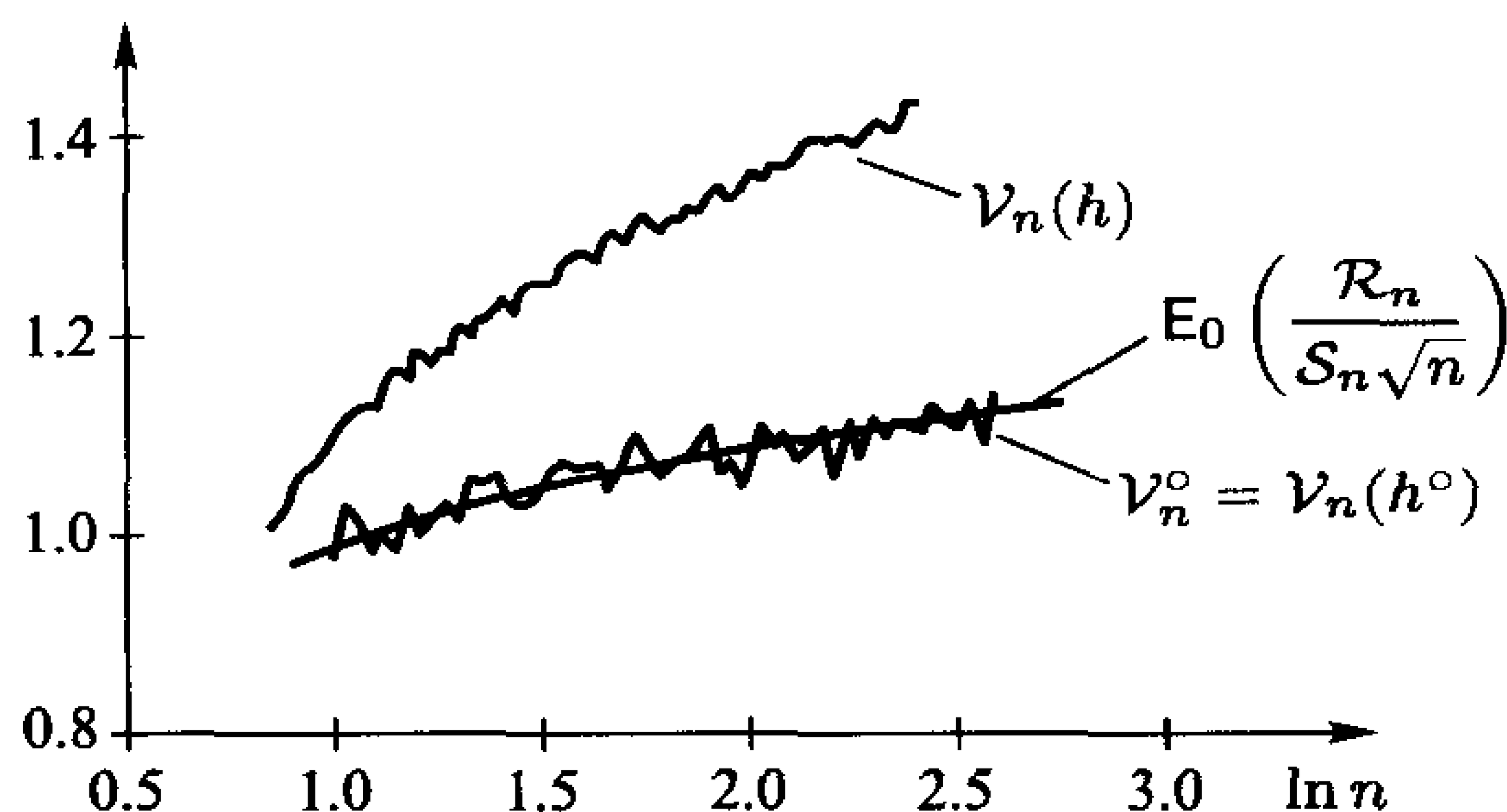


图 48　对于模型 $AR(1)$ 的统计量 $\mathcal{V}_n(h)$, $\mathcal{V}_n^\circ=\mathcal{V}_n(h^\circ)$. 数学期望 $\mathsf{E}_0\left(\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n\sqrt{n}}\right)$ 在假设 $\mathscr{H}_0$ 下计算

如果考察线性模型 $MA(1)$, $ARMA(1,1)$, 那么在定性关系中仍保持图 48 中所画出的图景 (参见 [386; 第 5 章]).

在非线性模型 $ARCH$, $GARCH$ 的情形下, 观察到的是实现 $\mathcal{V}_n(h)$ 和 $\mathcal{V}_n(h^\circ)$ 与 $\mathsf{E}_0\left(\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n\sqrt{n}}\right)$ $(n\geqslant 1)$ 的关系的另一种性态 (参见图 49). 首先, $\mathcal{V}_n(h)$ 和 $\mathcal{V}_n(h^\circ)$ 的性态相当类似, 它可解释为量 h_n 之间缺乏线性依赖关系. 其次, 对于不大的 n, $\mathcal{V}_n(h)$ 和 $\mathcal{V}_n(h^\circ)$ 的图像会稍稍走到 $\mathsf{E}_0\left(\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n\sqrt{n}}\right)$ $(n\geqslant 1)$ 的曲线的上面去, 它反映白噪声在量 $(h_n)_{n\geqslant 1}$ 的形成中表现为具有 "不强的持续性". 第三, 随着 n 的增长, 开始呈现 "反持续性" 效应.

注. 这些术语 ("持续性", "反持续性" 等等) 确切地反映了在分形高斯噪声型模

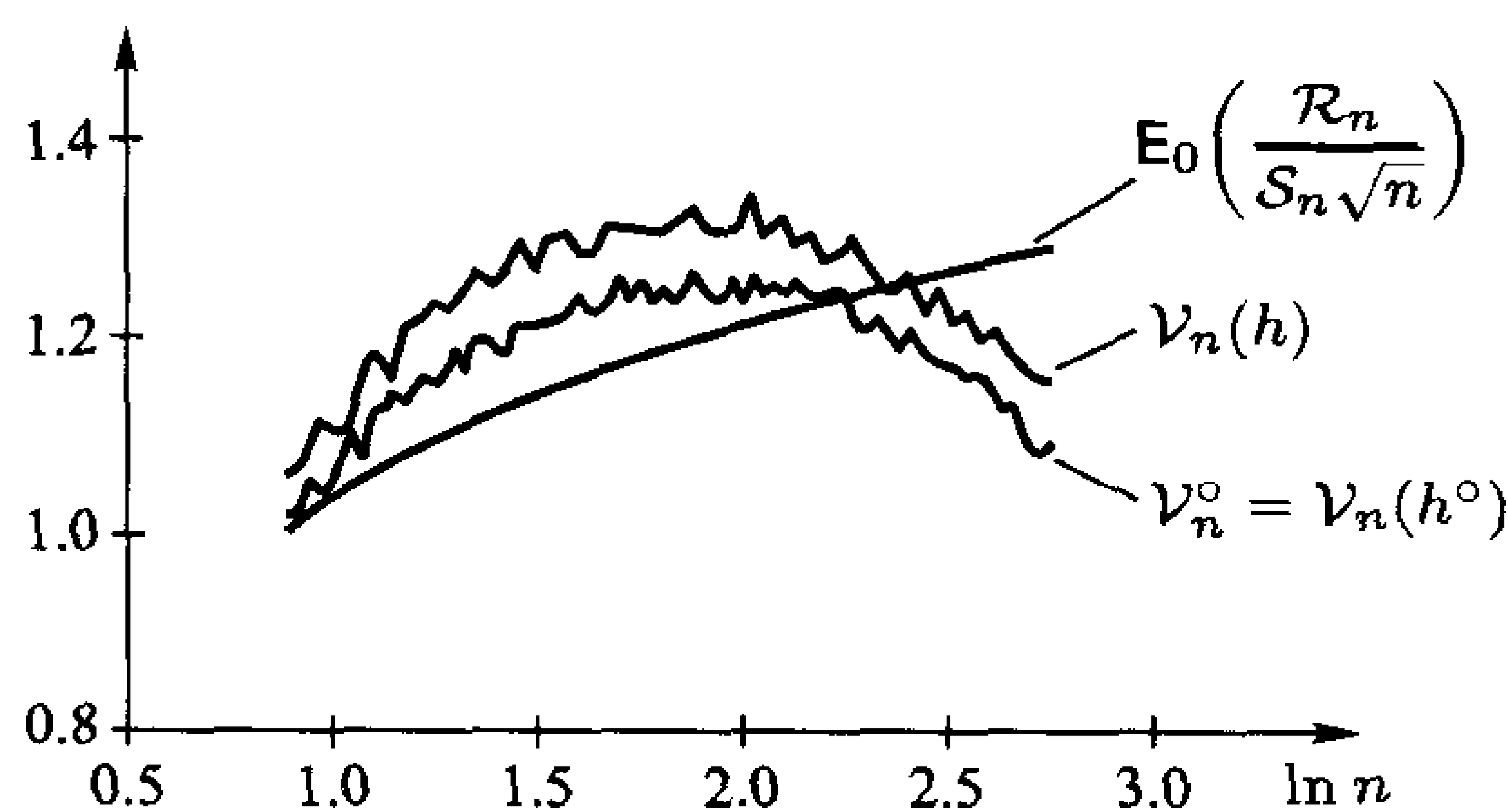


图 49 对于模型 $ARCH(1)$ 的统计量 $\mathcal{V}_n(h)$ 和 $\mathcal{V}_n^\circ = \mathcal{V}_n(h^\circ)$

型中的实质. 然而, *ARCH, GARCH* 及其派生的非线性模型 (第二章 §§3a, 3b) 既不是分形模型, 也不是自相似的. 从而, 为了说明这些模型中的所发现的 "反持续性" 类型的效应, 要求更精细的分析. 尤为重要的是, 在分析金融时间序列时, 无论是用线性模型描述还是用非线性模型描述, 都是非常流行的, 并且必须了解, 实际数据中有怎样的局部和整体时间性质可用这些模型来 "把握".

8. 在第一章 §2a 中曾说起过, M. Kendall [269] 在分析股票价格和交易时的原始想法是期望揭示其中的周期性和具有趋向的性态.

市场分析, 特别是 "技术分析" 代表人物所提出的市场分析 (第一章 §2e), 其出发点首先是市场上应该有一定的周期性, 应该有趋向, 市场的动态变化带有节奏特征.

这些状况说明, 为什么在分析金融序列时, 如此关注在实现中寻求相似、类同片断, 以求运用在其性态上所发现的类似来预测未来的价格运动.

统计 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析不仅是描述上述 "后效"、"强记忆"、"持续性" 和 "反持续性" 等效应的十分有效的方法, 并且也是发现周期循环和非周期循环的好方法. (参见例如, [317], [319], [329], [385], [386].)

有完全清晰可见的非周期循环性的系统的经典例子是太阳活动.

如所周知, 这种活动的适当指标是 *Wolf* 数, 它是由分布在太阳表面的 "黑子" 数所组成. 根据大致 150 年的月数据以及简单的直观分析, 明显地显示出具有 11 年的循环.

Wolf 数的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析的结果 ([385; 第 78 页]) 在图 50 中示意表示.

参数 $\mathbb{H}$ 的估计量 $\widehat{\mathbb{H}}$ 导出量 0.54, 它证实了保持活动的某种趋向 ("持续性"). 由图 50 也清楚地可见, 在 11 年附近, $\ln\left(\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}\right)$ 的性态图景很少改变, 由此使得值 $\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ 稳定化, 它可以解释太阳活动具有 (11 年) 循环. 其实, 在具有周期或非周期循环时, 第二次、第三次等等循环中幅度量与第一次循环中得到的幅度量相比, 不可能有大幅增长. 同样准确的是经验方差照例是平稳化的. 所有这些都说明, 为什么 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分

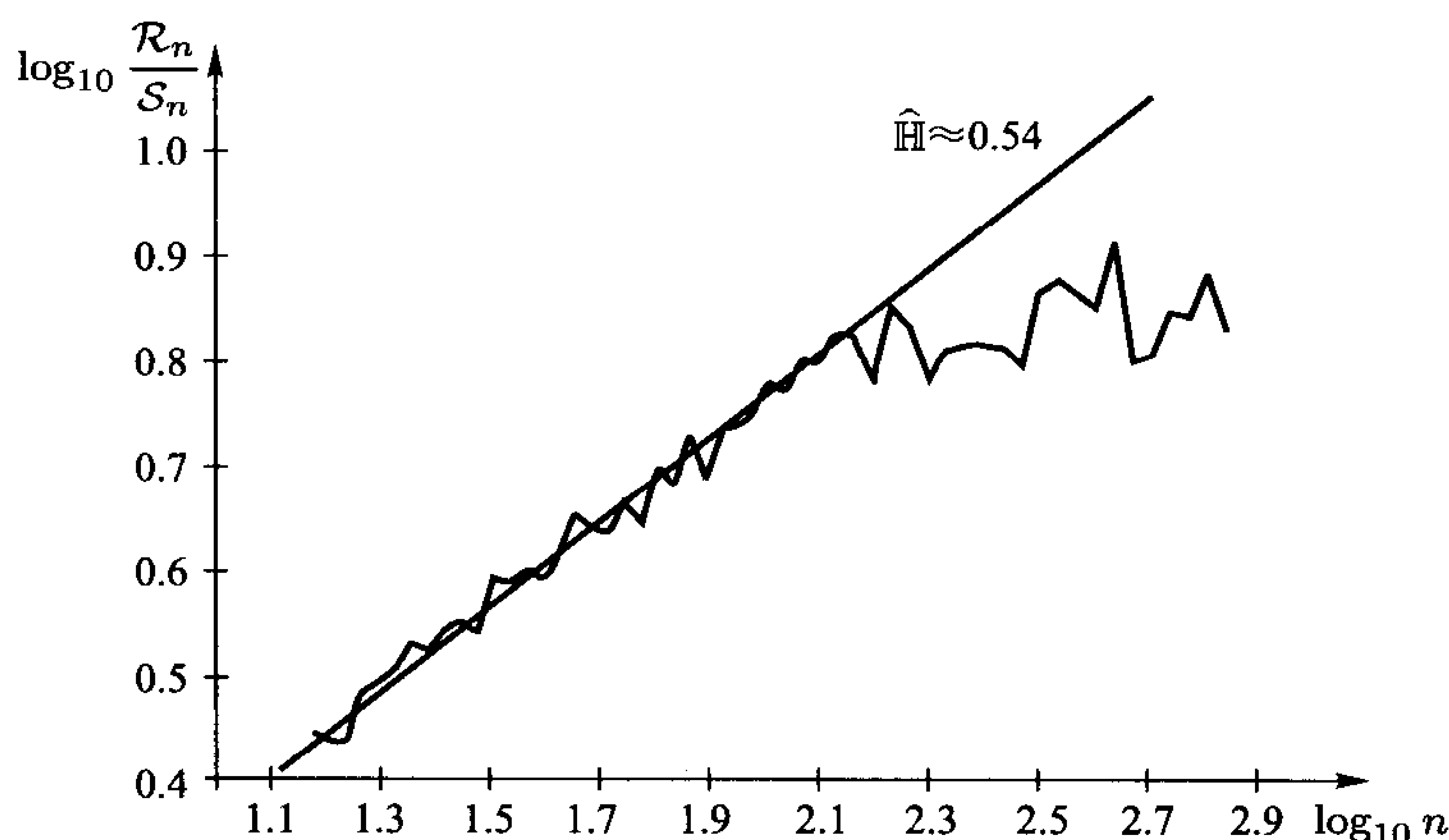


图 50 Wolf 数的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析 ($n=1$ 月, $2.12=\log_{10}(12\cdot 11)$, $h_n=x_n-x_{n-1}$, x_n 是每月的 Wolf 数)

析适用于发现太阳活动类型的现象的循环效应.

作为结束, 我们注意到, 在分析统计动态系统时, 通常涉及两种形式的噪声: "内部噪声" 和 "外部噪声"; "内部噪声" 由系统的统计特征 (诸如太阳活动的随机本性) 特殊确定, 而 "外部噪声" 照例是与测量误差 (例如, 把不大的 "黑团" 算成一个 "黑子") 相联系的附加噪声.

考虑到这些情况, 应该强调, $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析对于 "外部噪声" 是稳健的; 再加上一句, 这一特点使得它也是研究所考察的统计动态系统的 "内部" 随机本性的十分有效的方法.

§4b. 某些金融时间序列的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析

1. 我们得到 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析怎样对分形模型的、线性和非线性模型 "起作用" 以及它可能怎样用于循环性问题的某种表示以后, 自然试图把它应用于具体的金融时间序列 (道琼斯指数, S&P500 指数, 股价, 债券价格, 汇率).

我们已经不止一次地强调, 这里再次提请注意: 在分析金融数据时, 极端重要的是要规定它的时间间隔 Δ, 而投资者、交易者或者其他市场活动者正是在这一时间间隔中计算数据. 因此, 运用 §2b 的记号, 我们将清楚地规定时间间隔 Δ, 并以 $\widetilde{h}_i$ 表示量 $h_{i\Delta}=\ln\dfrac{S_{i\Delta}}{S_{(i-1)\Delta}}$, 其中 S_t 是我们感兴趣的金融指数在时刻 t 的值.

注. 有关 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析对包括金融在内的时间序列的应用有大量的资料, 它们包含在 [317], [323], [325], [327], [329] 中以及更切题的出版物 [385], [386] 中. 下面引进的相应分析结果的压缩叙述基本上根据书 [385] 和 [386].

2. 道琼斯指数 (DJIA; 参见第一章 §1b 中的第 6 点; 统计数据从 1888 年起发表在 "华尔街日报 (The Wall Street Journal)" 上). 我们将假定 $\Delta=1$ 天, 5 天, 20 天.

下列表格概述了 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析的结果:

Δ	观察值数 N	$\widehat{\mathbb{H}}_N$ 的估计值	循环性 (天)
1 天	12 500	0.59	1250
5 天	2600	0.61	1040
20 天	650	0.72	1040

如果考察统计量 $\mathcal{V}_n$ 的性态, 那么可以察觉, 它的值开始时随 n 的增长而增长, 随后 (在 $\Delta = 20$ 天的情形下) 当 $n = 52$ (即经过 1040 天), 这一增长终止, 表明在数据中具有循环性.

在日数据 ($\Delta = 1$ 天) 的分析中, 统计量 $\mathcal{V}_n$ 大致增长到 $n = 1250$ 天, 然后它的性态平稳化 (比较 §4a 中的图 49), 表明出现循环 (长度接近四年; 这通常与美国的总统选举的四年周期相联系).

3. S&P500 指数 (参见第一章 §1b 中的第 6 点; 本章 §2d 中的第 2 点) 有 "标记" 结构, 并且对此有一个相当庞大的数据库. 从 1950 年 1 月到 1988 年 6 月的月数据 [385; 第 8 章] ($\Delta = 1$ 月) 的分析指出, 如同道琼斯指数的情形那样, 大致具有四年的循环性.

更为细致的以 $\Delta = 1$ 分钟, 5 分钟和 30 分钟的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析 (根据 1989 年到 1992 年的数据; [386; 第 9 章]) 对 Hurst 参数导出这样的估计值 $\widehat{\mathbb{H}}$:

$$\widehat{\mathbb{H}} = 0.603, 0.590 \text{ 和 } 0.653, \tag{1}$$

它证实 S&P500 指数运动中的趋向 "持续性".

值得注意的是, 由量 $\widetilde{h}_n = \ln \dfrac{\widetilde{S}_n}{\widetilde{S}_{n-1}}$ $(\widetilde{S}_n = S_{n\Delta})$ 到线性补偿值

$$h_n^\circ = \widetilde{h}_n - (a_0 + a_1 \widetilde{h}_{n-1})$$

的转换使得对于 $\mathbb{H}$ 的相应的估计值减小 (比较 (1)):

$$\widehat{\mathbb{H}} = 0.551, 0.546 \text{ 和 } 0.594,$$

它实际上接近于均值 $\mathsf{E}_0\widehat{\mathbb{H}}(0.538, 0.540, 0.563)$, 它们是根据同样的样本在假设 $\mathscr{H}_0$ 成立的假定下求得的.

所有这些都说明, 看来, 在短时间间隔下, 传统的线性模型 (甚至简单到如$AR(1)$那样) 就可以很好地描述指数 S&P500 的性态的一阶逼近.

有一种流传甚广的关于日内的高频数据的自回归特征的见解, 说它是因为 "日内" 的交易者对最后的标记结果过度反应, 在作出自己的决策时不能考虑对过去的值的 "长记忆"; 这一状况可作为这种见解的一种解释. 然而, 这一图景随着时间间隔

Δ 的增大而有所改变, 而 Δ 决定了交易者的 "决策" 能力. 特别是, 比如对于 $\Delta = 1$ 月, $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析清晰地显示具有分形结构; 它表现在值 $\widehat{\mathbb{H}}$ 上, 按 48 个月计算的 $\widehat{\mathbb{H}}$ 相当大: $\widehat{\mathbb{H}} \approx 0.78$ (根据 1963 年 1 月到 1989 年 10 月的数据; [385; 第 8 章]).

正如上面已经解释, Hurst 参数的大值证实具有 "持续性", 它可以导致趋向性和循环性.

在所考察的情形下, 甚至对量 $\mathcal{V}_n$ 的简单直观分析就能指出 (比较 §4a 中的图 49) 具有四年循环 (48 月), 它如同道琼斯指数情形下一样, 经济循环的交替是由美国的总统选举所引起的.

现在再提起下列这点是适宜的 (参见 §3a): 对于 S&P500 指数的日数据来说, 其量 $\widehat{r}_n = \ln \dfrac{\widehat{\sigma}_n}{\widehat{\sigma}_{n-1}}$ (其中经验离差 $\widehat{\sigma}_n$ 由 §3a 中的公式 (8) 来确定) 的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析指出, Hurst 参数的估计值大致等于 0.31, 远小于 1/2, 从而表明具有 "反持续性" 效应. 这在直观上指出量 $\widehat{r}_n$ 具有快速交替的性质. 换句话说, 在每一时刻 n, 系统 "有记忆", 如果值 $\widehat{\sigma}_n$ 大于 $\widehat{\sigma}_{n-1}$, 那么在下一个时刻值 $\widehat{\sigma}_{n+1}$ 就很有可能小于 $\widehat{\sigma}_n$.

4. *对于股价的 $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析不仅确定了它们的分形结构和揭示了具有循环性, 并且还能从风险的视角来对它们进行比较.* 根据在著作 [385; 第 8 章] 中引进的数据, 对于 S&P500 指数和一系列属于这一指数的公司的股价的 Hurst 参数 $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\cdot)$ 和循环长度 $\mathbb{C} = \mathbb{C}(\cdot)$ 有下列值:

$\mathbb{H}$(S&P500)=0.78, $\mathbb{C}$(S&P500)=46,
$\mathbb{H}$(IBM)=0.72, $\mathbb{C}$(IBM)=18,
$\mathbb{H}$(Apple Computer)=0.75, $\mathbb{C}$(Apple Computer)=18,
$\mathbb{H}$(Consolidation Edison)=0.68, $\mathbb{C}$(Consolidation Edison)=0.90.

正如我们所看到的, S&P500 指数的 Hurst 指数比它的组成公司的要大. 我们也看到, Apple Computer (苹果计算机) 的参数 $\mathbb{H}$ 足够高 (0.75), 比起比如 Consolidation Edison (爱迪生联合公司) 的来要大得多.

现在我们注意到, 当 $\mathbb{H} = 1$ 时, (标准) 分形布朗运动 $B_1(t) = t\xi$, 其中 ξ 是有均值 0 和方差 1 的正态分布随机变量. 对于这个过程 $B_1 = (B_1(t))_{t\geqslant 0}$, 所有 "随机性" 都由量 ξ 来确定, 并且很明显, 在所有参数满足 $0 < \mathbb{H} \leqslant 1$ 的分形布朗运动类中, 这个过程是 "噪声" 最小的. 尤其明显的是, 当 $\mathbb{H} \uparrow 1$ 时, 过程 $B_{\mathbb{H}}$ 的噪声成分变得越来越小, 而这有其 "金融" 解释: 对于用这样的过程所引出的模型 (当 $\mathbb{H} \uparrow 1$ 时) 变得 "风险越来越小". (当 $\mathbb{H} \uparrow 1$ 时, 在过程 $B_{\mathbb{H}}$ 弱收敛于 B_1 的框架下, 对所陈述的关于噪声成分减小的断言可给出严格的意义. 我们也察觉, 相关函数 $\rho_{\mathbb{H}}(n) = \mathsf{E}h_k h_{n+k}$ 当 $\mathbb{H} > 1/2$ 时是正的 (保持运动趋向的 "持续性"), 并且对于所有 n, 当 $\mathbb{H} \uparrow 1$ 时, $\rho_{\mathbb{H}}(n) \to 1$.)

在著作 [385] 中注意到, 这样的 (用弱收敛术语的) 解释, 当所考察的过程有大 Hurst 参数 $\mathbb{H}$, 而处于风险概念基础的方差不能定义时, 特别有吸引力.

S&P500 指数有较大的参数 $\mathbb{H}$ 这一事实说明基于这一指数进行证券交易比对公司股票进行交易风险较小, 它自然要用分散化 (参见第一章 §2b) 减小了噪声因素来解释.

注 1. 我们强调, 这里把 "较小的风险" 理解为 "较小的噪声", "较大的持续性", 它表现为力求保持运动方向. 然而, 应该强调, 在有较大的 $\mathbb{H}$ 的系统中, 存在急剧变动运动方向的可能性. 一长串上扬后面会遇到一长串下跌.

注 2. 回到各种股票的给定值 $\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{C}$, 应该注意到在 [385] 中所作出的下列观察: 创新水平高的公司照例导致大 $\mathbb{H}$ 值和短循环; 创新水平低的公司则对应小 $\mathbb{H}$ 值和长循环.

5. 债券 (*bonds*). 30 年 T-Bond (美国的国库券, Treasury Bond) 在 1950 年 1 月到 1989 年 10 月期间 (参见 [385; 第 8 章]) 也有相当高的分形参数 $\widehat{\mathbb{H}} \approx 0.68$, 循环大致是 5 年.

6. 货币汇率. 在货币汇率之间以及在诸如道琼斯指数、S&P500 指数、股价、债券价格等等的金融指数之间有很大的差别.

比如, 股票的买卖直接与这些证券有关的领域中的投资相联系. 而外汇的买卖是由创建今后的扩大生产、消费等等的可能性来定向的. 同时, 大部分外汇交易至少触及两个国家, 本质上是由她们的经济政治状况来决定的, 在许多方面取决于她们的中央银行的作用 (诸如投资、利率变动等等) .

这些因素当然会在汇率的统计性质及其动态变化上留下自己的痕迹.

可用来判断汇率变化程度的重要特征之一是 Δ-波动率, 它通过增量 $|H_{k\Delta} - H_{(k-1)\Delta}|$ 来定义, 其中 $H_t = \ln \dfrac{S_t}{S_0}$ 以及 S_t 是汇率的值 (参见例如 §1c 中的公式 (5)).

在这一联系中, 应该强调, 上面所考察的统计量 $\mathcal{R}_n$ 和 $\dfrac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ 按其自身的含义也是 "幅度" 过程 $H = (H_t)_{t \geqslant 0}$ 的变化特征, 因而不令人惊奇的是, $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-分析也能发现许多已经在上节描述过的汇率的性质.

不同于道琼斯指数、S&P500 指数类型的金融指数, 在汇率的演变中, 清晰地显露分形结构 (至少对于小 $\Delta > 0$) 和随时间保持它的趋向.

对作为 $\ln n$ 的函数的统计量 $\ln \dfrac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ 的性态用最小二乘法作简单分析, 就能发现这一些; 它表明, 值 $\ln \dfrac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ $(n \geqslant 1)$ 很好地沿着直线 $c + \widehat{\mathbb{H}} \ln n$ 分组, 其中参数 $\widehat{\mathbb{H}}$ 对于多数货币来说有比 1/2 明显要大的数值. 例如, 对于日元对美元的汇率, $\widehat{\mathbb{H}}(\mathrm{JPY/USD}) \approx 0.64$. 类似地有 $\widehat{\mathbb{H}}(\mathrm{DEM/USD}) \approx 0.64$, $\widehat{\mathbb{H}}(\mathrm{GBP/USD}) \approx 0.61$.

所有这些都说明, 这些汇率具有带相当大的 Hurst 参数值的分形结构. 在这方面, 有益的是要回忆起, 对于分形布朗运动来说, $\mathsf{E}H_t^2$ 如同 $|t|^{2\mathbb{H}}$ 那样增长. 因此, 当

$\mathbb{H} > 1/2$ 时, $|H_t|$ 的值比通常的布朗运动要撒得开, 从而, 随着时间的增长, 外汇的运营风险大大增加. 看来, 这一点解释了为什么在外汇市场中, 人们偏爱的不是长线运营, 而是积极的短线交易.

参考文献

[1] Abramowitz, M., and I. A. Stegun, 1968, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York.

[2] Adaptive Computational Methods in Finance and Trading. Report of the Intertek Group. Foreword by R. B. Olsen, 1994, December, "Olsen and Associates", Research Institute for Applied Economics, Zürich.

[3] Admati, A. R., and P. Pfleiderer, 1988, A theory of intraday trading patterns, *Review of Financial Studies*, **1**, 3–40.

[4] Akgiray, V., and G. G. Booth, 1988, The stable-law model of stock returns, *Journal of Business and Economic Statistics*, **6**, 51–57.

[5] Александров, П. С., и А. Я. Хинчин, 1953, Андрей Николаевич Колмогоров (к пятидесятилетию со дня рождения), *Успехи математических наук*, **8**, №3, 178–200.

[6] Andersen, L., J. Andreasen and R. Brotherton-Ratcliffe, February, 1997, The Passport Option, Perprint, Aarhus University, Aarhus.

[7] Andersen, T., and T. Bollerslev, 1994, Intraday Seasonality and Volatility Persistence in Foreign Exchange and Equity Markets, Working paper №193, Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, Evanston, IL.

[8] Anis, A. A., and E. H. Lloyd, 1976, The expected value of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summands, *Biometrika*, **63**, №1, 111–116.

[9] Ansel, J.-P., et C. Stricker, 1994, Couverture des actifs contingents et prix maximum, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **30**, №2, 303–315.

[10] Ansel, J.-P., et C. Stricker, 1990, Quelques remarques sur un théorème de Yan, *Lecture Notes in Mathematics*, **1426**, 226–274.

[11] Аркин, В. И., и И. В. Евстигнеев, 1979, Вероятностные модели управления и экономической динамики, Наука, Москва.

[12] Bachelier, L., 1900, Théorie de la spéculation, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, **17**, 21–86. (英译文在 [77] 中.)

[13] Baillie, R., and T. Bollerslev, 1990, Intra-day and inter market volatility in foreign exchange rates, *Review of Economic Studies*, **58**, 565–585.

[14] Baillie, R., and T. Bollerslev, 1989, The daily message in exchange rates: a conditional variance tale, *Journal of Business and Economic Statistics*, **7**, 297–305.

[15] Baillie, R., T. Bollerslev and H.-O. Mikkelsen, 1996, Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **74**, №1.

[16] Baker, G. L., and J. P. Golub, 1996, Chaotic Dynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[17] Balakrishnan, V., C. Nicolis and G. Nicolis, January, 1995, Extreme Value Distributions in Chaotic Dynamics, Preprint ULB-Cenoli, №95-1. Centre for Non-linear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles.

[18] Ball, C. A., 1993, A review of stochastic volatility models with application to option pricing, *Financial Markets, Institutions and Instruments*, **2**, №5, 55–69.

[19] Ball, C. A., and W. N. Torous, 1983, Bond price dynamics and options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **18**, 517–531.

[20] Barlow, M. T., 1982, One-dimensional stochastic differential equations with no strong solution, *Journal of the London Mathematical Society*, **26**, 335–347.

[21] Barndorff-Nielsen, O. E., 1977, Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size, *Proceedings of the Royal Society, London Ser. A*, **353**, 401–419.

[22] Barndorff-Nielsen, O. E., October, 1994, Gaussian\\Inverse Gaussian Processes and the Modeling of Stock Returns, Preprint, Aarhus University, Aarhus.

[23] Barndorff-Nielsen, O. E., 1978, Hyperbolic distributions and distributions on hyperbolae, *Scandinavian Journal of Statistics*, **5**, 151–157.

[24] Barndorff-Nielsen, O. E., March 5, 1996, Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling, Preprint, Aarhus University, Dept. of Mathematical Sciences, Aarthus.

[25] Barndorff-Nielsen, O. E., and P. Blæsild, Hyperbolic distributions and ramifications: contributions to theory and application, *Statistical Distributions in Scientific Work*, Ed. C. Taillie et al., **4**, 19–44, Dordrecht, Reidel.

[26] Barndorff-Nielsen, O. E., J. L. Jensen and M. Sørensen, Wind shear and hyperbolic distributions, *Boundary-Layer Meteorology*, **49**, 417–431.

[27] Barnea, A., and D. Downes, 1973, A reexamination of the empirical distribution of stock price changes, *Journal of American Statistical Association*, **68**, 348–350.

[28] Barone-Adesi, G., and R. Elliott, 1991, Approximations for the values of American options, *Stochastic Analysis and Applications*, **9**, №2, 115–131.

[29] Barone-Adesi, G., and R. E. Whaley, 1987, Efficient analytic approximation of American option values, *Journal of Finance*, **42**, №2, 301–320.

[30] Basseville, M., and I. Nikiforov, 1993, Detection of Abrupt Changes, Englewood Cliffs, Prentice Hall, NJ.

[31] Baxter, M., and A. Rennie, 1996, Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing, Cambridge Univ. Press, Cambridge. (中译本: M. W. Baxter, A. J. O. Rennie 著, 叶中行、王桂兰、林建忠译, 2006, 金融数学: 衍生产品定价引论, 人民邮电出版社, 图灵教育丛书, 北京.)

[32] Beibel, M., and H. R. Lerche, 1997, A New Look at Warrant Pricing and Related Optimal Stopping Problems, *Statistica Sinica*, **7**, №1, 93–108.

[33] Bensoussan, A., 1984, On the theory of option pricing, *Acta Applicandae Mathematicae*, **2**, 139–158.

[34] Benveniste, A., M. Métivier and P. Priouret, 1987, Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations, Springer-Verlag, Berlin.

[35] Bernstein, P. L., 1992, Capital Ideas, The Free Press, New York. (中译本: 彼得・伯恩斯坦著, 李繁康、邓哲夫、李挺生译, 2001, 投资革命: 源自象牙塔的华尔街理论, 上海远东出版社, 上海.)

[36] Björk, T., 1997, Interest Rate Theory, *Lecture Notes in Mathmatics*, **1656**, 53–122.

[37] Björk, T., G. Di Masi, Yu. Kabanov and W. Runggaldier, 1997, Towards a general theory of bond markets, *Finance and Stochastics*, **2**, №1, 141–174.

[38] Björk, T., Yu. Kabanov and W. Runggaldier, 1997, Bond market structure in the presence of marked point processes, *Mathematical Finance*, **7**, №2, 211–239.

[39] Биллингсли, П., 1977, Сходимость вероятностных мер, Наука, Москва. (英译本: Billingsley, P., 1968, Convergence of Probability Measure, Wiley, New York.)

[40] Bishop, G. W., Jr. Charles H, 1960, Dow and the Dow Theory, Appleton-Century-Crofts, New York.

[41] Black, F., March, 1988, The holes in Black-Scholes, *RISK-magazin*.

[42] Black, F. T., E. Derman and W. Toy, 1990, A one-factor model of interest rate and its application to Treasury bond options, *Financial Analysis Journal*, 33–39.

[43] Black, F., and P. Karasinski, 1991, Bond and option pricing when short rates are lognormal, *Financial Analysts Journal*, 52–59.

[44] Black, F., and M. Scholes, 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, №3, 637–659.

[45] Благовешенский, Ю. Н., и И. Л. Легостаева, 1982, Параметрические границы для непараметрического тренда, *Доклады Академии наук СССР*, **264**, №4, С., 791–794. (英译本: Blagoveshchenskij, Yu. N., and I. L. Legostaeva, 1982, Parametric bounds for a nonparametric trend, *Soviet Mathematics, Dokl.*, **25**, 714–718.)

[46] Blattberg, R. C., and N. J. Gonedes, 1974, A comparison of the stable and the Student distributions as statistical models for stock prices, *Journal of Business*, **47**, 244–280.

[47] Bochner, S., 1962, Subordination of non-Gaussian processes, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, **48**, 19–22.

[48] Bollerslev, T., 1986, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.

[49] Boness, A., A. Chen and S. Jatusipitak, 1974, Investigations of nonstationary prices, *Journal of Business*, **47**, 518–537.

[50] Буренин, А. Н., 1995, Фьючерсные, форвардные и опционные рынки, Тривола, Москва.

[51] Боровков, А. А., 1986, Теория вероятностей, Наука, Москва.

[52] Bowers, N. L., H. U. Gerber, D. A. Hickman, D. A. Jones and C. J. Nesbitt, 1986, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, Itasca, IL.

[53] Box, G. E. P., and G. M. Jenkins, 1970, Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden Day, San Francisco. (中译本: (美) G. E. P. Box, (英) G. M. Jenkins, (美) G. C. Reinsel 著, 顾岚主译, 1997, 时间序列分析: 预测与控制, 中国统计出版社, 北京.)

[54] Brace, A., and M. Musiela, 1994, A multifactor Gauss-Markov implementation of Heath, Jarrow and Morton, *Mathematical Finance*, **4**, №3, 259–283.

[55] Brealey, R. A., and S. C. Myers, 1988, Principles of Corporate Finance, 3rd ed, McGraw-Hill, New York.

[56] Brennan, M., and E.S. Schwartz, 1979, A continuous time approach to the pricing of bonds, *Journal of Banking and Finance*, **3**, 133–155.

[57] Brennan, M., and E.S. Schwartz, 1977, The valuation of American put options, *Journal of Finance*, **32**, 449–462.

[58] Brock, W. A., W. D. Dechert and J.-A. Scheinkman, 1996, A test for Independence based on the correlation dimension, *Econometrics Reviews,* **15**, № 3, 197–235.

[59] Brock, W. A., D. A. Hsieh and B. Le Baron, 1991, Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence, MIT Press, Cambridge, MA.

[60] Brock, W. A., and S. M. Potter, 1990, Diagnostic testing for nonlinearity, chaos, and general dependence in time-series data, Nonlinear Modeling and Forecasting (Proceedings of a Workshop on Nonlinear Modeling and Forecasting, September 1990, Santa Fe, New Mexico), Ed. M. Casdagli and S. Enbank, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 137–159.

[61] Brock, W. A., and C. L. Sayers, 1988, Is the business cycle characterized by deterministic chaos? *Journal of Monetary Economics*, **22**, 71–90.

[62] Brockwell, P. J., and R. A. Davis, 1991, Time Series: Theory and Methods, 2nd ed., Springer-Verlag, New York. (中译本: P. J. 布罗克韦尔, R. A. 戴维斯著, 田铮译, 2001, 时间序列的理论与方法, 高等教育出版社, [海德堡] 施普林格出版社, 北京.)

[63] Brousseau, V., and M. O. Czarnecki, August 16, 1994, Modelling Exchange Rates: the Stable Model, Preprint, Ecole Polytechnique, Paris.

[64] Burnham, J. B., 1991, Current Structure and Recent Developments in Foreign Exchange

Markets, Recent Developments in International Banking and Finance, Ed. S. J. Khonry, Elsevier Sci. Publ., North-Holland, Amsterdam, 123–163.

[65] Бизнес: Оксфордский толковый словарь, 1995, Прогресс-Академия, Москва. (译自英文：A Concise Dictionary of Business, 1991, Market House Books, Ltd..)

[66] Carr, P., R. Jarrow and R. Myneni, 1992, Alternative characterizations of American put options, *Mathematical Finance*, **2**, №2, 87–106.

[67] Chernoff, H., 1961, Sequential tests for the mean of a normal distribution, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* **1**, University of California Press, 79–92.

[68] Четыркин, Е. М., 1992, Методы финансовых и коммерческих расчетов, Business Речь Дело, Москва.

[69] Chan, K. C., G. A., Karolyi, F. Longstaff and A. B. Sanders, 1992, An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rates, *Journal of Finance*, **47**, №3, 1209–1227.

[70] Chen, L., July, 1995, A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates, Preprint, Federal Reserve Board, Washington, USA.

[71] Chen, P., R. H. Day (Eds), 1993, Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics, Oxford University Press, Oxford.

[72] J. Y. Choi, D. Salandro and K. Shastri, 1988, On the estimation of bid-ask spreads: Theory and evidence, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **23**, 219–230.

[73] Chou, C. S., 1979, Caractérisation d'une classe de semimartingales, *Lecture Notes in Mathematics*, **721**, 250–252.

[74] Chou, C. S., P.-A. Meyer et C. Stricker, 1980, Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés, *Lecture Notes in Mathematics*, **784**, 128–139.

[75] Chow Y. S., H. Robbins and D. Siegmund, 1971, Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping, Houghton Mifflin Comp., Boston.

[76] Ciesielski, Z., 1961, Hölder conditions for realizations of Gaussian processes, *Transactions of the American Mathematical Society*, **99**, 403–413.

[77] Clark, J. M. C., 1970, The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals, *Annals of Mathematical Statistics,* **41**, №4, 1282–1295. Correction *ibid* **42** (1971), 1778.

[78] Cootner, P. H. (Ed.), 1964, The Random Character of Stock Market Prices, MIT Press, Cambridge, MA.

[79] Copeland, T., and J. Weston, 1988, Financial Theory and Corporate Policy, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, MA. (中译本: (美) 托马斯・E. 科普兰, J. 弗莱德・威斯顿著, 宋献中主译, 2003, 财务理论与公司政策, 东北财经大学出版社, 大连.)

[80] Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross, 1980, An analysis of variable rate loan contracts, *Journal of Finance*, **35**, 389–403.

[81] Cox, J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross, 1985, A theory of the term structure of

interest rates, *Econometrica*, **53**, №2, 385–407.

[82] Cox, J. C., R. A. Ross and M. Rubinstein, 1979, Option pricing: a simplified approach, *Journal of Finanancial Economics*, **7**, №3, 229–263.

[83] Cox, J. C., and M. Rubinstein, 1985, Options Markets, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[84] Cowles, A., 1933, Can stock market forecasters forecast? *Econometrica*, **1**, 309–324.

[85] Cowles, A., 1944, Stock Market Forecasting? *Econometrica*, **12**, №3/4, 206–214.

[86] Cowles, A., and H. E. Jones, 1937, Some a posteriori probabilities in stock market action, *Econometrica*, **5**, 280–294.

[87] Cummins, S. D., and H. German, 1994, An Asian option approach to the valuation of insurance futures contracts, *Review of Futures Markets*, **13**, 517–557.

[88] Czarnecki, M. O., 24 juin 1994, Modelisation des cours boursiers: le modèle stable (utilisation pratique et pricing d'option), Preprint, Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, Paris.

[89] Dacorogna, M. M., U. A. Müller, P. Embrechts and G. Samorodnitsky, May 30, 1995, Moment Condition for the *HARCH(k)* Models, "Olsen & Associates", Zürich.

[90] Dacorogna, M. M., U. A. Müller, R. J. Nagler, R. B. Olsen and O. V. Pictet, 1993, A geographical model for the daily and weekly seasonal volatility in the foreign exchange market, *Journal of International Money and Finance*, **12**, №4, 413–438.

[91] Dacorogna, M. M., U. A. Müller, O. V. Pictet and C. G. de Vries, March 17, 1995, The Distribution of Extremal Foreign Exchange Rate Returns in Extremely Large Data Sets, Preprint UAM, 1992-10-22, "Olsen & Associates", Research Institute for Applied Economics, Zürich.

[92] Dalang, R. C., A. Morton and W. Willinger, 1990, Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models, *Stochastics and Stochastics Reports*, **29**, №2, 185–201.

[93] Dana, R.-A., et M. Jeanblanc-Picqué, 1994, Marchés financiers en temps continu (Valorisation et equilibre), Economica, Paris.

[94] David, H., H. Hartley and E. Pearson, 1954, The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation, *Biometrika*, **41**, 482–493.

[95] Day, R. H., Complex economic dynamics: obvious in history, generic in theory, elusive in data, [383], 1–15.

[96] Deboeck, G. J., (Ed.), 1994, Trading on the Edge: Neural, Genetic, and Fuzzy Systems for Chaotic Financial Markets, Wiley, 1994.

[97] Delbaen, F., 1992, Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded, *Mathematical Finance*, **2**, 107–130.

[98] Delbaen, F., and W. Schachermayer, 1994, Arbitrage and free lunch with bounded risk for unbounded continuous processes, *Mathematical Finance*, **4**, №4, 343–348.

[99] Delbaen, F., and W. Schachermayer, 1999, A Compactness Principle for Bounded Se-

quences of Martingales with Applications, *Proceedings of the Seminar of Stochastic Analysis, Random Fields and Applications, Progress in Probability*, **45**, 137-173.

[100] Delbaen, F., and W. Schachermayer, 1994, A general version of the fundamental theorem of asset pricing, *Mathematische Annalen*, **300**, №3, 463–520.

[101] Delbaen, F., and W. Schachermayer, 1998, The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes. *Mathematische Annalen*, **312**, 215-250.

[102] Dellacherie, C., et P.-A. Meyer, 1975, Probabilités et Potentiel, Ch. I à IV, Hermann, Paris.

[103] Dellacherie, C., et P.-A. Meyer, 1980, Probabilités et Potentiel, Ch. V à VIII, Hermann, Paris.

[104] Devany, R. L., 1986, Introduction to Chaotic Dynamical Systems, The Benjamin/Cummings Publ. Co., Menlo Park, CA.

[105] De Vries, C. G., 1991, On the relation between *GARCH* and stable processes, *Journal of Econometrics*, **48**, 313–324.

[106] Ding, Z., C. W. J. Granger and R. F. Engle, 1993, A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83–106.

[107] Dixit, A. K., and R. S. Pindyck, 1994, Investment under Uncertainty, Princeton Univ. Press, Princeton. (中译本: (美) 阿维纳什・迪克西特, 罗伯特・平迪克著, 朱勇等译, 2002, 不确定条件下的投资, 中国人民大学出版社, 北京.)

[108] Dolan, E. G., C. D. Campbell and R. G. Campbell, 1988, Money, Banking and Monetary Policy, The Dryden Press, London. (有俄译本.)

[109] Doob, J. L., 1953, Stochastic Processes, Wiley, New York. (有俄译本.)

[110] Doob, J. L., 1984, Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart, Springer-Verlag, New York. (中译本: J・L・杜布著, 周性伟, 杨振明等译, 1993, 经典位势论与概率位势论, 科学出版社, 北京.)

[111] Dothan, L., 1978, On the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics*, **6**, 59–69.

[112] Dothan, M. U., 1990, Prices in Financial Markets, Oxford Univ. Press, Oxford.

[113] Douady, R., February, 1996, Cylindrical Brownian Motions and Yield Curve Smoothing, Preprint, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York.

[114] Drost, F. C., and T. E. Nijman, 1993, Temporal aggregation of *GARCH* processes, **61**, №4, 909–927.

[115] Drost, F. C., and B. J. M. Werker, 1996, Closing the *GARCH* gap: Continuous times *GARCH* modeling, *Journal of Econometrics*, **74**, №1, 31–57.

[116] Дубинс, Л. Е., Л. А. Шепп и А. Н. Ширяев, 1993, Оптимальные правила остановки и максимальные неравенства для процессов Бесселя, *Теории вероятностей и ее применения*, **38**, №4, 288–330. (英译文: Dubins, L. E., L. A. Shepp and A. N. Shiryaev, 1993, Optimal stopping rules and maximal inequalities for Bessel processes, *Theory of Probability and its Applications*, **38**, №2, 226–261.

[117] Duffie, D., 2001, Dynamic Asset Pricing Theory, 3rd ed., Princeton University Press, Princeton.

[118] Duffie, D., and J. M. Harrison, 1993, Arbitrage pricing of a Russian option and perpetual lookback options, *The Annals of Applied Probability*, **3**, №4, 379–406.

[119] Duffie, D., and R. Kan, 1996, A yield-factor model of interest rates, *Mathematical Finance*, **6**, №4, 379–406.

[120] Du Mouchel, W., 1973, Stable distributions in statistical inference: I. Symmetric stable distribution compared to other symmetric long-tailed distributions, *Journal of American Statistical Association*, **68**, 469–477.

[121] Dupire, B., 1993, Model Art, *RISK-magazin*, **6**, 118–124.

[122] Dupire, B., 1994, Pricing with a smile, *RISK-magazin*, **7**, №1, 18–20.

[123] Durrett, R., 1984, Brownian Motions and Martingales in Analysis, Wadsworth, Belmont, CA.

[124] Durrett, R., 1995, Probability: Theory and Examples, 2nd ed., Duxbury Press, Belmont, CA.

[125] Dybvig, P., and S. Ross, Arbitrage, in *The New Palgrave: A Dictionary of Economics,* Ed. J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman, **1**, Macmillan, London, 100–106.

[126] Дынкин, Е. Б., 1963, Марковские Процессы, Физматгиз, Москва.

[127] Eberlein, E., and U. Keller, 1995, Hyperbolic distributions in finance, *Bernoulli*, **1**, №3, 281–299.

[128] Eberlein, E., and S. Raible, 1999, Term structure models driven by general Lévy processes, *Mathematical Finance*, **9**, 31–54.

[129] Ederington, L. H., and J. H. Lee, 1993, How markets process information: News releases and volatility, *Journal of Finance*, **48**, 1161–1191.

[130] Edwards R. D., and J. Magee, 1958, Technical Analysis of Stock Trends, 4th ed., Springfield, MA.

[131] Einstein, A., 1956, Investigation on the Theory of the Brownian Movement, (Ed. R. Fürth.) Dover, New York.

[132] Einstein, A., 1905, On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat, *Annalen der Physik,* **17**, 549–560.

[133] El Karoui, N., and H. German, 1991, A stochastic approach to the pricing of FRN's, *RISK-magazin*, **4**.

[134] El Karoui, N., and I. Karatzas, 1991, A new approach to the Skorokhod problem and its applications, **34**, №1/2, 57–82. correction: *ibid*, **36** (1991), №3/4, 265.

[135] El Karoui, N., R. Myneni and R. Viswanathan, 1991, The probabilistic theory of the American option, Preprint, Université de Paris VI, Paris.

[136] El Karoui, N., and M. C. Quenez, 1995, Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **33**, №1, 29–66.

[137] Emery, M., 1980, Compensation de processus V.F. non localement intégrables, *Lecture Notes in Mathematics*, **784**, 152–160.

[138] Emery, M., 1980, Metrisabilité de quelques espaces de processus aléatoires, *Lecture Notes in Mathematics*, **784**, 140–147.

[139] Emery, M., 1989, Stochastic Calculus in Manifolds (With an Appendix: A Short Presentation of Stochastic Calculus by P.-A. Meyer), Springer-Verlag, Berlin.

[140] Engle, R. F., 1982, Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, №4, 987–1008.

[141] Engle, R. F., and T. Bollerslev, 1986, Modelling the persistence of conditional variance, *Econometrics Reviews*, **5**, 1–50.

[142] Engle, R. F., T. Ito and Lin Wen-Ling, 1990, Meteor showers or heat waves? Heteroskedastic intra-daily volatility in the foreign exchange market, *Econometrica*, **58**, 525–542.

[143] Engle, R. F., and J. R. Russell, Forecasting transaction rates: The autoregressive conditional duration model, [393], **4**.

[144] Esscher, F., 1932, On the probability function in the collective theory of risk, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **15**, 175–195.

[145] Evertsz, C. J. G., Self-similarity of high-frequency USD/DEM exchange rates, [393], **3**.

[146] Evertsz, C. J. G., and K. Berkner, 1995, Large deviation and self-similarity analysis of curves: DAX stock prices, *Chaos, Solutions and Fractals*, **6**, 121–130.

[147] Fama, E. F., 1970, Efficient capital markets: A review of theory and empirical work, *Journal of Finance*, **25**, 383–417.

[148] Fama, E. F., 1965, Portfolio analysis in a stable Paretian market, *Management Science*, **311**, №2, 409–419.

[149] Fama, E. F., 1971, Risk, return and equilibrium, *Journal of Political Economy*, **79**, 30–55.

[150] Fama, E. F., 1965, The behavior of stock market prices, *Journal of Business*, **34**, 420–429.

[151] Fama, E. F., and M. H. Miller, 1972, The Theory of Finance, Holt, Rinehard and Winston, Inc., New York.

[152] Fama, E. F., and R. Roll, 1971, Parameter estimates for symmetric stable distributions, *Journal of American Statistical Association*, **66**, 331–338.

[153] Fama, E. F., and R. Roll, 1968, Some properties of symmetric stable distributions, *Journal of American Statistical Association*, **63**, 817–836.

[154] Family, F., and T. Vicsek, (Eds), 1991, Dynamics of Fractal Surfaces, World Scientific Publ., Singapore.

[155] Feder, J., 1988, Fractals, Plenum Press, New York.

[156] Feller, W., 1966, An Introduction to Probability Theory and its applications, **2**, Wiley, New York. (有俄译本和中译本：(美) W. 费勒著, 李志阐、郑元禄译, 1994, 概率论及其应

用, 第2 卷, 科学出版社, 北京.)

[157] Feller, W., 1951, The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables, *Annals of Mathematical Statistics*, **22**, №3, 427–432.

[158] Fielitz, B. D., and J. P. Rozelle, 1983, Stable distributions and the mixtures of distributions hypotheses for common stock returns, *Journal of American Statistical Association*, **78**, №381, 28–36.

[159] Fisher, I., 1930, The Theory of Interests, Macmillan, New York. (中译本: (美) 菲歇尔著, 陈彪如译, 1999, 利息理论, 上海人民出版社, 上海.)

[160] Flood, M. D., 1994, Market structure and inefficiency in the foreign exchange market, *Journal of International Money and Finance*, **13**, №2, 131–138.

[161] Fokker, A. D., 1914, Die mittlere Energie rotierender Dipole im Strahlungsfeld, *Annalen der Physik*, **13**, №2, 131–138.

[162] Föllmer, H., January, 1990, Probabilistic Aspects of Options, Preprint, Helsinki University, Helsinki.

[163] Föllmer, H., and Yu. M. Kabanov, 1998, Optional Decomposition and Lagrange Multipliers, *Finance and Stochastics*, **2**, №1, 69–81.

[164] Föllmer, H., and Yu. M. Kabanov, 1996, Optional Decomposition Theorems in Discrete Time, Preprint, Humboldt University, Berlin.

[165] Föllmer, H., and Yu. M. Kabanov, 1997, Optional Decompositions under constraints, *Probability Theory and Related Fields*, **109**, №1, 1–25.

[166] Föllmer, H., Ph. Protter and A. N. Shiryaev, 1995, Quadratic covariation and an extention of Itô's formula, *Bernoulli*, **1**, №1/2, 149–170.

[167] Föllmer, H., and M. Schweizer, 1991, Hedging of contingent claims under incomplete information, in *Applied Stochastic Analysis (Stochastic Monographs, vol. 5)*, (Ed. M. H. A. Davis and R. J. Elliott), Gordon and Breach, London, 389–414.

[168] Föllmer, H., and D. Sondermann, 1986, Hedging of non-redundant contingent claims, in *Contributions to Mathematical Economics*, Ed. A. Mas-Colell and W. Hildenbrand, North-Holland, Amsterdam, 205–223.

[169] French, K. R., G. W. Schwert and R. Stambaugh, 1987, Expected stock returns and volatility, *Journal of Financial Economics*, **19**, 3–29.

[170] Friedman, A., 1975, 1976, Stochastic Differential Equations and Applications, vol. 1, 2, Academic Press, New York. (中译本: (美) 弗里德曼著, 吴让泉译, 1983, 随机微分方程及其应用, 科学出版社, 北京.)

[171] Frittelli, M., and P. Lakner, Arbitrage and free lunch in a general financial market model; the fundamental theorem of asset pricing, [336], 89–92.

[172] Гальчук, Л. И., 1974, О структуре некоторых мартингалов, *Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай)*, Ин-т физики и математики АН ЛитССР, Ч. И. Вильнюс, 7–32.

[173] Гамровски, Б., и С. Рачев, 1995, Финансовые модели, использующие

устойчивые законы, *Обозрение прикладной и промышленной математики*, ТБП, Москва, **2**, №4, 556–604. (法译文: Gamrowski, B., et S. T. Rachev, Modèles financiers utilisant les lois stables, Preprint.)

[174] Гельфонд, А. О., 1967, Исчисление конечных разностей, Изд, 3-е, доп., Наука, Москва. (英译本: Gel'fond, A. O., 1971, Calculus of Finite Differences, Authorized English translation of the 3rd Russian edition, Hindustan Publ. Corp., Delhi, India. 中译本: A.O.盖尔芬德著, 刘绍祖译, 1955–1956, 有限差计算, 高等教育出版社, 北京.)

[175] Geman, H., N. El Karoui and J. C. Rochet, 1995, Changes of numéraire, changes of probability measure and option pricing, *Journal of Applied Probability,* **32**, 443-458.

[176] George, T. J., G. Kaul and M. Nimalendran, 1991, Estimation of the bid-ask spread and its components: a new approach, *Review of Financial Studies,* **4**, 623–656.

[177] Gerber, H. U., and E. S. W. Shiu, 1994, Martingale approach to pricing American options, *ASTIN Bulletin*, **24**, 195–200.

[178] Gerber, H. U., and E. S. W. Shiu, 1994, Option pricing by Esscher transforms, *Transactions of the Society of Actuaries*, **46**, 99–191.

[179] Geske, R., and H. E. Johnson, 1984, The American put options valued analytically, *Journal of Finance*, **39**, 1511–1524.

[180] Ghashghaie, S., W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner and Y. Dodge, 1996, Turbulent cascades in foreign exchange markets, *Nature*, **381**, 27 June, 767–770.

[181] Ghysels, E., and J. Jasiak, Trading patterns: Time deformation and stochastic volatility in foreign exchange markets, [393], **1**.

[182] Гихман, И. И., и А.В. Скороход, 1968, Стохастические дифференциальные уравнения, Наукова думка, Киев. (英译本: I. I. Gihman and A. V. Skorohod, 1972, Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin.)

[183] Гирсанов, И. В., 1960, О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры, *Теория вероятностей и ее применения*, **5**, №3, 314–330. (英译文: Girsanov, I. V., 1962, On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, *Theory of Probability and its Applications*, **5**, №3, 285–301.)

[184] Glosten, L., and L. Harris, 1988, Estimating the components of the bid-ask spread, *Journal of Financial Economics*, **21**, 123–142.

[185] Golsten, L., and P. Milgrom, 1985, Bid, ask, and transaction prices in a special market with heterogeneously informed traders, *Journal of Financial Economics*, **14** (March), 21–42.

[186] Гнеденко, Б. В., 1954, Курс теории вероятностей, Изд. 2, ГИТТЛ, Москва; 1988, Изд. 6-е, перераб. и доп., Наука, Москва. (英译本: Gnedenko, B. V., 1988, The Theory of Probability, Mir Publ., Moskow; 中译本: Б. В. 格涅坚科著, 丁寿田译, 1956, 概率论教程, 人民教育出版社, 北京.)

[187] Gnedenko, B. V., 1943, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série

aléatoire, *Annals of Mathematics,* **44**, 423-453.

[188] Гнеденко, Б. В., и А. Н. Колмогоров, 1949, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, Москва. (英译本: Gnedenko, B. V., and A. N. Kolmogorov, 1954, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Addison-Wesley Publ. Comp., Cambridge; 中译本: Гнеденко, Б. В., А. Н. Колмогоров 著, 王寿仁译, 1955, 相互独立随机变数之和的极限分布, 科学出版社, 北京.)

[189] Goodhart, C. A., 1989, "News" and the foreign exchange market, *Proc. Manchester Statist. Soc.,* 1–79.

[190] Goodhart, C. A., and A. Demos, 1990, Reuters screen images of the foreign exchange market: the deutschenmark/doller spot rate, *Journal of International Securities Markets,* **4**, 333-348.

[191] Goodhart, C. A., and L. Figliuoli, 1991, Every minute counts in financial markets, *Journal of International Money and Finance,* **10**, 23–52.

[192] Goodhart, C. A., and M. O'Hara, High frequency data in financial markets: issues and applications, [393], Introductory Lecture.

[193] Gouriéroux, Ch., 1992, Modèles *ARCH* et applications financières, Economica, Paris.

[194] Gouriéroux, C., and J.-P. Laurent, 1995, Dynamic Hedging in Discrete Time, Preprint, CREST, Paris.

[195] Gouriéroux, C., J.-P. Laurent and H. Pham, October, 1995, Quadratic Hedging and Numéraire, Preprint, Université de Marne-La Vallée, Equipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées.

[196] Granger, C. W. J., and P. Newbold, 1977, 1986 (2nd Ed.), Forecasting Economic Time Series, Academic Press, New York.

[197] Granger, C. W. J., and O. Morgenstern, 1970, Predictability of Stock Market Prices, D. C. Heath & Co., Lexington, MA.

[198] Granger, C. W. J., and T. Teräsvirta, 1993, Modelling Nonlinear Dynamic Relationships, Oxford University Press, Oxford.

[199] Grassberger, P., and I. Procaccia, 1983, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D.,* **9**, 189–208.

[200] Григелионис, Б. И., и А. Н. Ширяев, 1966, О задаче Стефана и оптимальных правилах остановки марковских процессов, *Теория вероятностей и ее применения,* **11**, №4, 612–631. (英译文: Grigelionis, B. I., and A. N. Shiryaev, 1966, On Stefan's problem and optimal stopping rules for Markov processes, *Theory of Probability and its Applications,* **11**, №4, 541-558.)

[201] Grimmet, G. R., and D. R. Stirzaker, 1982, Probability and Random Processes, Clarendon Press, Oxford.

[202] Guégan, D., 1994, Séries chronologiques non linéaires à temps discret, Economica, Paris.

[203] Guillaume, D. M., M. M. Dacorogna, R. R. Davé, U. A. Müller, R. B. Olsen, O. V. Hamon and B. Jacquillat, 1992, La marché français des actions, Presses Universitaires

de France, Paris.

[204] Guillaume, D. M., M. M. Dacorogna, R. R. Davé, U. A. Müller, R. B. Olsen, and O. V. Pictet, 1997, From the bird's eye to the microscope: A survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets, *Finance and Stochastics*, **1**, №2, 95–129.

[205] Guillaume, D. M., O. V. Pictet and M. M. Dacorogna, On the intra-day performance of *GARCH* processes, [393], **3**.

[206] Gumbel, E. J., 1960, Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press, New York.

[207] Hagerman, R., 1978, More evidence on the distribution of security returns, *Journal of Finance*, **33**, 1213–1221.

[208] Hale, J., and H. Kogak, 1991, Dynamics and Bifurcations, Springer-Verlag, New York.

[209] Halgreen, C., 1979, Self-decomposability of the generalized inverse Gaussian and hyperbolic distributions, *Zeitschrift für Wahrscheinlich keitstheorie und Verwandte Gebiete,* **47**, 13–17.

[210] Hall, P., 1982, On some simple estimates of an exponent of regular variation, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **44**, №1, 37–42.

[211] Hamilton, J. D., 1994, Time Series Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. (中译本: (美) 詹姆斯D.汉密尔顿著, 刘明志译, 1999, 时间序列分析, 中国社会科学出版社, 北京.)

[212] Hannan, H. J., 1970, Multiple Time Series, Wiley, New York.

[213] Hansen, A. T., 1996, Complete Market Pricing in the Wiener Filtration without Existence of a Martingale Measure, Preprint, Aarhus University, Dept. of Operation Research, Aarhus.

[214] Harrison, J. M., and D. M. Kreps, 1979, Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory,* **20,** 381–408.

[215] Harrison, J. M., and S. R. Pliska, 1981, Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Processes and their Applications,* **11**, №3, 215–260.

[216] Harvey, C. R., and R. D. Huang, 1991, Volatility in the foreign currency futures market, *Review of Financial Studies*, *Journal of Financial Economics*, **22**, 229–252.

[217] Hasbrouck, J., 1988, Trades, Quotes, Inventories and Information, *Journal of Financial Economics*, **22**, 229–252.

[218] Hausman, J. A., A. W. Lo and A. C. McKinlay, 1991, An oderer probit analysis of transaction stock price, Working paper №3888, National Bureau of Economic Research.

[219] Heath, D., R. Jarrow and A. Morton, 1992, Bond pricing and the term structure of interest rates, *Econometrica,* **60,** №1, 77–106.

[220] Heston, S. I., 1992, A closed forms solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, **6**, №2, 333–343.

[221] High Frequency Data in Finance, 1993, Data set from "Olsen & Associates". E-mail: `hfdf@olsen.ch`.

[222] Hilborn, R. C., 1994, Chaos and Nonlinear Dynamics, Oxford Univ. Press, Oxford.

[223] Hill, B. M., 1975, A simple general approach to inference about the tail of a distribution, *The Annals of Statistics*, **5**, №3, 1163–1173.

[224] Ho, T., and S. Lee, 1986, Term structure movements and pricing interest rates contingent claims, *Journal of Finance*, **41**, 1011–1029.

[225] Хоффман-Йёнсен, И., 1993, Устойчивые плотности, *Теория вероятностей и ее применения*, **38**, №2, 470–476. (英译文: Hoffman-Jørgensen, J., 1993, Stable densities, *Theory of Probability and its Applications*, **38**, №2, 350–355.

[226] Hofmann, N., E. Platen and M Schweizer, 1992, Option pricing under incompleteness and stochastic volatility, *Mathematical Finance*, **2**, 153–187.

[227] Hogan, K. C., Jr., and M. Melvin, 1994, Sources of meteor showers and heat waves in the foreign exchange market, *Journal of International Economics*, **37**, 239–247.

[228] Horne, J. C. van, 1984, Financial Market Rates and Flows, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. (中译本: (美) 詹姆斯 · C. 范霍恩著, 赵智文、余良标译, 2000, 金融市场利率与流量, 东北财经大学出版社, 沈阳.)

[229] Hsu Der-Ann, R. B. Miller and D. W. Wichern, 1974, On the stable Paretian behavior of stock-market prices, *Journal of American Statistical Association*, **69**, №345, 108–113.

[230] Huang, R. D., and R. W. Masulis, Spreads, dealer competition, and market regimes: a market microstructure analysis or FX trading, [393], **4**.

[231] Huberman, G., March, 1982, A simple approach to Arbitrage Pricing Theory, *Journal of Economic Theory*, **28,** 183–191.

[232] Hudson, M., 1992, The value in going out, in *From Black-Scholes to black holes*, Risk/Finex, London/New York; 183–186.

[233] Hull, J. C., 2005, Options, Futures, and Other Derivatives, 6th ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. (第 3 版有中译本：赫尔, J.著, 张陶伟译, 2000, 期权、期货和衍生证券, 华夏出版社, 北京.)

[234] Hull, J., and White, A., 1990, Pricing interest rate derivatives securities, *Review of Financial Studies*, **3,** №5, 573–592.

[235] Hull, J., and White, A., 1987, The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance*, **42,** 281–308.

[236] Hurst, H., 1951, Long-term storage capacity of reservoirs, *Transactions of American Society of Civil Engineers*, **116**, 770–808.

[237] Ibbotson, R. G., and R. A. Sinquefield, 1986, Stocks, Bonds, Bills and Inflation: 1986 Year Book, Ibbotson & Associates, Chicago.

[238] Ибрагимов, И. А., и К. Е. Чернин, 1959, Об одновершинности устойчивых законов, *Теория вероятностей и ее применения*, **4**, №4, 453–456. (英译文: Ibragimov, I. A., and K. E. Cherkin, 1961, On the unimodality of stable laws, *Theory of Probability and its Applications*, **4**, №4, 417–419.)

[239] Ikeda, N. and S. Watanabe, 1989, Stochastic Differential Equations and Diffusion Pro-

cesses, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam.

[240] Ingersoll, J. E., 1987, Theory of Financial Decision Making, Rowman and Littlefield, London-Lanham.

[241] Иоффе, А. Д., и В. М. Тихомиров, 1974, Теория экстремальных задач, Наука, Москва. (德译本: Ioffe, A. D. und V. M. Tikhomirov, 1979, Theorie der Extrmalaufgaben, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.)

[242] Itô, K., 1946, On a stochastic integral equation, *Japan Academy. Proceedings*, **22**, 32–35.

[243] Itô, K., 1951, On stochastic differential equations, *Memoirs of the American Mathematical Society*, **4**, 1-89.

[244] Itô, K., 1944, Stochastic integral, *Imperial Academy. Tokyo. Proceedings*, **20**, 519–524.

[245] Itô, K., and H. P. McKean, 1965, Diffusion Processes and their Sample Paths, Springer-Verlag, New York. (俄译本: Ито, К., и Г. Маккин, 1968, Диффузионные процессы и их траектории, Мир, Москва.)

[246] Ito, T., R. F. Engle and Lin Wen-Ling, 1992, Where does the meteor shower come from? The role of stochastic policy coordination, *Journal of International Economics*, **32**, 221–240.

[247] Jacka, S. D., 1991, Optimal stopping and the American put, *Mathematical Finance*, **1**, №2, 1–14.

[248] Jacod, J., 1979, Calcul stochastique et problèmes de martingales, *Lecture Notes in Mathematics*, **714**, 1–539.

[249] Jacod, J., 1980, Intégrales stochastiques par rapport à une semimartingale vectorielle et changements de filtration, *Lecture Notes in Mathematics*, **784**, 161–172.

[250] Jacod, J., and A. N. Shiryaev, 1987, Limit Theorems for Stochastic Processes, Springer-Verlag, Berlin. (俄译本: Жакод, Ж., и А. Н. Ширяев, 1994, Предельные теоремы для случайных процессов, **1**, **2**, Физматлит, Москва.)

[251] Jacod, J., and A. N. Shiryaev, 1998, Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case, *Finance and Stochastics*, **2**, №3, 259–273.

[252] Jacquier, E., N. G. Polson and P. E. Rossi, 1994, Bayesian analysis of stochastic volatility models, *Journal of Business and Economic Statistics*, **12**, №4, 371–417.

[253] Janicki, A., and A. Weron, 1994, Simulation and Chaotic Behavior of α-Stable Stochastic Processes, M. Dekker, New York.

[254] Jakubowski, A., J. Mémin and G. Pages, 1989, Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbb{D}^1$ de Skorokhod, *Probability Theory and Related Fields*, **81**, №1, 111–137.

[255] Jensen, B. A., and J. A. Nielsen, 1991, The Structure of Binomial Lattice Models for Bonds, Working paper №91.1, Copenhagen Business School, Aarhus University.

[256] Jamshidian, F., 1989, An exact bond option formula, *Journal of Finance*, **44**, №1, 205–209.

[257] Jørgensen, P. L., 1994, American Option Pricing, Preprint, The Faculty of Business

Administration, The Aarhus School of Business.

[258] Kabaila, P., 1983, On the asymptotic efficiency of estimators of the parameters of *ARMA* processes, *Journal of Time Series Analysis*, **4**, 37–49.

[259] Кабанов, Ю. М., и Д. О. Крамков, 1994, Отсутствие арбитража и эквивалентные мартингальные меры: новое доказательство теоремы Харрисон-Плиски, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №3, 635–640. (英译文: Kabanov, Yu. M., and D. O. Kramkov, 1994, No-arbitrage and equivalent martingale measures: An elementary proof of the Harrison-Pliska theorem, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №3, 523–527.)

[260] Kabanov, Yu. M., and D. O. Kramkov, 1998, Asymptotic arbitrage in large financial markets, *Finance and Stochastics*, **2**, №, 143–172.

[261] Кабанов, Ю. М., и Д. О. Крамков, 1994, Большие финансовые рынки: асимптотический арбитраж и контигуальность, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 222–228. (英译文: Kabanov, Yu. M., and D. O. Kramkov, 1994, Large financial markets: Asymptotic arbitrage and contiguity, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 182–187.)

[262] Kallsen, J., and M. S. Taqqu, 1998, Option pricing in ARCH-type models, *Mathematical Finance*, **8**, 13-26.

[263] Kamke, E., 1943, Differentialgleichungen. Loesungsmethoden und Lösungen, Akad. Verlagsgesellschaft Becker & Eler Kom.-Ges., Leipzig. (俄译本: Камке, Э., 1950, Справочник по обыкновенные дифференциальным уравнениям, ИЛ, Москва. 中译本: (德) E.卡姆克著, 张鸿林译, 1977, 常微分方程手册, 科学出版社, 北京.)

[264] Kanter, M., 1975, Stable densities under change of scale and total variation inequalities, *The Annals of Probability*, **3**, №4, 697–707.

[265] Karatzas, I., 1988, On the pricing of American options, *Applied Mathematics and Optimization*, **17**, 37–60.

[266] Karatzas, I., and S. Shreve, 1988, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, Berlin.

[267] Karatzas, I., and S. Shreve, 1998, Method of Mathematical Finance, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[268] Kariya, T., 1993, Quantitative Methods for Portfolio Analysis, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[269] Kendall, M. G., 1953, The analysis of economic time-series, Part 1, Prices, *Journal of the Royal Statistical Society*, **96**, 11–25.

[270] Kendall, M., 1973, Time-series, Charles Griffin, London.

[271] Kendall, M., and A. Stuart, 1966, The Advanced Theory of Statistics, **3**, Charles Griffin.

[272] Kim, I. J., 1990, The analytic valuation of American options, *Review of Financial Studies*, **3**, 547–572.

[273] Klein, I., and W. Schachermayer, 1996, Asymptotic arbitrage in non-complete large

financial markets, *Теория вероятностей и ее применения*, **41**, №4, 927–934; *Theory of Probability and its Applications*, **41**, №4, 780–788.

[274] Klimasauskas, C. C., Neural Network Techniques, [96].

[275] Kloeden, P. E., and E. Platen, 1992, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin.

[276] Колмогоров, А. Н., 1941, Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса, *Доклады Академии наук СССР*, **30**, 299–303. (英译文: Kolmogorov, A. N., 1941, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynold's numbers, *Comptes Rendus (Dokl) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, **30**, 301–305.)

[277] Колмогоров, А. Н., 1985, Математика и механика. Избранные труды. **1**, Наука, Москва. (英译本: Kolmogorov, A. N., 1991, Selected Works. **1**: Mathematics and Mechanics (ed. V. M. Tikhomirov), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.)

[278] Колмогоров, А. Н., 1986, Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды. **2**, Наука, Москва. (英译本: Kolmogorov, A. N., 1992, Selected Works. **2**: Probability Theory and Mathematical Statistics (ed. A. H. Shiryaev), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.)

[279] Колмогоров, А. Н., 1940, Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве (Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum), *Доклады Академии наук СССР*, **26**, №2, 115–118.

[280] Kolmogoroff, A. N., 1931, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Mathematische Annalen*, **104**, 415–458. (也参见 [278].) (中译本: 柯尔莫哥洛夫著, 丁寿田译, 1953, 概率论基本概念, 商务印书馆, 上海.)

[281] Kramkov, D. O., 1996, Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets, *Probability Theory and Related Fields*, **105**, №4, 459–479.

[282] Крамков, Д. О., и А. Н. Ширяев, 1996, О достаточных условиях равномерной интегрируемости экспоненциальных мартингалов, Препринт, МИРАН, Москва. (也参见Труды Второго Европейского математического конгресса, 1996, Будапешт.)

[283] Крамков, Д. О., и А. Н. Ширяев, 1994, О расчетах рациональной стоимости "Русского опциона" в симметричной биномиальной модели (B, S)-рынка, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 191–200. (英译文: Kramkov, D. O., and A. N. Shiryaev, 1994, On the rational pricing of the "Russian option" for the symmetrical binomial model of a (B, S)-market, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 153–162.)

[284] Krouse, C. G., 1986, Capital Markets and Prices. Valuing Uncertain Income Streams, North-Holland, Amsterdam.

[285] Kreps, D., 1981, Arbitrage and equilibrium in economics with infinitely many commodities, *Journal of Mathematical Economics*, **8**, 15–35.

[286] Krugman, P., 1991, Target zones and exchange rate dynamics, *Quarterly Journal of Economics*, **106**, №3, 669–682.

[287] Крылов, Н. В., 1977, Управляемые процессы диффузионного типа, Наука, Москва.

[288] Krylov, N. V., 1995, Introduction to the Theory of Diffusion Processes, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[289] Küchler, U., K. Neumann, M. Sørensen and A. Streller, 1994, Stock Returns and Hyperbolic Distributions, Discussion paper №23, Humboldt University, Berlin.

[290] Lai, T. L., 1995, Sequential change-point detection in quality control and dynamic systems, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **57**, №4, 613–658.

[291] Lai, T. L., and D. Siegmund, 1983, Fixed accuracy estimation of an autoregressive parameter, *The Annals of Statistics*, **11**, №2, 478–485.

[292] Lakner, P., 1993, Martingale measure for a class of right-continuous processes, *Mathematical Finance*,**3**, №1, 43–53.

[293] Lamberton, D., and B. Lapeyre, 1996, Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Chapman and Hall, London. (原版为法文: Lamberton, D., et B. Lapeyre, 1991, Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance, Ellipses, Paris.)

[294] Lanford, O., 1982, A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures, *American Mathematical Society. Bulletin*, **6**, №3, 427–434.

[295] Langevin, P., 1908, Sur la théorie du mouvement brownien, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, **146**, 530–533.

[296] Latin Dictionary (founded on Andrew's edition of Freund's latin dictionary revised, enlarged and in great part rewritten by Ch. T. Lewis, Ch. Short), 1966, Oxford Univ. Press, Oxford.

[297] Легостаева, И. Л., и А. Н. Ширяев, 1971, Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса, *Теория вероятностей и ее применения*, **16**, №2, 339–345. (英译文: Legostaeva, I. L., and A. N. Shiryaev, 1971, Minimax weight in a trend detection problem of a random process, *Theory of Probability and its Applications*, **16**, №2, 344–349.)

[298] Lévy, P., 1948, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, Paris.

[299] Lin, S. J., 1995, Stochastic analysis of fractional Brownian motion, *Stochastics and Stochastics Reports*, **55**, 121–140.

[300] Lindley, D. V., 1961, Dynamic programming and decision theory, *Appl. Statist.*, **10**, №1, 39–51.

[301] Lintner, J., 1965, The valuation of risky assets and the selection of risky investments on stock portfolios and capital budgets, *Review of Economics and Statistics*, **47** (February),

13–34.

[302] Linton, O., 1993, Adaptive estimation in *ARCH* Models, *Econometric Theory*, **9**, 539–569.

[303] Липцер, Р. Ш., и А. Н. Ширяев, 1974, Статистика случайных процессов, Наука, Москва. (英译本: Liptser, R. S., and A. N. Shiryaev, 1977, 1978, Statistics of random processes, I. General Theory; II. Applications; Springer-Verlag, New York.)

[304] Липцер, Р. Ш., и А. Н. Ширяев, 1986, Теория мартингалов, Наука, Москва. (英译本: Liptser, R. S., and A. N. Shiryaev, 1989, Theory of Martingales, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.)

[305] Liu, T., C. W. J. Granger and W. P. Heller, Using the correlation exponent to decide whether an economic series is chaotic, [383].

[306] Lo, A., 1994, Neural networks and other nonparametric techniques in economics and finance, in *Blending Quantitative and Traditional Equity Analysis*, Association for Investment Management and Research, 25–36.

[307] Locke, P. R., and C. L. Sayers, 1993, Intra-day futures price volatility: information effects and variance persistence, *Journal of Applied Econometrics*, **8**, 15–30. (也参见: [383], 213–228.)

[308] Lockwood, L. J., and S. C. Linn, 1990, An examination of stock market return volatility during overnight and intraday periods, 1964–1989, *Journal of Finance*, **45**, 591–601.

[309] Loosignian, A. M., 1981, Foreign Exchange Futures, Dow Jones-Irwin, Homewood, IL.

[310] Loosignian, A. M., 1985, Stock Index Futures (Buying and Selling the Market Averages), Addison-Wesley, Reading, MA.

[311] Lorenz, H.-W., 1989, Nonlinear Dynamic Economics and Chaotic Motion, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, **334**, Springer-Verlag, New York.

[312] Malkiel, B. G., 2003, A Random Walk down Wall Street, Completely Revised and Updated Edition, W. W. Norton & Co., London. (1984, 1991 版有中译本: 马尔基尔, 1991, 漫步华尔街: 股票投资指南, 上海万国证券公司译, 上海翻译出版公司, 上海; 马尔基尔, 1994, 漫游华尔街: 90 年代最新投资指南, 苏云等译, 四川人民出版社, 成都; 伯顿・麦基尔, 2002, 漫步华尔街, 骆玉鼎、彭晗等译, 上海财经大学出版社, 上海.)

[313] Malliaris, A. G., and W. A. Brock, 1982, Stochastic Methods in Economics and Finance, North-Holland, Amsterdam. (中译本: (美) A. G. 马利亚里斯、W. A. 布罗克著, 陈守东、李小军、李元译, 2004, 经济学和金融学中的随机方法, 上海人民出版社, 上海.)

[314] Mandelbrot, B. B., 1977, Fractals: Form, Chance, and Dimension, Freeman, San Francisco. (中译本: (法) B. 曼德尔布洛特著, 文志英、苏虹译, 1999, 分形对象: 形、机遇和维数, 世界图书出版公司, 北京.)

[315] Mandelbrot, B. B., 1975, Les objects fractals, Flammarion, Paris.

[316] Mandelbrot, B. B., 1975, Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent process, *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **31**, 271–285.

[317] Mandelbrot, B. B., 1969, Robustness of the rescaled rang R/S in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence, *Water Resources Research*, **5**, №5, 967–988.

[318] Mandelbrot, B. B., April, 1967, Some noises with $1/f$ spectrum: a bridge between direct current and white noise, *IEEE Transactions on Information Theory*, **1**, №3, 259–290.

[319] Mandelbrot, B. B., 1972, Statistical methodology for non-periodic cycles: from the covariance to R/S analysis, *Annals of Economic and Social Measurement*, **1**, №3, 259–290.

[320] Mandelbrot, B. B., 1982, The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman, San Francisco.

[321] Mandelbrot, B. B., 1960, The Pareto-Lévy law and the distribution of income, *International Economic Review*, №1, 79–106.

[322] Mandelbrot, B. B., 1963, The stable Paretian income distribution when the apparent exponent is near two, *International Economic Review*, № 4, 111–115.

[323] Mandelbrot, B. B., 1963, The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, **36**, 394–419.

[324] Mandelbrot, B. B., 1967, The variation of some other speculative prices, *Journal of Business*, **40**, 393–413.

[325] Mandelbrot, B. B., 1965, Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi: application à la loi climatologique de H. E. Hurst, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, **240**, 3274–3277.

[326] Mandelbrot, B. B., 1971, When can price be arbitrated efficiently? A limit of the validity of the random walk and martingale models, *Review of Economics and Statistics*, **53**, 225–236.

[327] Mandelbrot, B. B., and H. M. Taylor, 1967, On the distribution of stock price difference, *Operations Research*, **15**, №6, 1057–1062.

[328] Mandelbrot, B. B., and J. W. van Ness, 1968, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Review*, **10**, №4, 422–437.

[329] Mandelbrot, B. B., and J. R. Wallis, 1969, Computer experiments with fractional Gaussian noises, I, II, III, *Water Resources Research*, **5**, 228–267.

[330] Mantegna, R. N., and H. E. Stanley, 1995, Scaling behaviour in the dynamics of an economic index, *Nature*, **376**, 46–49.

[331] Markowitz, H., 1990, Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets, Blackwell, Cambridge, MA. (中译本: (美) 哈利 · M. 马科维兹著, 朱菁、欧阳向军译, 2006, 资产组合选择和资本市场的均值-方差分析, 上海三联书店、上海人民出版社, 上海.)

[332] Markowitz, H., 1952, Portfolio selection, *Journal of Finance*, **7**, 77–91.

[333] Markowitz, H., 1959, 1991 Second ed., Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment, Basil Blackwell, Cambridge. (中译本: 哈里 · 马科维茨著, 刘军霞、张一驰译, 2000, 资产选择: 投资的有效分散化, 首都经济贸易大学出版社, 北京.)

[334] Martin, J. D., S. H. Cox, Jr., and R. D. McMinn, 1988, The Theory of Finance. Evidence

and Application, The Dryden Press, London.

[335] Математическая энциклопедия, В 5-титомаш, Советская энциклопедия, 1977–1985. (中译本: 维诺格拉多夫, И. М., 主编, 中国数学会《数学百科全书》编译委员会编译, 1994-2000, 数学百科全书, 科学出版社, 北京.)

[336] Mathematical Finance, 1995, Based on the proceedings of a workshop, held at IMA, University of Minnesota, Minneapolis, MN, USA 1992/93. Ed. M. H. A. Davis, D. Duffie, W. H. Fleming, S. E. Shreve, Springer-Verlag, New York.

[337] Mathematical Models in Finance, 1995, Ed. S. D. Howison, F. P. Kelly, P. Wilmott, Chapman & Hall, London.

[338] Маймин, З. Г., 1974, К вопросу о выделении детерминированной составляющей случайного поля, *Теория веро-ятностей и ее применения*, **19**, №3, 533–546. (英译文: Maimin, Z. G., 1974, On detection of the deterministic component of a random field, *Theory of Probability and its Applications*, **19**, №3, 506–521.)

[339] McCuloch, J. H., 1986, Simple consistent estimators of stable distribution parameters, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **15**, №4, 1109–1136.

[340] McKean, H.-P., 1965, A free boundary problem for the heat equation arising from a problem of mathematical economics, *Industrial Management Review*, **6**, 32–39.

[341] Мельников, А. В., 1997, Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг, ТВП, Москва.

[342] Melnikov, A. V., and A. N. Shiryaev, 1996, Criteria for the absence of arbitrage in the financial market, in *Frontiers in Pure and Applied Probability, II (Proceedings of the Fourth Russian-Finish Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics, Moscow, October 3–8, 1993)*, TVP, Moscow, 121–134.

[343] Mémin, J., 1980, Espaces de semi martingales et changements de probabilité, *Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **52**, №1, 9–39.

[344] Merrill Lynch, Pierce, Fenner, Smith, Inc., October, 1986, Security Risk Evaluation.

[345] Merton, R. C., 1992, Continuous-Time Finance, Rev. ed., Blackwell, MA/Oxford, UK. (中译本: (美) 罗伯特 · C · 默顿著, 郭多祚、王远、徐占东译, 2005, 连续时间金融, 中国人民大学出版社, 北京.)

[346] Merton, R., 1973, Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, №4 (Spring), 141–183.

[347] Meyer, P.-A., 1977, Notes sur les intégrales stochastiques, I. Intégrales hilbertiennes, *Lecture Notes in Mathematics*, **581**, 446–461.

[348] Meyers, M. G., 1970, A Financial History of the United States, Columbia Univ. Press, New York.

[349] Mikhalevich, 1958, Bayesian testing of two hypothesis on mean value of normal process, *Vestnik Kiev University*. **I**, №1, 101–104. (原文为乌克兰文.)

[350] Miller, M., and F. Modigliani, 1961, Dividend policy, growth and the valuation of shares, *Journal of Business*, **34** (October), 411–433.

[351] Mills, T. C., 1995, The Econometric Modelling of Financial Time Series, Cambridge Univ. Press, Cambridge. (中译本: (英) 特伦斯 · C · 米尔斯著, 俞卓菁译, 2002, 金融时间序列的经济计量学模型, 经济科学出版社, 北京.)

[352] Mittnik, S., and S. T. Rachev, 2000, Stable Paretian Models in Finance, Wiley, New York.

[353] Mittnik, S., and S. T. Rachev, 1993, Modeling asset returns with alternative stable distributions, *Econometric Reviews*, **12**, №3, 261–330.

[354] Mittnik, S., and S. T. Rachev, 1989, Stable distributions for asset returns, *Applied Mathematics Letters*, **2**, №3, 301–304.

[355] Modigliani, F., and M. Miller, 1963, Corporation income taxes and the cost capital: a correction, *American Economic Review*, **53** (June), 433–443. (中译文见: 莫迪利亚尼文萃, 林少宫、费剑平译, 2001, 首都经济贸易大学出版社, 北京, 152–166.)

[356] Modigliani, F., and M. Miller, 1958, The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment, *American Economic Review*, **48** (June), 261–297. (中译文见: 莫迪利亚尼文萃, 林少宫、费剑平译, 2001, 首都经济贸易大学出版社, 北京, 106–151.)

[357] Morris, K. M., and A. M. Siegel, 1993, Guide to Understanding Money and Investing, Lightbulb Press.

[358] Mullin, T., (Ed.) 1994, The Nature of Chaos, Clarendon Press, Oxford.

[359] Musiela, M., and D. Sondermann, 1993, Different Dynamical Specifications of the Term Structure of Interest Rates and their Implications, Preprint, Bonn University, Dept. of Statistics, Bonn.

[360] Müller, U. A., M. M. Dacorogna, R. D. Davé, R. B. Olsen, O. V. Pictet and J. E. Weizsäcker, March 20, 1995, Volatilities of Different Time Resolutions - Analyzing the Dynamics of Market Components, Preprint UAM, 1995-01-12, "Olsen & Associates", Research Institute for Applied Economics, Zürich. (也参见[393], **1**.)

[361] Müller, U. A., M. M. Dacorogna, R. D. Davé, O. V. Pictet, R. B. Olsen and J. R. Ward, 1993, Fractals and intrinsic time - A Challenge to Econometricians, Working paper, Technical Report UAM 1993-08-16, "Olsen & Associates", Research Institute for Applied Economics, Zürich.

[362] Müller, U. A., M. M. Dacorogna, R. B. Olsen, O. V. Pictet, M. Schwarz and C. Morgenegg, 1990, Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price change scaling law, and intra-day analysis, *Journal of Banking and Finance*, **14**, 1189–1208.

[363] Myneni, R., 1992, The pricing of the American option, *Annals of Applied Probability*, **2**, №1, 1–23.

[364] Nelson, D. B., 1990, *ARCH* models as diffusion approximations, *Journal of Econometrics*, **45**, 7–38.

[365] Nelson, D. B., 1996, Asymptotic filtering theory for multivariate *ARCH* models, *Journal of Econometrics*, **71**, №1/2, 1–47.

[366] Nelson, D. B., 1990, Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach, *Econometrics*, **59**, 347–370.

[367] Nelson, D. B., 1992, Filtering and forecasting with misspecified *ARCH* model, *Journal of Econometrics*, **52**, 61–90.

[368] Новиков, А. А., 1972, Об одном тождестве для стохастических интегралов, *Теория вероятностей и ее применения*, **17**, №4, 761–765. (英译文: Novikov, A. A., On an identity for stochastic integrals, *Theory of Probability and its Applications*, **17**, 717–720.)

[369] Настольная книга валютного дилера. 1992, СП “Crocus International”. Верба, Москва.

[370] O'Brein, J., and S. Shrivastava, 1995, Financial Analysis and Security Trading, Carnegie Mellon University, Pittsburg, PA. (有俄译本: О'Брайен Дж., С. Шривастава, 1995, Финансовый Анализ и Тороговля Цнными Бумагами, Дело Лтд, Москва.)

[371] Osborne, M. F. M., 1959, Brownian motion in the stock market, *Operations Research*, **7**, 145–173. (也参见: [78], 100–128.)

[372] Pagan, A. R., 1984, Econometric issues in the analysis of regressions with generated regressors, *International Economic Review*, **25**, 221–247.

[373] Pagan, A. R., and G. W. Schwert, 1990, Alternative models for conditional stock volatility, *Journal of Econometrics*, **45**, 267–290.

[374] Paley, R. E. A. C., and N. Wiener, 1934, Fourier transforms in the complex domain, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, **19**.

[375] Paley, R. E. A. C., N. Wiener and A. Zygmund, 1933, Notes on random functions, *Mathematische Zeitschrift*, **37**, 647–668.

[376] Parkinson, M., 1977, Option pricing: The American put, *Journal of Business*, **50**, 21–36.

[377] Pareto, V., 1897, Cours d'Economie Politique, Lausanne, Switzerland.

[378] Peitgen, H.-O., H. Jürgens and D. Saupe, 1992, Chaos and Fractals, Springer-Verlag, New York.

[379] Peitgen, H.-O., and P. H. Richter, 1986, The beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems, Springer-Verlag, Berlin. (俄译本: Пайтген, Х.-О., и П. Х. Рихтер, 1993, Красота Фракталов. Образы Комплексных Динамических Систем, Мир, Москва. 中译本: (德) H.-O. 派特根, (德) P. H. 里希特著, 井竹君、章祥荪译, 1994, 分形—美的科学. 复动力系统图形化, 科学出版社, 北京.)

[380] Peltier, R.-F., and J. L. Véhel, 1996, A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion, Preprint, INRIA, Recquencourt.

[381] Peltier, R.-F., and J. L. Véhel, August, 1995, Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results, Preprint №2645, INRIA, Rocquencourt.

[382] Percival, D. B., 1993, Three curious properties of the sample variance and autocovariance for stationary processes with unknown mean, *American Statistician*, **47**, 274–276.

[383] Pesaran, M. H., and S. M. Potter, (Eds.), 1993, Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics, Wiley, New York.

[384] Pesaran, M. H., and H. Samiei, 1992, Estimating limited-dependent rational expections models with an application to exchange rate determination in a target zone, *Journal of Econometrics*, **53**, 141–163.

[385] Peters, E. E., 1991, Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility, Wiley, New York.

[386] Peters, E. E., 1994, Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics, Wiley, New York.

[387] Петраков, Н. Я., и В. И. Ротарь, 1985, Фактор неопределенности и управление экономическими системами, Наука, Москва.

[388] Петроченко, П. Ф., (ред.) 1992, Англо-русский толковый словарь по бизнесу, СП “Арт-Бизнес-Центр”, Москва.

[389] Planck, M., 1917, Über einen Satz der statistischen Dynamic und seine Erweiterung in der Quantentheorie, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 324–341.

[390] Praetz, P., 1972, The distribution of share price changes, *Journal of Business*, **45**, 49–55.

[391] Priestley, M., 1988, Non-linear and Nonstationary Time Series, Academic Press, New York.

[392] Prigent, J.-L., 1996, Incomplete markets: Convergence of options values under the minimal martingale measure, Preprint №9526, THEMA, University of Cergy-Pontoise; also in *Proceedings of the 13th International Conference AFFI (Geneva, 1996)*.

[393] Proceedings of the First International Conference on High Frequency Data in Finance (HFDF-I, March 29–31, 1995): Introductory Lecture and 4 volumes, “Olsen & Associates”, Research Institute for Applied Economics, Zürich.

[394] Прохоров, Ю. В., 1956, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, *Теория вероятностей и ее применения*, **1**, №2, 177-238. (英译文: Prohorov, Yu. V., 1956, Convergence of random processes and limit theorems in probability theory, *Theory of Probability and its Applications*, **1**, №2, 157–214.)

[395] Protter, Ph., 1990, Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach, Springer-Verlag, Berlin.

[396] Protter, Ph., and D. Talay, 1997, The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations, *Annals of Probability*, **25**, №1, 393–423.

[397] Puu, T., 1989, Nonlinear Economic Dynamics, *Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems*, №336, Springer-Verlag, New York.

[398] Qiggins, J. B., 1987, Option values under stochastic volatility. Theory and empirical estimates, *Journal of Financial Economics*, **19**, 351–372.

[399] Rabemananjara, R., and J. M. Zakoian, Threshold *ARCH* Models and asymmetries in volatility, [383].

[400] Рачев, С. Т., и Л. Рушендорф, 1994, Модели и расчеты контрактов с опционами, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 150–190. (英译文: Rachev, S. T., and L. Rüshendorf, 1994, Models for option prices, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 120–152.)

[401] Redhead, K., and S. Huhhes, 1988, Financial Risk Management, Gower Publishing Company. (俄译本: Рэдхэд, К., и С. Хьюс, 1996, Управление финансовыми рынками, Инфра-М, Москва.)

[402] Revuz, D., and M. Yor, 1991, Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer-Verlag, Berlin.

[403] Ridley, M., October, 1993, The mathematics of markets, *The Economist.*

[404] Risk Metrics, November, 1994, Morgan Guaranty Trust Company, New York.

[405] Roberts, H. V., 1959, Stock-market "patterns" and financial analysis: Methodological suggestions, *Journal of Finance*, **14,** 1–10.

[406] Rockafellar, R. T., 1970, Convex Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ. (俄译本: Рокафеллар, Р. Т., 1973, Выпуклый Анализ, Мир, Москва.)

[407] Rogers, L. C. G., 1995, Equivalent martingale measures and no-arbitrage, *Stochastics and Stochastics Reports*, **51**, 41–50.

[408] Rogers, L. C. G., and D. Taylor, (eds.), 1997, Numerical Methods in Finance, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[409] Рогозин, Б. А., 1965, О некоторых классах процессов с независимыми приращениями, *Теория вероятностей и ее применения*, **10**, 479–483. (英译文: Rogozin, B. A., On some classes of processes with independent increments, *Theory of Probability and its Applications*, **10**, 479–483.)

[410] Roll, R., and S. A. Ross, 1980, An empirical investigation of the arbitrage pricing theory, *Journal of Finance*, **35**, 1073–1103.

[411] Ross, S. A., 1989, Information and volatility: The no-arbitrage martingale approach to timing and resolution irrelevancy, *Journal of Finance*, **44**, 1–18.

[412] Ross, S. A., 1976, The arbitrage theory of capital asset pricing, *Journal of Economic Theory*, **13,** 341–360.

[413] Рубинштейн, Л. Н., 1967, Проблема Стефана, Звайгзне, Рига.

[414] Rubinstein, M., December 1991, Exotic Options, Working paper №220, Institute of Business and Economic Research, University of California, Berkeley.

[415] Rubinstein, M., 1992, Guiding force, in *From Black-Scholes to black holes*, Risk/Finex, London/ New York, 39–48.

[416] Sacks, J., and D. Ylvisaker, 1978, Linear estimation for approximately linear models, *Annals of Statistics*, **6**, №5, 1122–1137.

[417] Samorodnitsky, G., A class of shot noise models for financial applications, [393], **3**.

[418] Samorodnitsky, G., and M. S. Taqqu, 1994, Stable Non-Gaussian Random Processes, Chapman & Hall, New York.

[419] Samuelson, P. A., 1965, Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, *Industrial Management Review*, **6**, 41–49.

[420] Samuelson, P. A., 1965, Rational theory of warrant pricing, *Industrial Management Review*, **6**, 41–49.

[421] Sandmann, K., and D. Sondermann, 1997, A note on the stability of log-normal interest rate models and the pricing of eurodollar futures, *Mathematical Finance*, **7**, №2, 119–125.

[422] Sandmann, K., and D. Sondermann, 1993, A term structure model and the pricing of interest rate derivatives, *Review of Futures Markets*, **12**, №2, 391–423.

[423] Sato, Ken-iti, 1995, Lévy Processes on the Euclidean Spaces, Preprint, Institute of Mathematics, University of Zürich, Zürich.

[424] Schachermayer, W., 1992, A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time, *Insurance: Mathematics & Economics*, **11**, 249–257.

[425] Schachermayer, W., 1994, Martingale measure for discrete-time processes with infinite horizon, *Mathematical Finance*, **4**, №1, 25–55.

[426] Schmidt, W. M., 1997, On a general class of one-factor models for the term structure of interest rates, *Finance and Stochastics*, **1**, №1, 3–24.

[427] Schnidrig, R., and D. Würtz, Investigation of the volatility and autocorrelation function of the USD/DEM exchange rate on operational time scales, [393], **3**.

[428] Schuster, H. G., 1984, Deterministic Chaos. An Introduction, Physik Verlag, Weinheim. (俄译本: Шустер, Г., 1988, Детерминированный хаос. Введение, Мир, Москва.)

[429] Schweizer, M., 1995, On the minimal martingale measure and the Föllmer-Schweizer decomposition, *Stochastic Analysis and Applications*, **13**, №5, 573–599.

[430] Schweizer, M., 1995, Variance-optimal hedging in discrete time, *Mathematics of Operations Research*, **20**, №1, 1–32.

[431] Schwert, G. W., and P. J. Segnin, 1990, Heteroskedasticity in stock returns, *Journal of Finance*, **45**, 1129–1155.

[432] Scott, L. O., 1987, Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation and an application, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **22**, 419–438.

[433] Sharpe, W. F., 1964, Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, **19** (September), 425–442.

[434] Шепп, Л. А., и А. Н. Ширяев, 1994, Новый взгляд на расчеты "Русского опциона", *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 130–149. (英译文: Shepp, L. A., and A. N. Shiryaev, A new look at pricing of the "Russian option", *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 103–119.)

[435] Shepp, L. A., and A. N. Shiryaev, 1993, The Russian option: Reduced regret, *Annals of Applied Probability*, **3**, №3, 631–640.

[436] Shiller, R. J., 1989, Stock Market Volatility, MIT Press, Cambridge, MA. (中译本: 罗伯特·希勒著, 文忠桥、卞东译, 2007, 市场波动, 中国人民大学出版社, 北京.)

[437] Shimko, D., 1992, Finance in Continuous Time. A Primer, Kolb Publ. Co., Miami.

[438] Ширяев, А. Н., 1994, Актуарное и финансовое дело: современное состояние и перспективы развития, *Обозрение прикладной и промышленной математики*, ТВП, Москва, **1**, №5, 684–697.

[439] Ширяев, А. Н., 1989, Вероятность, Изд. 2-е, перераб. и доп., Наука, Москва. (英译本: Shiryaev, A. N., 2004, Probability, translated by R.P. Boas, 2nd ed., 世界图书出版公司, 北京.)

[440] Ширяев, А. Н., 1961, Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима, *Доклады Академия наук СССР*, **138**, №5, 1039–1042. (英译文: Shiryaev, A. N., 1961, The problem of the most rapid detection of a disturbance in a stationary process, *Soviet Mathematics, Dokl.*, **2**, 795–799.)

[441] Ширяев, А. Н., 1976, Статистический последовательный анализ, Изд. 2, Наука, Москва. (英译本: Shiryaev, A. N., 1978, Optimal stopping rules, Springer-Verlag, New York.)

[442] Ширяев, А. Н., 1994, Стохастические проблемы финансовой математики, *Обозрение прикладной и промышленной математики*, ТВП, Москва, **1**, №5, 780–820.

[443] Ширяев, А. Н., Ю. М. Кабанов, Д. О. Крамков и А. В. Мельников, 1994, К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов, I. Дискретное время, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 21–79. (英译文: Shiryaev, A. N., Yu. M. Kabanov, D. O. Kramkov and A. V. Mel'nikov, 1994, Toward the theory of pricing of options of both European and American types, I. Discrete time, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 14–60.)

[444] Ширяев, А. Н., Ю. М. Кабанов, Д. О. Крамков и А. Б. Мельников, 1994, К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов, II. Непрерывное время, *Теория вероятностей и ее применения*, **39**, №1, 80–129. (英译文: Shiryaev, A. N., Yu. M. Kabanov, D. O. Kramkov and A. B. Mel'nikov, 1994, Toward the theory of pricing of options of both European and American types, II. continuous time, *Theory of Probability and its Applications*, **39**, №1, 61–102.)

[445] Shiryaev, A. N., and V. G. Spokoinyi, 1997, On sequential estimation of an autoregressive parameter, *Stochastics and Stochastic Reports*, **60**, №3+4, 219–240.

[446] Скороход, А. В., 1967, Случайные процессы с независимыми приращениями, Наука, Москва.

[447] Sin, C. A., 1966, Strictly Local Martingales and Hedge Ratios on Stochastic Volatility Models, Cornell University, Graduate School, Ithaka, NY.

[448] Smith, R. L., 1992, Estimating dimension in noisy chaotic time series, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **54**, №2, 329–351.

[449] Smith, R. L., 1992, Optimal estimation of fractal dimension, *Nonlinear Modeling and Forecasting (SFI Studies in the Science of Complexity, Proceedings,* **12***)*, Ed. M. Casdagli and S. Eubank, Addison-Wesley, Reading, MA.

[450] Sobel, R., 1977, Inside Wall Street: Continuity and Change in the Financial District, W. W. Norton & Co., New York.

[451] Soros, G., 1994, The Alchemy of Finance. Reading the Mind of the Market, Wiley, New York. (俄译本: Сорос, Дж., Алхимия финансов, Ихфра-М., Москва. 中译本: (美)乔治・索罗斯著, 孙忠、侯纯译, 1999, 金融炼金术, 海南出版社, 海口.)

[452] Спокойный, В. Г., и А. Н. Ширяев, 1993, Статистические эксперименты и статистические решения (рукопись монографии), Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, Москва. (英译本: Shiryaev, A. N., and V.G. Spokoiny, 2000, Statistical experiments and decisions: asymptotic theory, World Scientific, Singapore, River Edge, NJ.)

[453] Stein, E. M., and C. J. Stein, 1991, Stock prices distributions with stochastic volatility: an analytic approach, *Review of Financial Studies*, **4**, №4, 727–752.

[454] Стохастические аспекты финансовой математики. Тематический выпуск, 1994, *Теория вероятносей и ее применения*, **39**, №1. (英译本: Stochastic Aspects of Financial Mathematics, 1994, *Theory of Probability and its Applications, (Special Issue)*, **39**, №1.)

[455] Stricker, C., 1990, Arbitrage et lois de martingale, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **26**, №2, 451–460.

[456] Strogatz, S. H., 1994, Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison-Wesley, Reading, MA.

[457] Stroock, D. W., and S. R. S. Varadhan, 1969, Diffusion processes with continuous coefficients, I, II, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **22**, №3, 345–400; №4, 479–530.

[458] Svensson, L. E. O., 1991, Target zones and interest rate variability, *Journal of International Economics*, **31**, 27–54.

[459] Taqqu, M. S., 1988, Self-similar processes, in *Encyclopaedia of Statistical Sciences*, (Eds. S. Kotz and N. Johnson), Wiley, New York, 352–357.

[460] Taylor, S., 1986, Modeling Financial Time Series, Wiley, New York.

[461] Tong, H., 1990, Nonlinear Time Series, Oxford Univ. Press, Oxford.

[462] Tong, H., 1990, Nonlinear Time Series: A Dynamical System Approach, Clarendon Press, Oxford.

[463] Тихонов, А. Н. и А. А. Самарский, 1972, Уравнения математической физики, Наука, Москва. (中译本: (苏)吉洪诺夫、萨马尔斯基, 黄克欧等译, 1961–1963, 数学物理方程, 人民教育出版社, 北京.)

[464] Timmermann, A., 1995, Scales and stock markets, *Nature*, **376**, 18–19.

[465] Tversky, A., 1990, The Psychology of Risk. Quantifying the Market Risk Premium Phenomena for Investment Decision Making, Institute of Chartered Financial Analysis,

Charlottesville, VA.

[466] Uhlenbeck, G. E., and L. S. Ornstein, 1930, On the theory of Brownian motion, *Physical Review*, **36**, 823–841.

[467] van Moerbeke, P. L. J., 1976, On optimal stopping and free boundary problems, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **60**, №2, 101–148.

[468] Varian, H. R., (Ed.), 1993, Economic and Financial Modeling with Mathematica (TELOS - The Electronic Library of Science), Springer-Verlag, Berlin.

[469] Vegle, S. R., (Ed.), 1987, Stocks, Bonds, Options, Futures, Institute of Finance, Pretice Hall, New York.

[470] Вентцель, А. Д., 1975, Курс теории случайных процессов, Наука, Москва. (英译本: Venttsel, A. D., 1981, A Course in the Theory of Stochastic Processes, McGraw Hill, New York.)

[471] Веретенников, А. Ю., 1979, О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений, *Теория вероятносей и ее применения*, **24**, №2, 348–360. (英译文: Veretennikov, A. Yu., 1980, On the strong solutions of stochastic differential equations, *Theory of Probability and its Applications,* **24**, 354–366.)

[472] Vasicek, O., 1977, An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, **5**, 177–188.

[473] Voss, R. F., 1992, $1/f$ noise and fractals in economic time series, in *Fractal Geometry and Computer Graphics*, Ed. J. L. Encarnação, H.-O. Peitgen, and G. Englert, Springer-Verlag, Berlin, 45–52.

[474] Walter, C., September, 1995, Levy-stability under addition and fractal structure of markets, 5th AFIR International Colloquium, Bruxelles.

[475] Weyl, H., 1967, Bemerkungen zum Begriff der Differential-Quotenen gebrochener Ordnung, *Viertelschr. Naturforsch. Ges. Zürich,* **62**, 296–302.

[476] Wiener, N., 1923, Differential space, *Journal of Mathematical Physics. Math. Inst. Tech.*, **2**, 131–174.

[477] Wiggins, J. B., 1987, Option values under stochastic volatility. Theory and empirical evidence, *Journal of Financial Economics*, **19**, 351–372.

[478] Wilmott, P., J. Dewynne and S. Howison, 1993, Option Pricing: Mathematical Models and Computation, Oxford Financial Press, Oxford.

[479] Wilmott, P., S. Howison and J. Dewynne, 1996, The Mathematics of Financial Derivatives. (A Student Introduction), Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[480] Working, H., 1934, A random-difference series for use in the analysis of time series, *Journal of American Statistical Association*, **29**, 11–24.

[481] Zhou, B., Forecasting Foreign Exchange Rates Subject to De-Volatilization, Working paper №3510, Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA. (也参见: [393], **4**.)

[482] Зоновьев, С. З., 25 июня 1996, Инфраструктурный фактор рынка ценных бумаг, *Деловой экспресс (газета)*, №23.

[483] Золотарев, В. М., 1958, Распределение суперпозиции безгранично делимых процессов, *Теория вероятносей и ее применения*, **3**, №2, 197–200. (英译文: Zolotarev, V. M., 1958, Distribution of superposition of infinitely divisible processes, *Theory of Probability and its Applications,* **3**, №2, 185–188.)

[484] Золотарев, В. М., 1983, Одномерные устойчивые распределения, Наука, Москва. (英译本: Zolotarev, V. M., 1986, One-dimensional Stable Distributions, Amer. Math. Soc., Providence, RI.)

[485] Звонкин, А. К., 1974, Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, "уничтожающее" снос, *Математический сборник*, **93**, №1, 129–149. (英译文: Zvonkin, A. K., 1975, A transformation of the phase space of a diffusion process that removes the drift, *Mathematics of the USSR, Sbornik*, **22**, 129–149.)

索引. 数学符号

索引. 英汉术语对照

F

G

H

I

K

L

R

S

T

U

V

W

Y